

## リアルタイム Hilbert 変換器の設計及び性能評価 \*

☆高津航輝, 照沼卓磨, 矢田部浩平 (農工大), 泉悠斗, 高橋祐, 近藤多伸 (ヤマハ株式会社)

## 1 まえがき

包絡線検出などに用いられる Hilbert 変換器は, FIR フィルタや IIR フィルタを用いて近似される [1-3]. 特に, リアルタイムに Hilbert 変換を行う際には, フィルタ次数を抑えられる IIR フィルタで近似する手法が有効である. 一般に, フィルタの極零を回転すると, 周波数特性がシフトする. 本稿では, 既存の IIR ハーフバンドローパスフィルタの極零を回転して Hilbert 変換器を設計し, その性能評価を行った.

## 2 解析信号と Hilbert 変換

$\mathcal{F}$  を Fourier 変換とすると, 実信号  $s(t)$  の周波数領域表現  $S(f)$  は  $S(f) = \mathcal{F}[s(t)]$  と表され,

$$s_a(t) = \mathcal{F}^{-1}[S(f) + \text{sgn}(f)S(f)] \quad (1)$$

を解析信号と呼ぶ. ただし,  $\text{sgn}(\cdot)$  は符号関数である. 解析信号は, 信号の位相を  $90^\circ$  ずらす線形変換である Hilbert 変換によって得ることができる. 信号  $s(t)$  を Hilbert 変換して得られる信号  $\hat{s}(t)$  は,

$$\hat{s}(t) = \mathcal{H}[s(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (2)$$

で表される. ただし,  $\mathcal{H}$  は Hilbert 変換を,  $\int f(x) dx$  は  $f(x)$  の主値積分を表す. 解析信号の実部信号と虚部信号の位相差は  $90^\circ$  であることが知られている. これより, 解析信号は  $\hat{s}(t)$  と虚数単位  $j$  を用いて

$$s_a(t) = s(t) + j\hat{s}(t) \quad (3)$$

と表すことができる.

## 3 IIR Hilbert 変換器の設計

サンプリング周波数を  $f_s$  [Hz], ナイキスト周波数を  $f_N$  [Hz] とすると, 理想的な離散 Hilbert 変換  $\mathcal{H}_1$  は, ゲイン  $G_1(f)$  [dB] が

$$G_1(f) = \begin{cases} 0 & (0 < f < f_N) \\ -\infty & (f_N < f < f_s) \end{cases} \quad (4)$$

で, インパルス応答  $h[n]$  が

$$h[n] = \begin{cases} 0 & (\text{for } n \text{ even}) \\ \frac{2}{\pi t} & (\text{for } n \text{ odd}) \end{cases} \quad (5)$$

で表される, 無限長のインパルス応答を持つ非因果的なフィルタである. そのため, 理想的な Hilbert 変換は有限タップ長では実装できない.

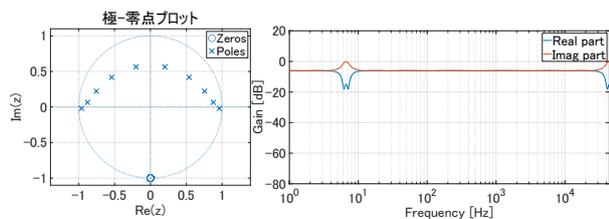
本稿では, リアルタイム処理の計算量を抑えることが求められる場面を想定して, 因果的で FIR フィルタよりもタップ長を抑えられる IIR フィルタで Hilbert 変換器を近似する. IIR フィルタの極零を複素平面上で回転させると, フィルタの周波数特性がシフトする [3]. このことを利用して, 遮断周波数が  $\pm 0.5f_N$  Hz のローパスフィルタの極零に対して  $j$  をかけることによって, 通過帯域が 0 Hz から  $f_N$  Hz, つまり Hilbert 変換器のような振幅特性を持つフィルタを設計する. なお, 複素数の極零を回転すると極零の共役関係が崩れるため, フィルタの係数は複素数となる. その影響で, フィルタ出力信号の実部と虚部が異なる位相を持つ. 設計したフィルタが Hilbert 変換器をうまく近似できているのであれば, 実部と虚部の位相差は解析信号と同じ  $90^\circ$  に近づく.

