木構造の階層的スパース性に基づく独立ベクトル分析 *

☆ 岸本麗央 (農工大), 松本和樹 (早大), 山田宏樹, 矢田部浩平 (農工大)

1　はじめに

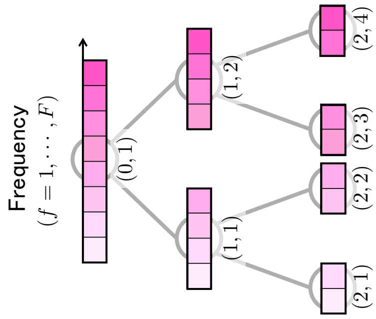
優決定ブラインド音源分離（BSS）は，時間周波数領域の音源に対して音源モデルを仮定することで，分離行列を推定する最適化問題として定式化できる．例えば，独立ベクトル分析（IVA）は全周波数を 1 つのグループにまとめることで周波数成分の共起をモデル化する [1]．IVA は音声に対して非常に有効であることが知られているが，周波数帯域ごとに異なる構造を持つ信号とはミスマッチがある．IVA の音源モデルを緻密化し，周波数帯域ごとの構造を考慮できるようにすることで，分離性能を改善できることが知られている [2, 3]．本稿では，木構造を持つように周波数インデックスをグループ分けし，階層的なスパース性を表現した音源モデルを提案する．提案する音源モデルは広い帯域にまたがる構造と狭い帯域のみに現れる構造の両方を考慮することで IVA の緻密化を図る．また，我々は木構造 IVA に対し補助関数法と交互方向乗数法（ADMM）に基づく二つのアルゴリズムを導出した．実験の結果，木構造の導入は IVA の分離性能を向上させることが確認された．

2　優決定 BSS

優決定 BSS は, 分離行列 $\mathbf{W}_f = [\mathbf{w}_{1,f}, \cdots, \mathbf{w}_{N,f}]^{\mathsf{H}} \in \mathbb{C}^{N\times M}$ の推定問題として定式化される．ここで, N は音源数，M $(N \leq M)$ はマイクロホン数である．分離行列 $\mathbf{W}_f$ が推定できれば，時間周波数領域における観測信号 $\mathbf{x}_{t,f} = [x_{1,t,f}, \cdots, x_{M,t,f}]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{C}^M$ から分離信号 $\mathbf{y}_{t,f} = [y_{1,t,f}, \cdots, y_{N,t,f}]^{\mathsf{T}} \in \mathbb{C}^N$ を時間周波数ビンごとの線形演算 $\mathbf{y}_{t,f} = \mathbf{W}_f \mathbf{x}_{t,f}$ によって得られる．ただし，$t = 1, \cdots, T$ は時間フレーム，$f = 1, \cdots, F$ は周波数ビンを示すインデックスである．本稿では, $\mathbf{W}\mathbf{x} = (\mathbf{W}_f \mathbf{x}_{t,f})_{t=1,f=1}^{T,F}$ のように添字を省略することで全成分をまとめて表す．分離行列は最適化問題

$$\underset{\mathbf{W}}{\mathrm{Minimize}} \;\; \mathcal{P}(\mathbf{W}\mathbf{x}) - \sum_{f=1}^{F} \log(|\det(\mathbf{W}_f)|) \qquad (1)$$

の解として得られる．ここで, $\mathcal{P} : \mathbb{C}^{NTF} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は音源モデルに対応するペナルティ関数である．代表的な音源モデルとして, スパース性を考慮した Laplace ICA や周波数成分の共起性を考慮する Laplace IVA がある．IVA はパーミュテーション問題を解決できる点で有用だが, スペクトルの持つ細かな構造を考慮することはできない．そのため，IVA の音源モデルを緻密化することで分離性能の向上が期待される．



