

## 時間周波数領域での厳密な畳み込みに関する変換行列の疑似逆\*

☆ 松山直哉, 山田宏樹, 矢田部浩平 (農工大)

## 1 はじめに

時間領域での畳み込みは、離散 Fourier 変換によって周波数領域での要素積になる。一方、時間周波数領域での要素積とは厳密に対応しない。なぜなら、短時間 Fourier 変換した信号は窓の影響で時間周波数領域で広がりを持つからである。しかし、多くの場合、時間周波数領域での畳み込みは要素積で近似され、その精度はインパルス応答が長いほど悪くなる。

そこで、我々はこれまでに時間周波数領域での厳密な畳み込みを提案した [1]。また、この計算に必要なインパルス応答の時間周波数表現を得るための、順変換行列とその随伴行列を定式化した [2]。これらを用いて逆変換を導出し、元のインパルス応答に再構成できれば、様々な信号処理に応用できると考えられる。そこで、本稿では逆変換にあたる疑似逆を導出し、元のインパルス応答を再構成できることを確認した。

## 2 時間周波数領域での厳密な畳み込み

本稿で用いる定数やインデックスを表-1 に示す。

信号  $x \in \mathbb{R}^L$  とインパルス応答  $h \in \mathbb{R}^L$  の時間領域での巡回畳み込みは、結果を  $d \in \mathbb{R}^L$  として

$$d[l] = \sum_{c=0}^{L-1} h[c] x[l-c] \quad (1)$$

と定義される。ただし、インデックスは  $x[(l-c) \bmod L]$  のように扱う [3]。時間周波数領域での畳み込みを表すため、式 (1) の  $d, x, h$  を時間周波数表現に変換する。まず、 $d$  の離散 Gabor 変換 (DGT) は、

$$\begin{aligned} D[m, n] &= \sum_{l=0}^{L-1} d[l] w[l-an] e^{-j2\pi m(l-an)/M} \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} \left( \sum_{c=0}^{L-1} h[c] x[l-c] \right) w[l-an] \\ &\quad \times e^{-j2\pi m(l-an)/M} \end{aligned} \quad (2)$$

と表せる。ただし、 $j = \sqrt{-1}$ 、 $w \in \mathbb{R}^L$  は信号長  $L$  になるようにゼロ埋めした窓関数とする。次に、式 (2) の  $x$  の時間周波数表現  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{M \times N}$  を得るため、 $w$  の標準双対窓を  $\gamma \in \mathbb{R}^L$  として、逆 DGT の定義式

$$x[l-c] = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{M-1} X[q, p] \gamma[l-c-ap] e^{j2\pi q(l-c-ap)/M} \quad (3)$$

表-1 本稿で用いる定数とインデックスの記号

$l, c$	時間領域の時間インデックス
$L$	時間領域の信号長
$n, p$	時間周波数領域の間引き済みの時間インデックス
$m, q$	時間周波数領域の間引き済みの周波数インデックス
$N$	$n$ および $p$ の総数
$M$	$m$ および $q$ の総数
$a$	時間の間引き量 (=窓のシフト幅, $a = L/N$ )

を用いる。ただし、時間インデックスのずれ  $l-c$  を時間周波数領域で表すため、 $m, n$  とは別にインデックス  $q, p$  を用いた。式 (3) を式 (2) に代入すると、

$$D[m, n] = \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{N-1} X[q, p] H_{3D}[m, n-p, q] \quad (4)$$

と表せる。この式が時間周波数領域での厳密な畳み込みである。ただし、 $\mathbf{H}_{3D} \in \mathbb{C}^{M \times N \times M}$  は  $h$  の時間周波数表現にあたるもので、

$$\begin{aligned} H_{3D}[m, p, q] &= \sum_{c=0}^{L-1} h[c] \sum_{l=0}^{L-1} w[l] e^{-j2\pi ml/M} \\ &\quad \times \gamma[l-c+ap] e^{j2\pi q(l-c+ap)/M} \end{aligned} \quad (5)$$

で与えられる。この式より、 $h$  が既知ならば窓  $w, \gamma$  を用いて、式 (4) の計算に必要な  $\mathbf{H}_{3D}$  に変換できる。以降、式 (5) による  $h$  の変換を順変換とする。

