

ドラムの境界条件を考慮した位相の凸最適化による振動計測*

◎ 古平真理子, 赤石夏輝, 矢田部浩平 (農工大)

1 はじめに

Fourier Transform Profilometry (FTP) [1] を高速度カメラと組み合わせた振動計測の研究が行われている [2]. FTP では、投影した縞の変形度合いを位置ごとの局所的な周波数の変化で捉え、この周波数変化の推定結果から物体の高さを計算する。しかし、物体の影など縞を投影できない部分が存在すると推定結果に誤りが生じる可能性がある。そこで、我々は前回、FTP を最適化問題として再定式化し、縞を投影できない部分を 0 とする重みにより計測対象の領域を自由に選択可能な手法として一般化した [3]. この重みを計測対象に合わせて設計することで、周波数変化の推定精度を向上させた。しかし、この手法をドラムの振動計測に適用したところ、縁での変位推定に誤差が残ることが確認された。本稿では、ドラムの境界条件を前回手法に組み込み、物理的に整合性の高い変位推定を実現する手法を提案する。

2 最適化に基づく FTP [3]

FTP は、物体の凹凸に応じた縞の歪みから高さを推定する手法である。縞の歪みは周波数変調として捉えられ、この変調は観測画像に複素フィルタを適用して得られる複素画像の位相成分に現れる。古典的 FTP では、画像全体に対して一様に複素フィルタを適用するため、観測画像中に縞の情報がない部分 (未観測領域) がある場合、その影響を受けて位相の推定精度が低下するおそれがある。

そこで、我々は複素画像を最適化問題の解として解釈し、計測対象の領域を柔軟に設定できるように FTP を一般化した。この一般化された FTP は

$$\min_{\mathbf{X}} \frac{1}{2} \|\mathbf{W} \odot (\Re(\mathbf{X}) - \mathbf{B})\|_F^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{H} \odot \mathcal{F}(\mathbf{X})\|_F^2 \quad (1)$$

と定式化できる [3]. ただし、 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{V \times H}$ は観測画像、 $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{V \times H}$ は推定される複素画像であり、 V, H は画像の縦方向と横方向の画素数である。また、 $\|\cdot\|_F$ はフロベニウスノルム、 $\odot$ は要素積、 $\Re: \mathbb{C}^{V \times H} \rightarrow \mathbb{R}^{V \times H}$ は要素ごとに実部をとる作用素、 $\lambda > 0$ は正則化パラメータである。 $\mathcal{F}: \mathbb{C}^{V \times H} \rightarrow \mathbb{C}^{V \times H}$ は 2 次元 Fourier 変換作用素で、 $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{V \times H}$ は周波数領域で縞の基本周波数付近を取り出すマスクである。 $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{V \times H}$ は未観測領域と計測対象領域を区別する重みである。

この手法は、古典的 FTP と比較して位相推定精度を大幅に改善した。しかし、ドラムの振動計測への適用では、本来変位が 0 である縁の部分に誤差が残った [3]. ドラムの既知の特徴である境界条件を考慮できれば、この誤差をさらに改善できると期待される。

3 提案手法

前回手法は、定式化を変更することで計測対象の既知の特徴を組み込めるような拡張性を有している。そこで、本稿では、ドラムを対象として、その境界条件を最適化問題に組み込み、前回手法 [3] を拡張する。具体的には、ドラムのヘッド (膜) の縁は固定端であるため、縁での変位は 0 であるという境界条件を正則化項として最適化問題に導入する。これにより、縁の部分での位相推定精度の向上と、それによる誤差の低減が期待できる。

ドラムの縁での変位が 0 である場合、縁で推定される位相変化は 0 になる。よって、縁での位相変化を 0 に近づけるような正則化項を入れればよい。複素画像 $\mathbf{X}$ は、虚数単位を i とし、縞に起因する位相 $\Theta \in \mathbb{R}^{V \times H}$ と物体の凹凸による位相変化 $\Phi \in \mathbb{R}^{V \times H}$ を用いて $\mathbf{X} = \exp(i(\Theta + \Phi))$ と表される。ただし、 $\exp(\cdot)$ は要素ごとの指数関数である。計測には固定の縞を用いるため、縞に起因する位相成分は定数行列 $\mathbf{P} = \exp(i\Theta) \in \mathbb{C}^{V \times H}$ と表せる。位相変化の複素表現を $\mathbf{Z} = \exp(i\Phi) \in \mathbb{C}^{V \times H}$ とすることで、複素画像は $\mathbf{X}$ を変数として $\mathbf{X} = \mathbf{P} \odot \mathbf{Z}$ と表すことができる。これにより、式 (1) は $\mathbf{Z}$ を最適化変数として再定式化でき、ドラムの境界条件を反映した正則化項を組み込むことが可能になる。

