時間周波数領域での厳密な畳み込みに用いる変換行列の転置の導出と実装 *

☆ 松山直哉, 山田宏樹, 矢田部浩平 (農工大)

1 はじめに

時間領域での畳み込みを離散 Fourier 変換した結果は, 周波数領域で要素積になる．一方, 短時間 Fourier 変換した信号は窓をかける影響で時間周波数領域で広がりを持つ．そのため，時間領域の畳み込みが時間周波数領域において要素積ではなくなる．しかし，多くの場合畳み込みは要素積で近似され，インパルス応答長が窓長に対して長くなるほど精度が悪くなる．

それに対し，我々はこれまで，時間周波数領域での畳み込みに厳密に等価な計算方法を提案した [1]．この計算では，時間領域のインパルス応答を時間周波数領域でのインパルス応答にあたる表現に変換する．しかし，この表現から元の時間領域のインパルス応答に変換するような逆変換は定式化できていない．そこで本稿では，逆変換に必要な随伴作用素を導出し，その効率的な計算アルゴリズムを提案する．

2 時間周波数領域での厳密な畳み込み

本稿で用いる定数やインデックスは表–1 に示す．信号 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^L$ とインパルス応答 $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^L$ の時間領域での巡回畳み込みは, 結果を $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^L$ として,

$$d[l] = \sum_{c=0}^{L-1} h[c]\, x[l-c] \tag{1}$$

のように定義できる．ただし，インデックスは, $x[(l-c) \bmod L]$ のように扱う [2]．時間周波数領域での畳み込みを表すため，式 (1) の $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}$ をそれぞれ変換する．$\boldsymbol{d}$ の離散 Gabor 変換 (DGT) は,

$$\begin{aligned} D[m,n] &= \sum_{l=0}^{L-1} d[l]\, w[l-an]\, e^{-j2\pi m(l-an)/M} \\ &= \sum_{l=0}^{L-1} \left(\sum_{c=0}^{L-1} h[c]\, x[l-c] \right) w[l-an] \\ &\quad \times e^{-j2\pi m(l-an)/M} \end{aligned} \tag{2}$$

のように表せる．ただし，$j = \sqrt{-1}$，$\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^L$ は窓関数で，窓長 M が信号長 L になるようにゼロ埋めしたものである．右辺の $\boldsymbol{x}$ を時間周波数表現 $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ に変換するため，逆離散 Gabor 変換の定義式

$$x[l-c] = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{M-1} X[q,p]\, \gamma[l-c-ap]\, e^{j2\pi q(l-c-ap)/M} \tag{3}$$

表–1　本稿で用いる定数とインデックスの記号

l, c	時間領域の時間インデックス
L	時間領域の信号長
n, p	時間周波数領域の間引き済みの時間インデックス
m, q	時間周波数領域の間引き済みの周波数インデックス
N	n および p の総数
M	m および q の総数 (=窓長)
a	時間の間引き量 (=窓のシフト幅, $N = L/a$)
b	周波数の間引き量 ($M = L/b$)

を代入する. ただし，$\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^L$ は $\boldsymbol{w}$ の双対窓である．また，時間インデックスのずれ $l-c$ を時間周波数領域で表すため, m, n とは別にインデックス q, p を用いた．式 (3) を式 (2) に代入すると,

$$D[m,n] = \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{N-1} X[q,p]\, H_{\mathrm{3D}}[m, n-p, q] \tag{4}$$

と表せる．ただし, $\mathbf{H}_{\mathrm{3D}} \in \mathbb{C}^{M \times N \times M}$ は時間領域のインパルス応答 $\boldsymbol{h}$ の時間周波数表現にあたるもので,

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{3D}}[m,p,q] &= \sum_{c=0}^{L-1} h[c] \sum_{l=0}^{L-1} w[l]\, e^{-j2\pi ml/M} \\ &\quad \times \gamma[l-c+ap]\, e^{j2\pi q(l-c+ap)/M} \end{aligned} \tag{5}$$