図–1　木構造 IVA における周波数インデックスのグループ分け．各頂点 (d, l) が一つのグループを表す．

3　提案法：木構造 IVA

音響信号には周波数帯域ごとに異なる構造を有するものがある．例えば音声の場合，歯擦音は高域側に，調波音は低域側に集中するが，それらの生じるタイミングは異なる．このような特徴は，全周波数を一つのグループにまとめる IVA では表現できない．そこで本稿では，木構造を有する周波数インデックスのグループ分けを導入し，階層的な共起性を表現することで IVA の緻密化を図る．提案法（木構造 IVA）では，木の根が全周波数をまとめたグループを考慮し，その子の頂点が階層的に周波数インデックスをグループ分けすることで，広い帯域にまたがる構造と，狭い帯域のみに現れる構造の両方をモデル化できる．また本稿では，木構造 IVA に対する最適化アルゴリズムとして補助関数法と ADMM の二つのアルゴリズムを導出する．

3.1　木構造 IVA の音源モデル

まず，木の各頂点に周波数インデックスの集合を定義する．図–1 に示すように，深さ d $(0 \leq d \leq H)$ における l $(1 \leq l \leq L_d)$ 個目の頂点を (d, l)，(d, l) に属する周波数インデックスの集合を $\mathcal{F}^{(d,l)} \subseteq \{1, \cdots F\}$ と書く．ただし，$H \geq 0$ は木の高さであり，L_d $(1 = L_0 \leq \cdots \leq L_H)$ は深さごとの頂点数である．ここで，集合族 $\{\mathcal{F}^{(d,l)}\}_{l=1}^{L_d}$ はすべての d で周波数インデックス全体を被覆する，すなわち，

$$\bigcup_{l=1}^{L_d} \mathcal{F}^{(d,l)} = \{1, \cdots, F\} \qquad (2)$$

* Independent vector analysis based on hierarchical sparsity of tree structure. By Reo KISHIMOTO (Tokyo University of Agriculture and Technology), Kazuki MATSUMOTO (Waseda University), Koki YAMADA and Kohei YATABE (Tokyo University of Agriculture and Technology).

を満たすものとする．また木構造を持つよう，任意の d，d' $(d \geq d')$ 及び l，l' $(1 \leq l \leq L_d$，$1 \leq l' \leq L_{d'})$ について，

$$\mathcal{F}^{(d,l)} \cap \mathcal{F}^{(d',l')} \neq \emptyset \implies \mathcal{F}^{(d,l)} \subseteq \mathcal{F}^{(d',l')} \tag{3}$$

が成り立つものとする．

次に，提案法のペナルティ関数を定義する．頂点 (d,l) における ℓ_2 ノルムを，

$$\mathcal{P}^{(d,l)}(\mathbf{y}) = \varrho_d \sum_{n=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \sqrt{\sum_{f \in \mathcal{F}^{(d,l)}} |y_{n,t,f}|^2} \tag{4}$$

とする．ただし $\varrho_d \geq 0$ は深さごとの重みである．木構造 IVA のペナルティ関数は，深さ d におけるペナルティ関数を

$$\mathcal{P}^{(d)}(\mathbf{y}) = \sum_{l=1}^{L_d} \mathcal{P}^{(d,l)}(\mathbf{y}) \tag{5}$$

と定めた上で，これらを深さ方向に平均することで

$$\mathcal{P}_{\mathrm{TreeIVA}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{H+1} \sum_{d=0}^{H} \mathcal{P}^{(d)}(\mathbf{y}) \tag{6}$$

と定める．

3.2 IVA や ICA との関連

提案法は ICA と IVA を一般化した手法と解釈できる．木構造 IVA における高さ H を 0 とした場合，$\mathcal{P}_{\mathrm{TreeIVA}}(\mathbf{y})$ は全周波数を一つのグループにまとめる $\ell_{2,1}$ 混合ノルムとなり，従来の Laplace IVA と一致する．また，$d = H$ で $|\mathcal{F}^{(H,l)}| = 1$ の条件下で，$\varrho_d = 0$ $(d < H)$ 及び $\varrho_H = 1$ とした場合，$\mathcal{P}_{\mathrm{TreeIVA}}(\mathbf{y})$ は各周波数ビンでの ℓ_1 ノルムとなり，Laplace ICA と一致する．このことから，深さごとの重み ϱ_d を適切に設定できれば，IVA と ICA の性質を兼ね備えた働きが分離性能の向上に寄与すると考えられる．