ドラムの境界条件を考慮した最適化問題は

$$\min_{\mathbf{Z}} \frac{1}{2} \|\mathbf{W} \odot (\Re(\mathbf{P} \odot \mathbf{Z}) - \mathbf{B})\|_F^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{M} \odot \mathcal{F}(\mathbf{Z})\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \|\mathbf{C} \odot \Im(\mathbf{Z})\|_F^2 \quad (2)$$

と定式化できる。ただし、 $\Im: \mathbb{C}^{V \times H} \rightarrow \mathbb{R}^{V \times H}$ は要素ごとに虚部をとる作用素、 $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{V \times H}$ はドラムの縁の領域を抽出するマスクであり、各要素はドラムの縁の領域のインデックス集合を $\partial\Omega$ として、 $C[m, n] = 1$ ($(m, n) \in \partial\Omega$); 0 (otherwise) と定める。 $\mu > 0$ は正則化パラメータである。 $\mathbf{M}$ は周波数領域での中心付近を取り出すマスクに対応する。第一項は観測画像との整合性を保つためのフィデリティ

*Vibration measurement via convex optimization of phase considering boundary condition of drums. By Mariko KODAIRA, Natsuki AKAISHI and Kohei YATABE (Tokyo University of Agriculture and Technology).

Algorithm 1 Proposed Algorithm

Input: $\mathbf{Q}^{[0]}, \mathbf{V}^{[0]}, \mathbf{U}_1^{[0]}, \mathbf{U}_2^{[0]}, \mathbf{U}_3^{[0]}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{M}, \lambda, \rho, \mu$

Output: $\mathbf{Q}^{[K]}$

```

1: for  $k = 0, 1, \dots, K-1$  do
2:    $\mathbf{Z}^{[k+1]} = \mathbf{G}(\mathbf{P} \odot \mathbf{W} \odot \mathbf{B} + \rho(\mathbf{Q}^{[k]} + \mathbf{V}^{[k]}) - \mathbf{U}_1^{[k]} - \mathbf{U}_3^{[k]})$ 
3:    $\tilde{\mathbf{V}}^{[k+1]} = (i\rho\mathbf{C} \odot \mathfrak{Im}(\mathbf{V}^{[k]}) - \mathbf{U}_2^{[k]})/(\rho + \mu)$ 
4:    $\mathbf{Q}^{[k+1]} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\rho\mathbf{Z}^{[k+1]} + \mathbf{U}_1^{[k]}) \odot (\lambda\mathbf{M}^2 + \rho))$ 
5:    $\mathbf{S} = \mathbf{Z}^{[k+1]} + \mathbf{U}_3^{[k]}/\rho + i\mathfrak{Im}(\mathbf{C} \odot (\tilde{\mathbf{V}}^{[k+1]} + \mathbf{U}_2^{[k]}/\rho))$ 
6:    $\mathbf{V}^{[k+1]} = \Re(\mathbf{S}) + i(1 - \mathbf{C}/2) \odot \mathfrak{Im}(\mathbf{S})$ 
7:    $\mathbf{U}_1^{[k+1]} = \mathbf{U}_1^{[k]} + \rho(\mathbf{Z}^{[k+1]} - \mathbf{Q}^{[k+1]})$ 
8:    $\mathbf{U}_2^{[k+1]} = \mathbf{U}_2^{[k]} + \rho(\tilde{\mathbf{V}}^{[k+1]} - i\mathbf{C} \odot \mathfrak{Im}(\mathbf{V}^{[k+1]}))$ 
9:    $\mathbf{U}_3^{[k+1]} = \mathbf{U}_3^{[k]} + \rho(\mathbf{Z}^{[k+1]} - \mathbf{V}^{[k+1]})$ 
10: end for

```

項, 第二項は周波数領域で不要な成分を抑制する正則化項, 第三項がドラムの境界条件を考慮する正則化項である. 第三項では, 縁での位相変化が 0 であることを $\exp(i\Phi)$ の虚部が 0 であることとして表現している. この最適化問題に変数分離を行い, ADMM を適用可能な形に変形すると

$$\min_{\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \tilde{\mathbf{V}}, \mathbf{V}} \frac{1}{2} \|\mathbf{W} \odot (\Re(\mathbf{P} \odot \mathbf{Z}) - \mathbf{B})\|_F^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{M} \odot \mathcal{F}(\mathbf{Q})\|_F^2 + \frac{\mu}{2} \|\tilde{\mathbf{V}}\|_F^2 \quad (3)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{Z} = \mathbf{Q}, \quad \tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{C} \odot \mathfrak{Im}(\mathbf{V}), \quad \mathbf{Z} = \mathbf{V}$$

となる. 式 (3) に ADMM を適用すると **Alg. 1** が得られる. ただし $\mathcal{F}^{-1} : \mathbb{C}^{V \times H} \rightarrow \mathbb{C}^{V \times H}$ は 2 次元逆 Fourier 変換, $(\cdot)^2$ は要素ごとの 2 乗, $\mathbf{G} : \mathbb{C}^{V \times H} \rightarrow \mathbb{C}^{V \times H}$ は $\mathbf{G}(\cdot) = (i\bar{\mathbf{P}} \odot \mathfrak{Im}(\mathbf{W} \odot \mathbf{P} \odot \cdot) + 2\rho) \odot (2\rho\mathbf{W} \odot |\mathbf{P}|^2 + 4\rho^2)$ と定める作用素である. このとき, $\rho > 0$, $(\cdot)$ は $(\cdot)$ の複素共役, $\odot$ は要素ごとの除算, $|\cdot|$ は要素ごとの絶対値である.