## 4 性能評価

本稿では, Chebyshev フィルタ (I 型と II 型), Bessel フィルタ, 楕円フィルタの 4 種類のハーフバンドローパスフィルタを使って Hilbert 変換器を設計してその性能を比較した. いずれのフィルタも 10 組の極零ペアで構成した. Chebyshev I 型フィルタと楕円フィルタの通過帯域のピーク間リップルは 0.1 dB とした. Chebyshev II 型フィルタと Bessel フィルタ, 楕円フィルタの遮断周波数での減衰量は 40 dB とした. 各種ハーフバンドローパスフィルタの極零を  $90^\circ$  回転させたフィルタ (提案フィルタと呼ぶ) の極零配置と, 提案フィルタの複素インパルス応答の実部虚部それぞれで計算した振幅特性を図-1 から図-4 に示す. また, 提案フィルタの複素インパルス応答から直接計算した振幅特性を図-5 に, 提案フィルタの出力信号の実部虚部の位相差を図-6 に示す.

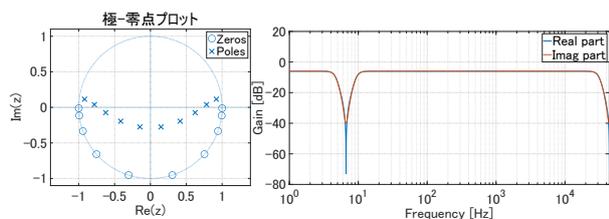
Chebyshev I 型フィルタから作った Hilbert 変換器は, Bessel フィルタや Chebyshev II 型フィルタから作ったものに比べて Hilbert 変換器の振幅特性をよく近似できていることが図-5 から分かる. しかし, およそ 1000 Hz 以下では, 今回製作した 4 つのフィルタの中で最も Hilbert 変換器と異なる位相特性を持つ. これらのことから, 1000 Hz 以上の信号に対し

\*Design and performance evaluation of a real-time Hilbert transformer. By Koki TAKATSU, Takuma TERUNUMA, Kohei YATABE (Tokyo University of Agriculture and Technology), Yuto IZUMI, Yu TAKAHASHI and Kazunobu KONDO (Yamaha Corporation).



(a) 90°回転した極零配置 (b) フィルタの実部虚部ごとの振幅特性

図-1 90°回転させた Chebyshev I 型ローパスフィルタの極零配置と、フィルタの複素インパルス応答の実部虚部それぞれから得た振幅特性



(a) 90°回転した極零配置 (b) フィルタの実部虚部ごとの振幅特性

図-2 90°回転させた Chebyshev II 型ローパスフィルタの極零配置と、フィルタの複素インパルス応答の実部虚部それぞれから得た振幅特性

て使用するのであれば、Hilbert 変換器として十分役割を果たすフィルタであると考えられる。

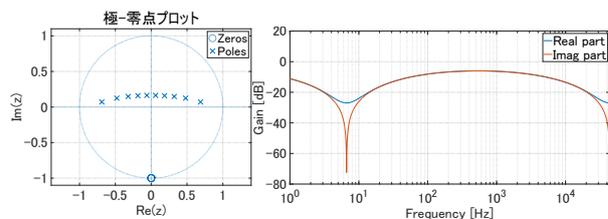
Chebyshev II 型フィルタを元とした Hilbert 変換器は、1000 Hz 以下で振幅を減衰させるハイパスフィルタのような振幅特性を持っている。また、周波数が上がるにつれて実部虚部の位相差が 90° に漸近し、およそ 100 Hz 以降で平坦である。Hilbert 変換器とは違う振る舞いを見せている帯域では振幅がカットされるため、通過する帯域の信号は Hilbert 変換器と同様の効果を受けられると考えられる。