3.3 補助関数法を用いた最適化

木構造 IVA は補助関数法 [1] を用いて最適化できる．補助関数法では，目的関数

$$\mathcal{J}(\mathbf{W}) = \mathcal{P}_{\mathrm{TreeIVA}}(\mathbf{W}\mathbf{x}) - \sum_{f=1}^{F} \log(|\det(\mathbf{W}_f)|) \tag{7}$$

を上から押さえる補助関数 $\mathcal{Q}(\mathbf{W}, \mathbf{r})$ を設計し，分離行列 $\mathbf{W}$ と補助変数 $\mathbf{r}$ を

$$\mathbf{r} \leftarrow \arg\min_{\mathbf{r}} \mathcal{Q}(\mathbf{W}, \mathbf{r}) \tag{8}$$

$$\mathbf{W} \leftarrow \arg\min_{\mathbf{W}} \mathcal{Q}(\mathbf{W}, \mathbf{r}) \tag{9}$$

と交互に最適化することで目的関数の最小化を図る．提案する木構造 IVA の場合，次の定理を用いる．

Algorithm 1 Aux-TreeIVA

Input: $\mathbf{W}^{[1]}, \mathbf{x}, (\varrho_d)_{d=0}^{H}$
Output: $\mathbf{W}^{[K+1]}$

for $k = 1, \ldots, K$ **do**
  $r_{n,t}^{(d,l)} \leftarrow \varrho_d \sqrt{\sum_{f \in \mathcal{F}^{(d,l)}} |(\mathbf{W}_f \mathbf{x}_{t,f})_n|^2}, \quad \forall d, n, t, f$
  $\mathbf{V}_{n,f} \leftarrow \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{d=0}^{H} \frac{\varrho_d}{r_{n,t}^{(d,l_{d,f})}} \right) \mathbf{x}_{t,f} \mathbf{x}_{t,f}^{\mathsf{H}}, \quad \forall n, f$
  $\mathbf{w}_{n,f} \leftarrow \frac{(\mathbf{w}_{n,f} \mathbf{V}_{n,f})^{-1}}{\sqrt{\mathbf{w}_{n,f}^{\mathsf{H}} \mathbf{V}_{n,f} \mathbf{w}_{n,f}}} \mathbf{e}_n, \quad \forall n, f$
end for

定理 1. 補助変数 $\mathbf{r}$ を

$$\mathbf{r} = ((\mathbf{r}^{(d,l)})_{l=1}^{L_d})_{d=0}^{H}, \quad \mathbf{r}^{(d,l)} = ((r_{n,t}^{(d,l)})_{t=1}^{T})_{n=1}^{N} \tag{10}$$

と定め，重み付き共分散行列を

$$\mathbf{V}_{n,f}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{d=0}^{H} \frac{\varrho_d}{r_{n,t}^{(d,l_{d,f})}} \right) \mathbf{x}_{t,f} \mathbf{x}_{t,f}^{\mathsf{H}} \tag{11}$$

と定義する．ただし，$l_{d,f}$ は深さ d において周波数 f を含むノードのインデックスであり，$f \in \mathcal{F}^{(d,l_{d,f})}$ を満たす．ここで，関数 $\mathcal{Q}$ を

$$\mathcal{Q}(\mathbf{W}, \mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{f=1}^{F} \mathbf{w}_{n,f}^{\mathsf{H}} \mathbf{V}_{n,f} \mathbf{w}_{n,f} - \sum_{f=1}^{F} \log(|\det(\mathbf{W}_f)|) + C \tag{12}$$

と定める．ただし，C は分離行列 $\mathbf{W}$ に依存しない定数であり，

$$C = \sum_{n=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \sum_{l=1}^{L_d} \sum_{d=0}^{H} \frac{\varrho_d r_{n,t}^{(d,l)}}{2(H+1)} \tag{13}$$