4 実験

未観測領域を含み, ドラムを撮影した画像を模擬した観測画像に対して, 古典的 FTP [1], 前回手法 [3], 提案手法を適用し, 位相推定精度を評価するシミュレーションを行った. 画像サイズは 512×512 px とし, 画像中心から半径 200 px の円形領域をドラム表面と仮定し, その外側の画素値を 0 とした. ドラム表面の変位分布は (1,1) 振動モードを模擬した. 観測画像は, 基本周波数 $f_0 = 0.25\pi$ rad/px の縞にドラム表面の変位分布に対応する位相変化を加えたものを用いた. この観測画像に対して位相変化を求め, 真の位相変化との誤差を比較する. 前回手法の式 (1) におけるパラメータは $\lambda = 0.01$, $\rho = 1$ に設定した. 提案手法の式 (2) におけるパラメータは $\lambda = 15$, $\mu = 5$, $\rho = 5$ とし, いずれの手法も反復回数は 300 回とした. 位相変化の誤差の評価には二乗平均平方根誤差 (RMSE) を用いた.

実験結果を図-1 に示す. RMSE は古典的 FTP で 5.9×10^{-1} rad, 前回手法で 1.8×10^{-2} rad, 提案手

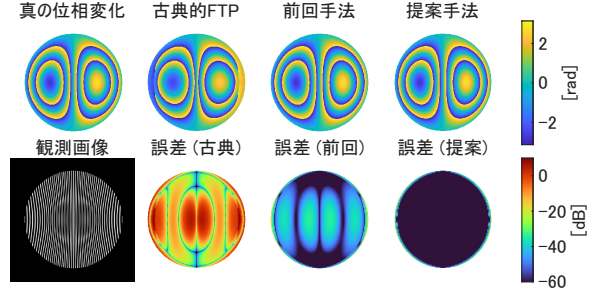


図-1 シミュレーションでの実験結果. 下段左は観測画像である. 上段は位相変化成分のラップ位相であり, 下段の左端を除く 3 つは各手法で得られた位相変化と真の位相変化との誤差を対数表示したものである. 観測画像を除き, 計測対象の領域のみを表示している.

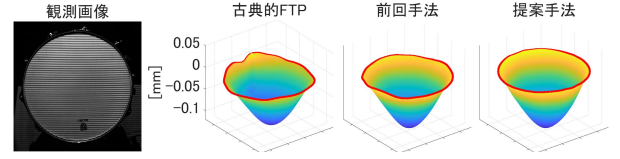


図-2 観測画像と, この観測画像より再構成したスネアドラム膜面の変位. 変位の計算は [1] に倣った. 左から, 古典的 FTP, 前回手法, 提案手法での再構成結果であり, ドラムの縁の部分を示している.

法で 5.6×10^{-3} rad となり, 提案手法は高精度な位相推定を達成した. 境界条件を考慮したことで, 計測対象領域全体の位相推定精度が向上した. また, 提案手法は前回手法よりも縁での誤差を抑制でき, 境界条件を考慮した定式化の有効性が確認された.

次に, スネアドラムの振動の可視化を行った. カメラとプロジェクタ間の距離を 604 mm, スネアドラムとカメラ間の距離を 865 mm とした. 投影された縞の基本周波数は $f_0 = 2.09$ rad/mm であった. 前回手法の式 (1) のパラメータは $\lambda = 0.03$, $\rho = 1$ に設定した. 提案手法の式 (2) におけるパラメータは $\lambda = 0.005$, $\mu = 0.5$, $\rho = 0.1$ とし, いずれの手法も反復回数は 100 回とした. 実験結果を図-2 に示す. 提案手法では, 他の手法に比べて縁の変位が 0 に近く, 実際の振動に即した結果が得られた.

5 むすび

本稿では, ドラムの境界条件を最適化問題に組み込んだ位相推定手法を提案した. 提案手法は特にドラムの縁における誤差を低減し, 物理的に整合性の高い位相推定を実現した. 今後は, 固有の境界条件を持つ他の楽器の振動計測への応用を検討する.

参考文献

- [1] X. Su and W. Chen, "Fourier transform profilometry: A review", *Opt. Lasers Eng.*, **35**, 263–384 (2001).
- [2] Q. Zhang and X. Su, "High-speed optical measurement for the drumhead vibration" *Opt. Express*, **13**, 3110–3116 (2005).
- [3] 古平真理子, 赤石夏輝, 矢田部浩平, "構造化照明を用いた振動計測のための位相の凸最適化," 音講論集, pp.181–182 (2025.9).