のように与えられる．式 (5) より, $\boldsymbol{h}$ が既知であれば, 2 つの窓 $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\gamma}$ を用いて, 時間周波数領域での厳密な畳み込みに用いる表現 $\mathbf{H}_{\mathrm{3D}}$ に変換できる．この変換を作用素 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^L \to \mathbb{C}^{M \times N \times M}$ で表す．次章では，$\mathcal{A}$ の逆変換に必要な $\mathcal{A}$ の随伴作用素 $\mathcal{A}^* : \mathbb{C}^{M \times N \times M} \to \mathbb{R}^L$ について考える．なお，作用素の随伴とは，行列の複素共役転置に対応するものである．

3 $\mathcal{A}^*$ の導出と実装

時間周波数領域上での厳密な畳み込みを応用していく上では，インパルス応答 $\boldsymbol{h}$ を時間領域と時間周波数領域の双方向に変換できる必要がある．そこで本稿では，$\mathcal{A}$ の随伴作用素 $\mathcal{A}^*$ を導出し，効率的な計算アルゴリズムを提案する．

3.1 $\mathcal{A}^*$ の導出

インパルス応答 $\boldsymbol{h}$ の $\mathcal{A}$ による変換を行列で表現し，その随伴行列を用いて $\mathcal{A}^*$ を導出する．まず，3 次元配列の $\mathbf{H}_{\mathrm{3D}}$ を MNM 次元のベクトル $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{MNM}$

* Derivation and implementation of the transpose of the matrix used for rigorous computation of convolution in the time-frequency domain. By Naoya MATSUYAMA, Koki YAMADA and Kohei YATABE (Tokyo University of Agriculture and Technology).

で表現する．ただし，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y} &= [\boldsymbol{y}_0^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{y}_q^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{y}_{M-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \\
\boldsymbol{y}_q &= [\boldsymbol{y}_{0,q}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y}_{1,q}^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{y}_{p,q}^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{y}_{N-1,q}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \\
\boldsymbol{y}_{p,q} &= [H_{\mathrm{3D}}[0,p,q], \ldots, H_{\mathrm{3D}}[M-1,p,q]]^{\mathrm{T}} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

とする．すなわち, $y[m+pM+qNM] = H_{3D}[m,p,q]$ である．すると，$\mathcal{A}$ による変換は行列で

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{h} \qquad (7)$$

のように表せる．ただし，$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{MNM \times L}$ は $\boldsymbol{h}$ から $\boldsymbol{y}$ への変換行列であり，$\phi_m[l] = w[l]e^{-j2\pi ml/M}$, $\psi_q[l] = \gamma[l]e^{j2\pi ql/M}$ とすれば，$\mathbf{A}$ の $[i,j]$ 成分は,

$$A[m+pM+qNM, c] = \sum_{l=0}^{L-1} \phi_m[l]\, \psi_q[l-c+ap] \quad (8)$$

のように表せる．$\mathbf{A}$ の随伴行列 $\mathbf{A}^{\mathrm{H}} \in \mathbb{C}^{L \times MNM}$ は,

$$A^{\mathrm{H}}[c,\; m+pM+qNM] = \sum_{l=0}^{L-1} \overline{\phi_m[l]}\, \overline{\psi_q[l-c+ap]} \qquad (9)$$

である．$\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ を $\boldsymbol{y}$ にかけて得られる時間信号 $\boldsymbol{h}' \in \mathbb{R}^L$ は以下のように表せる．

$$
\begin{aligned}
h'[c] &= \sum_{q=0}^{M-1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{N-1} H_{\mathrm{3D}}[m,p,q] \\
&\quad \times \sum_{l=0}^{L-1} \overline{\phi_m[l]}\, \overline{\psi_q[l-c+ap]} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

次節では，式 (10) の変換 $\mathcal{A}^*$ を効率良く計算するアルゴリズムを考える．

3.2 高速 Fourier 変換を用いた $\mathcal{A}^*$ の実装方法

$\mathcal{A}^*$ の効率の良い計算を考えるとき，高速 Fourier 変換 (FFT) を用いることが考えられる．FFT をして要素積をとる演算は，FFT 点数が増えるほど巡回畳み込みよりも計算時間と数値精度の両方で有利となるからである [5]．そこで，式 (10) において FFT に置き換えられる部分を探す．まず，インデックス l に着目すると，これは FFT を用いた計算ができる相互相関関数の形式でかける．ただし，$\overline{\psi_q}, \overline{\phi_m}$ の相互相関関数は式 (11) で定義される．

$$(\psi_q \star \overline{\phi_m})[c] = \sum_{l=0}^{L-1} \overline{\psi_q[l-c]}\, \overline{\phi_m[l]} \qquad (11)$$