と書ける．このとき $\mathcal{Q}$ は

$$\mathcal{J}(\mathbf{W}) \leq \mathcal{Q}(\mathbf{W}, \mathbf{r}) \tag{14}$$

を満たし，等号は

$$r_{n,t}^{(d,l)} = \varrho_d \sqrt{\sum_{f \in \mathcal{F}^{(d,l)}} |y_{n,t,f}|^2} \tag{15}$$

のとき成り立つ．

Proof. Appendix に示す．■

定理 1 より，式 (8) に対応する補助変数の更新式は

$$r_{n,t}^{(d,l_{d,f})} \leftarrow \varrho_d \sqrt{\sum_{f \in \mathcal{F}^{(d,l)}} |y_{n,t,f}|^2} \tag{16}$$

となり，これを用いると重み付き共分散行列 $\mathbf{V}_{n,f}$ は

$$\mathbf{V}_{n,f}(\mathbf{r}) \leftarrow \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{d=0}^{H} \frac{\varrho_d}{r_{n,t}^{(d,l_{d,f})}} \right) \mathbf{x}_{t,f} \mathbf{x}_{t,f}^{\mathsf{H}} \tag{17}$$

Algorithm 2 ADMM-TreeIVA

Input: $\mathbf{x}, \mathbf{W}^{[1]}, \widetilde{\mathbf{W}}^{[1]}, \mathbf{y}^{[1]}, \mathbf{U}^{[1]}, \mathbf{u}^{[1]}, \alpha, \rho, (\varrho_d)_{d=0}^{H}$

Output: $\mathbf{W}^{[K+1]}$

for $k = 1, ..., K$ **do**

$\quad \mathbf{W}_f^{[k+1]} \leftarrow \Big\{(\widetilde{\mathbf{W}}_f^{[k]} - \mathbf{U}_f^{[k]}) + \sum_{t=1}^{T} ((\mathbf{y}_{t,f}^{[k]} - \mathbf{u}_{t,f}^{[k]}) \mathbf{x}_{t,f}^{\mathsf{H}})\Big\}\Big\{\mathbf{I} + \sum_{t=1}^{T} \mathbf{x}_{t,f}\, \mathbf{x}_{t,f}^{\mathsf{H}}\Big\}^{-1}, \quad \forall f$

$\quad \mathbf{Z} \leftarrow \alpha\, \mathbf{W}^{[k+1]} + (1-\alpha)\, \widetilde{\mathbf{W}}^{[k]}$

$\quad \mathbf{z} \leftarrow \alpha\, \mathbf{W}\mathbf{x}^{[k+1]} + (1-\alpha)\, \mathbf{y}^{[k]}$

$\quad \widetilde{\mathbf{W}}^{[k+1]} \leftarrow \mathrm{prox}_{(1/\rho)\mathrm{LD}} \left(\mathbf{Z} + \mathbf{U}^{[k]}\right)$

$\quad \mathbf{y}^{[k+1]} \leftarrow \mathrm{prox}_{(1/\rho)\mathcal{P}_{\mathrm{TreeIVA}}} \left(\mathbf{z} + \mathbf{u}^{[k]}\right)$

$\quad \mathbf{U}^{[k+1]} \leftarrow \mathbf{U}^{[k]} + \mathbf{Z} - \widetilde{\mathbf{W}}^{[k+1]}$

$\quad \mathbf{u}^{[k+1]} \leftarrow \mathbf{u}^{[k]} + \mathbf{z} - \mathbf{y}^{[k+1]}$

end for

で更新される．また，分離行列の更新式は従来のIVAと同じであるため，反復射影（IP）アルゴリズムで最適化でき，式 (9) に対応する分離行列の更新式は

$$\mathbf{w}_{n,f} \leftarrow \frac{(\mathbf{w}_{n,f}\mathbf{V}_{n,f})^{-1}}{\sqrt{\mathbf{w}_{n,f}^{\mathsf{H}}\mathbf{V}_{n,f}\mathbf{w}_{n,f}}}\mathbf{e}_n \tag{18}$$