## 3 元のインパルス応答に戻す疑似逆の導出

$h$  が既知ならば、時間領域で畳み込みをすればよい。一方、未知な  $h$  に対し、時間周波数領域で  $\mathbf{H}_{3D}$  が得られた場合、 $\mathbf{H}_{3D}$  を時間領域に逆変換できれば、時間周波数領域での厳密な畳み込みの応用を考えられる。そこで、本稿では疑似逆を導出する。

## 3.1 疑似逆の導出

疑似逆の導出の見通しをよくするため、順変換を行列で表現する。そのために、3次元配列  $\mathbf{H}_{3D} \in \mathbb{C}^{M \times N \times M}$  を  $MNM$  次元ベクトル  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^{MNM}$  で表す。本稿では、 $\boldsymbol{\eta}$  に関して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} &= [\boldsymbol{\eta}_0^T, \boldsymbol{\eta}_1^T, \dots, \boldsymbol{\eta}_q^T, \dots, \boldsymbol{\eta}_{M-1}^T]^T \\ \boldsymbol{\eta}_q &= [\boldsymbol{\eta}_{0,q}^T, \boldsymbol{\eta}_{1,q}^T, \dots, \boldsymbol{\eta}_{p,q}^T, \dots, \boldsymbol{\eta}_{N-1,q}^T]^T \\ \boldsymbol{\eta}_{p,q} &= [H_{3D}[0, p, q], \dots, H_{3D}[M-1, p, q]]^T \end{aligned} \quad (6)$$

と定義する。すなわち、 $\boldsymbol{\eta}[m+pM+qNM] = H_{3D}[m, p, q]$  である。

\*Pseudo-inverse of the matrix related to convolution in the time-frequency domain. By Naoya MATSUYAMA, Koki YAMADA and Kohei YATABE (Tokyo University of Agriculture and Technology).

インパルス応答  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^L$  から  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^{MNM}$  への変換行列を  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{MNM \times L}$ , その随伴行列を  $\mathbf{A}^H \in \mathbb{C}^{L \times MNM}$  とする。これらを用いて、疑似逆  $\mathbf{A}^\dagger \in \mathbb{C}^{L \times MNM}$  を導出する。まず、順変換は

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{A}\mathbf{h} \quad (7)$$

のように表せる。ただし、 $\mathbf{A}$  の各成分は  $\phi_m[l] = w[l] e^{-j2\pi ml/M}$ ,  $\psi_q[l] = \gamma[l] e^{j2\pi ql/M}$  とすれば、

$$A[m + pM + qNM, c] = \sum_{l=0}^{L-1} \phi_m[l] \psi_q[l - c + ap] \quad (8)$$

のように表せる。次に、 $\mathbf{A}$  の随伴行列  $\mathbf{A}^H$  の各成分は

$$A^H[c, m + pM + qNM] = \sum_{l=0}^{L-1} \overline{\phi_m[l]} \psi_q[l - c + ap] \quad (9)$$

となる [2]。  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^H$  を用いれば、  $\boldsymbol{\eta}$  から  $\mathbf{h}$  への疑似逆  $\mathbf{A}^\dagger$  は以下のように表せる。

$$\mathbf{h} = \mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\eta} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \boldsymbol{\eta} \quad (10)$$

$\mathbf{A}^H \mathbf{A}$  が正則ならば、式 (10) は  $\|\boldsymbol{\eta} - \mathbf{A}\mathbf{h}\|_2$  を最小にする唯一解を返す。そこで、次節では  $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$  が正則であることを確認する。

### 3.2 $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ の正則性の確認

$\mathbf{A}^H \mathbf{A}$  の成分表示を得ることで、正則であることを示す。式 (8), (9) より、 $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$  の各成分は

$$\begin{aligned} A^H A[u, v] &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{M-1} A^H[u, m + pM + qNM] \\ &\quad \times A[m + pM + qNM, v] \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{L-1} (w[l])^2 \gamma[l - u + ap] \\ &\quad \times \gamma[l - v + ap] e^{j2\pi q(u-v)/M} \quad (11) \end{aligned}$$

と表せる。この式のインデックス  $q$  に関する部分  $\sum_{q=0}^{M-1} e^{j2\pi q(u-v)/M}$  は初項 1, 公比  $e^{j2\pi(u-v)/M}$  の等比数列とみなせる。そこで、まず非対角成分 ( $u \neq v$ ) を考えると、等比数列の和の公式より

$$\sum_{q=0}^{M-1} e^{j2\pi q} = \frac{1 - (e^{j2\pi(u-v)/M})^M}{1 - e^{j2\pi(u-v)/M}} = 0$$