Bessel フィルタを元とした Hilbert 変換器は全帯域に渡って平坦ではない振幅特性を持っている。しかし、位相差は 1000 Hz 以上で 90° で平坦となっているため、振幅特性を改善する補正フィルタを適用することで、Hilbert 変換器として活用することが期待できる。

楕円フィルタから作成した Hilbert 変換器は、Chebyshev I 型から作成したものと同様に全周波数帯域に渡ってゲインが 0 dB である。一方、実部虚部の位相差は 100 Hz 以上で 90° となった。これより、100 Hz 以上の信号に対して役割を果たすことができる IIR Hilbert 変換器であると言える。

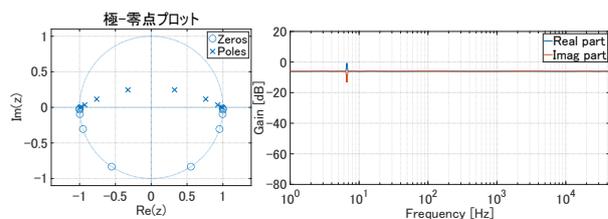
## 5 まとめ

本稿では、既存の 4 種類の IIR ハーフバンドフィルタの極零を回転して Hilbert 変換器を設計し、その性能を評価した。今後は、これらの Hilbert 変換器の性能を向上させる技術の検討を進める。



(a) 90°回転した極零配置 (b) フィルタの実部虚部ごとの振幅特性

図-3 90°回転させた Bessel ローパスフィルタの極零配置と、フィルタの複素インパルス応答の実部虚部それぞれから得た振幅特性



(a) 90°回転した極零配置 (b) フィルタの実部虚部ごとの振幅特性

図-4 90°回転させた楕円ローパスフィルタの極零配置と、フィルタの複素インパルス応答の実部虚部それぞれから得た振幅特性

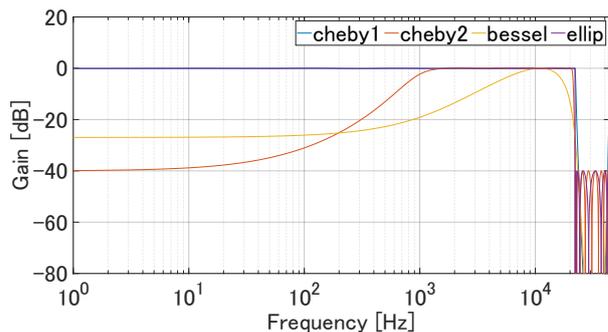


図-5 各種提案フィルタの複素インパルス応答から直接計算した振幅特性

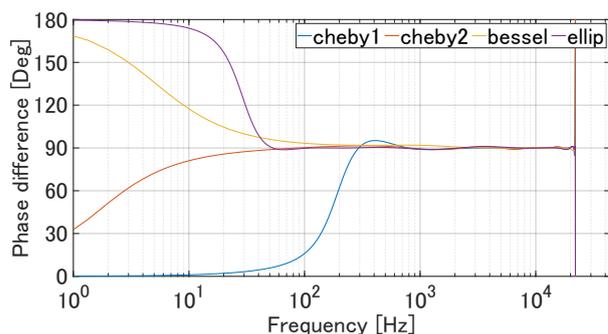


図-6 各種提案フィルタの複素出力信号の実部成分-虚部成分間の位相差

## 参考文献

- [1] A. Oppenheim and R. Schaffer, Discrete-time signal processing, Pearson Education India, 1999.
- [2] R. Ansari, "IIR discrete-time Hilbert transformers," IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process., vol. 35, no. 8, pp. 1116-1119, Aug. 1987.
- [3] H. W. Schussler and P. Steffen, "Halfband filters and Hilbert transformers," Circuits Syst. Signal Process., vol. 17, no. 2, pp. 137-164, Aug. 1998.