となる．ここで，$\mathbf{e}_n$ は第 n 要素のみが 1 の単位ベクトルである．補助関数法に基づく木構造 IVA の最適化アルゴリズム（Aux-TreeIVA）を **Alg. 1** に示す．

3.4　ADMM を用いた最適化

木構造 IVA は ADMM を用いた優決定 BSS フレームワーク [4] を利用した最適化も可能である．[4] では，拡張ラグランジュ関数

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\mathbf{W}, \mathbf{x}, \widetilde{\mathbf{W}}, \mathbf{y}, \mathbf{U}, \mathbf{u}) \\
&\quad = -\sum_{f=1}^{F} \log(|\det(\widetilde{\mathbf{W}}_f)|) + \mathcal{P}_{\mathrm{TreeIVA}}(\mathbf{y}) \\
&\qquad - \langle \mathbf{U}, \mathbf{W} - \widetilde{\mathbf{W}} \rangle + \frac{\rho}{2}\|\mathbf{W} - \widetilde{\mathbf{W}}\|_2^2 \\
&\qquad - \langle \mathbf{u}, \mathbf{W}\mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle + \frac{\rho}{2}\|\mathbf{W}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2
\end{aligned} \tag{19}$$

を最小化するように主変数 $\mathbf{W}$, $\widetilde{\mathbf{W}}$, $\mathbf{y}$ 及び双対変数 $\mathbf{U}, \mathbf{u}$ を順に最適化する．ただし，$\rho > 0$ はステップサイズに関するパラメータであり，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は内積である．ADMM により木構造 IVA を最適化するアルゴリズム（ADMM-TreeIVA）を **Alg. 2** に示す．ただし，$\mathbf{Z}, \mathbf{z}$ の更新式は緩和操作であり，$\alpha \in (0, 2)$ である．また，$(\cdot)^{\mathsf{H}}$ は複素共役転置，$\mathrm{prox}_{\mathrm{LD}}$ は LogDet 項の近接作用素を表す．木構造 IVA の近接作用素 $\mathrm{prox}_{\mathcal{P}_{\mathrm{TreeIVA}}}$ は深さごとの近接作用素 $\mathrm{prox}_{\mathcal{P}^{(d)}}$ を葉から順に適用することで得られ，

$$\mathrm{prox}_{\mathcal{P}_{\mathrm{TreeIVA}}} = \mathrm{prox}_{\mathcal{P}^{(1)}} \circ \cdots \circ \mathrm{prox}_{\mathcal{P}^{(H)}} \tag{20}$$

と書ける [5]．ただし $\circ$ は作用素の合成を表す．深さごとの近接作用素 $\mathrm{prox}_{\mathcal{P}_d}$ は $\ell_{2,1}$ 混合ノルムの近接作用素であり，グループごとの係数を

$$c_{n,t}^{(d,l)} = \left(1 - \frac{\varrho_d}{\sqrt{\sum_{f \in \mathcal{F}^{(d,l)}} |y_{n,t,f}|^2}}\right)_+ \tag{21}$$

と定めることで，

$$(\mathrm{prox}_{\mathcal{P}^{(d)}}(\mathbf{y}))_{n,t,f} = c_{n,t}^{(d,l_{d,f})}\, y_{n,t,f} \tag{22}$$

と書ける．ただし，$(\cdot)_+ = \max\{\cdot, 0\}$ である．

4　実験

4.1　木の設定

実験では，完全二分木を用い，木の高さを $H = 0, \cdots, 10$ と変化させた場合の分離性能の推移を確認した．深さごとの重みは和が 1 になるように正規化し，本稿では

$$\varrho_d = \begin{cases} 1 & (H = 0) \\ \dfrac{\exp\left(-(d/H)^2\right)}{\sum_{d'=0}^{H} \exp\left(-(d'/H)^2\right)} & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{23}$$