が成り立つ。つまり、 $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$  は対角行列である。次に、 $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$  の対角成分 ( $u = v$ ) を考える。このとき、複素正弦波  $e^{j2\pi q(u-v)/M}$  の偏角はゼロになり、式 (11) は

$$A^H A[u, u] = M^2 \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{L-1} (w[l] \gamma[l - u + ap])^2 \quad (12)$$

となる。これは、 $w, \gamma$  の各要素の 2 乗の相互相関をとり、 $a$  個おきの要素の総和をとる計算にあたる。よって、相互相関をとった結果、要素の値が  $a$  周期でゼロでない限り、 $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$  の対角成分は非ゼロである。

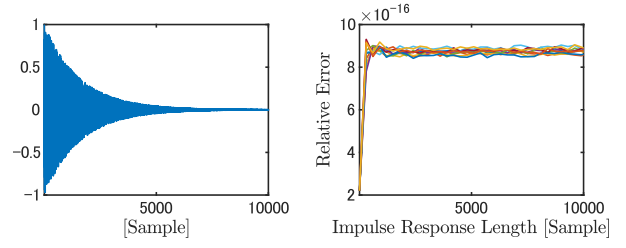


図-1 (左) 実験に用いたインパルス応答の一例。(右) インパルス応答の長さを変えて順変換、逆変換した際に生じた、変換前のインパルス応答に対する相対誤差。10 個のインパルス応答の各結果を重ねて示した。

以上のことから、窓  $w, \gamma$  とシフト幅  $a$  を適切に決めれば、 $|\mathbf{A}^H \mathbf{A}| \neq 0$  で  $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$  は正則である。また、 $(\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1}$  は  $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$  の対角成分の逆数で与えられる。さらに、式 (10) について、 $\mathbf{A}^H$  の効率的な計算法を提案しているため [2],  $\mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\eta}$  は容易に求められる。

## 4 疑似逆によるインパルス応答の再構成

インパルス応答  $\mathbf{h}$  に順変換行列  $\mathbf{A}$  をかけて得た  $\boldsymbol{\eta}$  は、疑似逆  $\mathbf{A}^\dagger$  をかけることで  $\mathbf{h}$  に再構成できる。これを確認するため、 $\mathbf{h}$  を順変換し、逆変換した結果を  $\mathbf{h}$  に対する相対誤差で評価した。本実験ではまず、インパルス応答を  $\mathbf{h} = \mathbf{r} \odot \exp(-10t)$  として 10 個生成した。ただし、 $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^L$  は各要素が  $-1$  から  $1$  の範囲の一様乱数に従う  $L$  次元ベクトル、 $\mathbf{t} = [0, 1, \dots, L-1]^T \in \mathbb{R}^L$  である。次に、 $k = 1, 2, \dots, L$  として、各インパルス応答の始めから  $k$  サンプルを抜き取り、再構成した際の相対誤差をとった。その他の条件について、 $L = 10000$ , 窓は 512 サンプルの Hann 窓とその標準双対窓、窓のシフト幅は 32 サンプルとした。

結果を図-1 に示す。図から、すべてのインパルス応答で同等の誤差を示したことが分かる。また、最大の相対誤差は  $9.3040 \times 10^{-16}$  であった。これは計算機イプシロンと同程度であり、元のインパルス応答を再構成できたと言える。

## 5 むすび

本稿では、時間周波数領域での厳密な畳み込みに関する変換行列の疑似逆を導出し、元のインパルス応答を再構成することを確認した。今後は時間周波数領域での厳密な畳み込みを応用し、その性質を調べる。

### 参考文献

- [1] 松山直哉, 山田宏樹, 矢田部浩平, “時間領域の畳み込みを厳密に再現する時間周波数領域の計算法,” 音講論集, pp. 165–166 (2023.9).
- [2] 松山直哉, 山田宏樹, 矢田部浩平, “時間周波数領域での厳密な畳み込みを用いる変換行列の転置の導出と実装,” 音講論集, pp. 203–204 (2024.3).
- [3] 矢田部浩平, “第三回: 短時間フーリエ変換,” 音響学会誌, 77(6), 396–403 (2021).