また，このとき $(\psi_q \star \overline{\phi_m})[c] = (\overline{\psi_q[-c]} * \overline{\phi_m[c]})[c]$ のように畳み込みで表せるため，FFT による計算で置き換えることができる [4]．次に，式 (10) のインデックス p に着目する．窓 $\boldsymbol{\gamma}$ を複素正弦波で変調した $\overline{\psi_q}[l+c-ap]$ は，バンドパスフィルタとしてみることができる．これは，$H_{\mathrm{3D}}[m,p,q]$ を時間方向に a でアップサンプリングしたものと各周波数ビンでの巡回畳み込みで表せる [3]．

Algorithm 1 $\mathcal{A}^*$ の効率的なアルゴリズム

```
Input: w, γ ∈ ℝ^L, H_3D ∈ ℂ^{M×N×M}
Output: h' ∈ ℝ^L
H_3D = upsample(H_3D, a) ∈ ℂ^{M×L×M}
F_{H_3D} = fft(H_3D)
F_w = fft(circshift(w, −M/2))
F_γ = fft(circshift(γ, −M/2))
W = S(F_w) ∈ ℂ^{M×L}
Γ = S(F_γ) ∈ ℂ^{M×L}
for q = 0, ..., M − 1 do
    for m = 0, ..., M − 1 do
        h' = h' + ifft(F_{H_3D}[m, :, q] ⊙ W[m, :] ⊙ Γ[q, :])
    end for
end for
```

以上から得られる，FFT を用いた $\mathcal{A}^*$ の効率的な計算アルゴリズムを Algorithm 1 に示す．ただし，upsample$(\,\cdot\,, a)$ は配列の 2 次元目の要素間を a でゼロ埋めする操作，circshift$(\,\cdot\,, -M/2)$ は窓 $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\gamma}$ を窓のピークが配列の始めになるように巡回シフトさせる操作，[:] は配列のその次元の要素からなるベクトル, $\odot$ は要素積を表す．$\mathcal{S} : \mathbb{C}^L \to \mathbb{C}^{M \times L}$ は窓の周波数スペクトル $\boldsymbol{F_w}$, $\boldsymbol{F_\gamma} \in \mathbb{C}^L$ を周波数シフトする作用素で，以下のように定義できる．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{W} &= \mathcal{S}(\boldsymbol{F_w}) \in \mathbb{C}^{M \times L} \\
&= [\mathcal{S}_b^0(\boldsymbol{F_w}), \mathcal{S}_b^1(\boldsymbol{F_w}), \ldots, \mathcal{S}_b^{M-1}(\boldsymbol{F_w})] \qquad (12)
\end{aligned}
$$

ただし, $\mathcal{S}_b^m$ は $b\,m$ だけインデックスを巡回シフトさせる作用素である．Fourier 変換の性質から, 時間領域での複素正弦波による変調は FFT 領域でのインデックスのシフトに等しい．$\mathcal{S}$ による操作により，複素正弦波の直接計算が避けられる．

4 むすび

本稿では, 時間周波数領域での厳密な畳み込みに用いる変換の随伴作用素を導出し，その効率的な計算アルゴリズムの提案を行った．今後は, 逆変換を表す疑似逆行列における $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$ の正則性の確認や, 音響信号処理への適用について考える．

参考文献

[1] 松山直哉, 山田宏樹, 矢田部浩平, “時間領域の畳み込みを厳密に再現する時間周波数領域の計算法,” 音講論集, pp. 165–166 (2023.9).

[2] 矢田部浩平, “第三回：短時間フーリエ変換,” 音響学会誌, **77**, 396–403 (2021).

[3] 矢田部浩平, “第四回：信号の再構成と窓, ” 音響学会誌, **77**, 463–470 (2021).

[4] R. N. Bracewell, “The Fourier transform and its applications,” New York: McGraw-Hill, 46–47 (1978).

[5] P. Duhamel and M. Vetterli, “Fast Fourier transforms: A tutorial review and a state of the art,” Signal Process., **19**, 259–299 (1990).