

FDTD 法における吸収境界最適化手法の評価*

☆ 犬飼朋樹, 矢田部浩平 (農工大)

1 はじめに

音響数値解析において、非有界領域を近似する手段として吸収境界条件があり、Perfectly Matched Layer (PML) [1] が広く用いられている。我々はこれまでに、反射波の発生を抑制するために、PML の減衰係数を最適化する手法を提案し [2], 基礎的な検討を行った。本稿では、本手法の汎用性を評価するために、より複雑な音場条件下での評価実験を行った。

2 PML の減衰係数の最適化

音波の伝搬問題における非有界領域のモデル化には、シミュレーション領域を囲む多層構造の吸収層である PML が広く用いられている。PML を FDTD (Finite-Difference Time-Domain) 法へ実装する際、運動方程式と連続の式に現れる減衰係数 σ_x , σ_y はそれぞれ、

$$\sigma_x = \sigma_{\max} \left(\frac{l_x}{L} \right)^m, \quad \sigma_y = \sigma_{\max} \left(\frac{l_y}{L} \right)^m \quad (1)$$

と定義される。ここで、 $\sigma_{\max}$ は減衰係数の最大値、 L は PML の層数、 l_x , l_y は x , y 方向それぞれの層のインデックス、 m はテーパ乗数である。ただし、 $\sigma_{\max}$, m はシミュレーション条件に合わせて調整する。しかし、これらを最適な値に設定することは必ずしも容易ではなく、不適切なパラメータ設定は性能劣化を招く可能性がある。

この課題に対し、減衰係数を自動最適化する手法を 2 種類提案した [2]。1 つ目の手法では、関数の形を定めるパラメータである $\sigma_{\max}$ と m (式 (1) を参照) を決定変数とすることで間接的に各層の減衰係数の最適化を行う。これを Parametric と呼ぶ。2 つ目の手法では、減衰係数 σ_x , σ_y そのものを決定変数とする。このとき、反射の等方性を保つため、図-1 に示すように、最適化対象を一部の領域に限定しつつ、他の部分はこれを複製し、対称性が保たれるように配置する。これを Full と呼ぶ。これらの手法はともに、エネルギー密度の時間減衰を評価する目的関数

$$F = \sum_{n=1}^N \sqrt{\frac{\rho}{|\Gamma_n|} \sum_{t \in \mathcal{T}_n} \left(\frac{p(t)^2}{\rho^2 c^2} + u_x(t)^2 + u_y(t)^2 \right)} \quad (2)$$

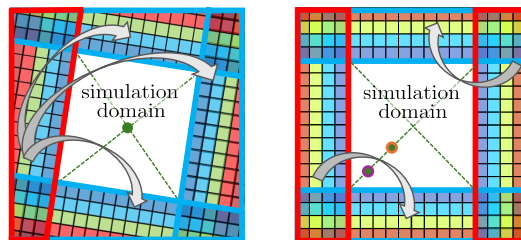


図-1 Full の最適化対象の模式図。左図は PML を斜めに配置した条件 (Rotate), 右図は音源位置を中心から移動させた条件 (Shift40, Shift60) を示している。緑色の点は音源位置を表しており、右図において枠が紫のものが Shift60, 橙のものが Shift40 である。赤枠は最適化の対象領域であり、青枠で囲まれた領域には、赤枠内の減衰係数が適切な方向で複製・適用される。なお、PML は層ごとに色分けして示した。

を最小化するように、決定変数を最適化する。ただし、 N は評価を行う区間の総数であり、 $\mathcal{T}_n \subset \mathbb{N}$ は n 番目の評価区間に対応する時間インデックスの集合である。ここで、減衰係数は正の値を取るため、決定変数を $\exp$ 関数の引数とすることで、正值制約を課す。

3 評価実験

[2] では、正方形領域の中心からパルスが発生させる単純な条件下での検証を行った。本稿では、Parametric と Full の汎用性を評価するため、音源位置や PML の配置を変更した、より複雑なシミュレーション条件において、検証を行う。評価にあたっては、2 つの手法で最適化したそれぞれの PML と、理論式 [3] に基づき $m = 3$, $\sigma_{\max} = \frac{0.8(m+1)}{\rho c \Delta}$ とした場合の PML (Theoretic) のシミュレーション結果を比較する。ここで、 Δ は空間ステップ幅である。なお、その他の条件については [2] の実験と同様である。

3.1 PML を斜めに配置する場合の最適化

通常、PML は FDTD 法の格子軸に沿って配置される。しかし、複雑な形状の境界を扱う場合などでは、格子に対して傾斜した方向に PML が配置されることも考えられる。このような場合の性能を評価するために、本稿では、正方形のシミュレーション領域を回転させ、格子に非整合な方向に PML が配置されたケースの最適化 (Rotate) を行う。なお、決定変数の設定領域は図-1 (左) に示す。

*Evaluation of optimization methods for absorbing boundary conditions in the FDTD method. By Tomoki INUKAI and Kohei YATABE (Tokyo University of Agriculture and Technology).