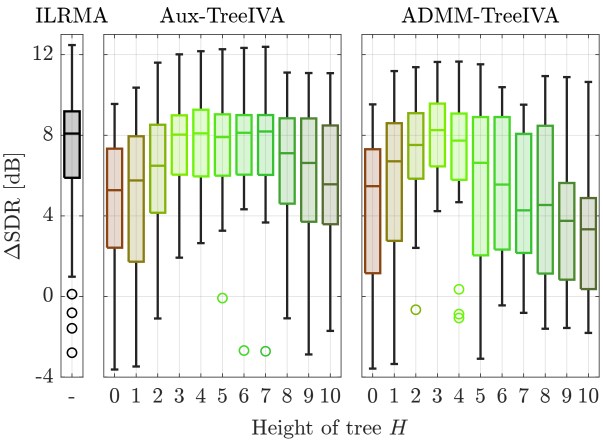
とした．

4.2　実験条件

データセットは残響時間 130 ms，250 ms，マイクロホン間距離 5 cm，1 m，サンプリング周波数 16 kHz で収録された SiSEC 2011 の `dev1` を使用し，女声及び男声のデータをそれぞれ 3 つずつ用いて，24 組の 2 チャネルの 2 話者混合音声を作成した．STFT は窓長 2048 の Hann 窓を用い，シフト長は 1024 とした．また，最適化の反復回数はすべての手法で 1000 とし，評価指標には ΔSDR を用いた．比較手法として，ILRMA を用いた．基底行列及びアクティベーション行列の初期値は 0 から 1 の一様分布乱数とし，5 パターンの乱数シード値で試行した．基底ベクトルのランク数は 2 とした．ADMM-TreeIVA のパラメータは，$\alpha = 1.5$ とした．パラメータ ρ の値は予備実験の結果をもとに調整し，$H = 0, 1, 2$ のときは $\rho = 1$ を，$H = 3, 4, 5$ のときは $\rho = 10$ を，$H = 6, 7$ のときは $\rho = 100$ を，$H = 8, 9$ のときは $\rho = 1000$ を，$H = 10$ のときは $\rho = 10000$ を用いた．

4.3　実験結果

実験結果を図–2 に示す．提案法における木の高さ H に着目すると，Aux-TreeIVA は $H = 4$ のとき，ADMM-TreeIVA は $H = 3$ のとき最も良い性能を示した．このときの分離性能の平均値と中央値を比較すると，ILRMA は順に 7.23 dB，8.09 dB であるのに対し，Aux-TreeIVA は順に 7.66 dB，8.10 dB であり，



図–2　1000 反復での最適化を行った分離性能（ΔSDR）の比較．左は ILRMA の結果である．中央及び右は提案法の Aux-TreeIVA 及び ADMM-TreeIVA であり，それぞれ木の高さを $H = 0, \cdots, 10$ と変化させた場合の分離性能を示している．

ADMM-TreeIVA は順に 8.07 dB，8.26 dB であった．また，従来の IVA（$H = 0$）や ILRMA では ΔSDR が負となるケースが複数みられた一方，提案法のパラメータを適切に設定した場合，最低の分離性能は 3 dB から 4 dB 程度であった．このことから，提案法は適切な設定下で ILRMA と同等かそれ以上の性能を達成することが確認された．

次に，提案法におけるアルゴリズムの違いがもたらす影響を見る．Aux-TreeIVA に関しては，高さ H が 3 から 7 までの範囲で箱の位置が同程度であり，安定した性能を示した．ADMM-TreeIVA は高さ $H = 3$ の時に Aux-TreeIVA よりも高い性能を達成するものの，それ以上の高さでは性能が大きく低下した．また予備実験では ADMM-TreeIVA は木の深さに応じてステップサイズを調整する必要性が確認された．このことから，アルゴリズムとして ADMM を用いることで高い性能を達成する可能性が示唆されたものの，安定性には課題が残った．

5　むすび

本稿では，木構造を持つような周波数インデックスのグループを導入することで IVA の緻密化を図った．また，補助関数法と ADMM による最適化アルゴリズムを導出した．実験の結果，木構造の導入は IVA の性能を大きく改善することが確かめられた．今後は適切な木の深さや構造，重みの設計方法に関する調査や，アルゴリズムとして ADMM を用いるときの適切なパラメータの設定方法に関し検討する．

参考文献

[1] N. Ono, "Stable and fast update rulues for independent vector analysis based on auxiliary function technique," *IEEE Workshop Appl. Signal Process. Audio Acoust.*, pp. 189–192 (2011).