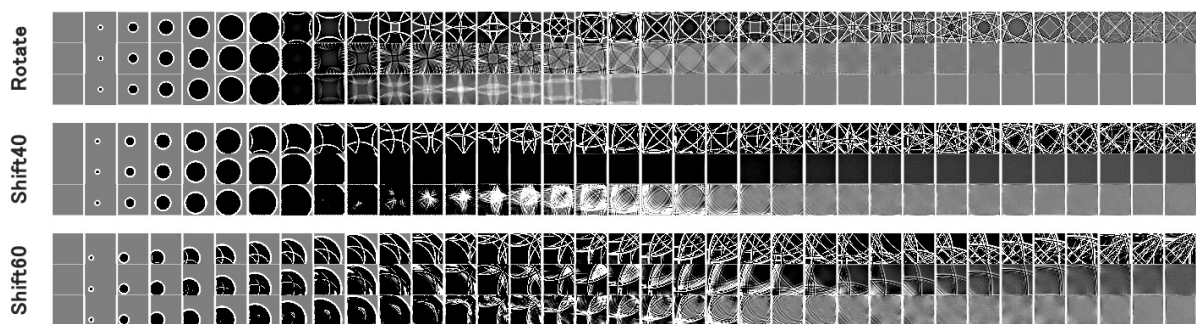


図-2 シミュレーション結果。左から右に時間が経過している。各条件は、上から Rotate, Shift40, Shift60 で、各グループの上段に Theoretic, 中段に Parametric, 下段に Full の結果を示した。ガウシアンパルスの初期値のピークの画素値を 1 とし、見やすさのためにダイナミックレンジを狭めた画像を示した。画像がより早くグレーになるほどより波を吸収できていることを表す。

3.2 音源の位置を中心からずらした場合の最適化

これまでの検討では、計算領域の中心に配置した音源からの等方的なパルス波を対象としていた。本稿では、励振波形を同一とした上で、音源位置を領域対角線に沿って左下方向へ変更した条件についても検討する。具体的には、領域の中心を 0 %, 左下隅を 100 % とした対角線上において、40 % (Shift40) 及び 60% (Shift60) の 2 条件で音源を配置した。なお、各条件における決定変数の設定領域は 図-1 (右) に示す。

4 実験結果

実験結果を図-2, 図-3 に示す。Rotate の結果から、Parametric よりも Full によって最適化された PML の方が、より速やかに波を吸収できることが確認された。Rotate では、PML の層数が非一様になるという特徴がある。この条件下において、Parametric では、界面に平行な方向で一様な値を保ったまま最適化を行うのに対し、Full では局所的な最適化が可能である。そのため、不均一な層数分布に適応した、より吸収性能の高い PML が得られたと考えられる。

一方、Shift40 及び Shift60 の結果からも、Full によって最適化された PML の方が、より速やかに波を吸収できることが確認された。Shift40 及び Shift60 では、PML への波の入射角が非一様になるという特徴がある。この条件においても、Full による局所的な最適化が有効に機能し、より吸収性能の高い PML が得られたと考えられる。さらに、Shift40 と Shift60 を比較すると、図-3 では差異の判別が困難であるが、図-2 においては、Shift60 の方が残留波の持続時間が長いことが確認された。これにより、音源が端に移動し、PML への入射角が大きくなるにつれて、最適化の難易度が高まることが示唆された。

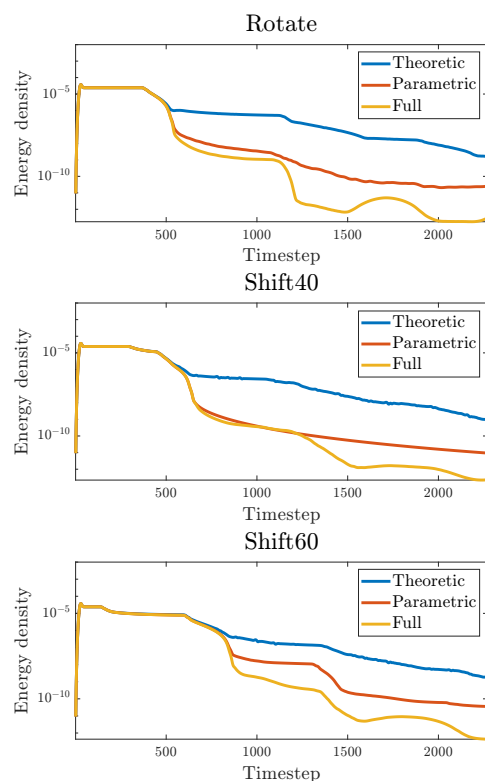


図-3 エネルギー密度の時間推移。エネルギー密度の数値の減少が速いほど、より波を吸収できていることを表す。

5 むすび

本稿では、Parametric と Full の汎用性を評価するため、音源の位置や PML の配置向きを変更した条件での実験を行った。今後は、計算領域の複雑形状化や、3 次元問題への拡張について検討を行う。

参考文献

- [1] J.-P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," *J. Comput. Phys.*, **114**, 185–200 (1994).
- [2] 犬飼朋樹, 矢田部浩平, "Perfectly matched layer における減衰係数の最適化," 音講論集, pp. 677–678 (2025.9).
- [3] A. Taflov, S. C. Hagness and M. Piket-May, "Computational electromagnetics: The finite-difference time-domain method," *Electr. Eng. Handb.*, **3**, 15 (2005).