[2] K. Yatabe and D. Kitamura, "Determined BSS based on time-frequency masking and its application to harmonic vector analysis," *IEEE/ACM Trans. Audio Speech Lang. Process.*, 1609–1625 (2021).

[3] I. Lee and G. Jang, "Independent vector analysis based on overlapped cliques of variable width for frequency-domain blind signal separation," *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, 1–12 (2012).

[4] 渡會博子, 山田宏樹, 矢田部浩平, "ADMM アルゴリズムを用いた優決定ブラインド音源分離," 音講論集, pp. 145–146 (2023.9).

[5] F. Bach, R. Jenatton, J. Mairal and G. Obozinski, "Optimization with sparsity-including penalties," *Found. Trends Mach. Learn.*, 1–116 (2012).

Appendix：定理 1 の証明

定理 1 は頂点ごとに Laplace IVA の目的関数およびそれに対する補助関数 [1] を考え，不等式を全頂点で足し合わせることで示される．

Proof. 頂点 (d, l) における IVA の目的関数を

$$J^{(d,l)}(\mathbf{W}) = \mathcal{P}^{(d,l)}(\mathbf{y}) - \sum_{f \in \mathcal{F}^{(d,l)}} \log(|\det(\mathbf{W}_f)|) \tag{24}$$

と定める．また，補助変数を $\mathbf{r}^{(d,l)} = (r_{n,t}^{(d,l)})_{n=1,t=1}^{N,T}$，重み付き共分散行列を

$$\mathbf{V}_{n,f}^{(d,l)} = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \frac{\varrho_d}{r_{n,t}^{(d, l_{d,f})}} \mathbf{x}_{t,f} \mathbf{x}_{t,f}^{\mathsf{H}} \tag{25}$$

と置く．ここで，関数 $\mathcal{Q}^{(d,l)}$ を

$$\mathcal{Q}^{(d,l)}(\mathbf{W}, \mathbf{r}^{(d,l)}) = -\sum_{f \in \mathcal{F}^{(d,l)}} \log(|\det(\mathbf{W}_f)|) + \sum_{n=1}^{N} \sum_{f \in \mathcal{F}^{(d,l)}} \mathbf{w}_{n,f}^{\mathsf{H}} \mathbf{V}_{n,f}^{(d,l)} \mathbf{w}_{n,f} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \frac{\varrho_d r_{n,t}^{(d,l)}}{2} \tag{26}$$

と定める．このとき，関数 $\mathcal{Q}^{(d,l)}$ は

$$\mathcal{J}^{(d,l)}(\mathbf{W}) \leq \mathcal{Q}^{(d,l)}(\mathbf{W}, \mathbf{r}^{(d,l)}) \tag{27}$$

を満たし，等号成立の条件は

$$r_{n,t}^{(d,l)} = \varrho_d \sqrt{\sum_{f \in \mathcal{F}^{(d,l)}} |y_{n,t,f}|^2} \tag{28}$$

と書ける [1, Theorem 2]．式 (27) をすべての (d, l) に関して足し合わせ $H + 1$ で割ることで，

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{W}) &= \frac{1}{H+1} \sum_{d=0}^{H} \sum_{l=1}^{L_d} \mathcal{J}^{(d,l)}(\mathbf{W}) \\ &\leq \frac{1}{H+1} \sum_{d=0}^{H} \sum_{l=1}^{L_d} \mathcal{Q}^{(d,l)}(\mathbf{W}, \mathbf{r}^{(d,l)}) = \mathcal{Q}(\mathbf{W}, \mathbf{r}) \end{aligned} \tag{29}$$

を得る．すべての (d, l) について式 (28) が成り立つとき，式 (29) の等号は成立する．■