量子アフィン代数の極小アフィン化について

直井克之

概要

極小アフィン化は、Kirillov-Reshetikhin 加群や A 型の評価加群を含む量子アフィン代数上の有限次元既約加群の特別な族であり、近年様々な研究がなされている（例えば [Her07, Mou10, MY12b] など)。本稿ではまず極小アフィン化の定義について述べ、続いて Chari 及び Pressley による分類結果を紹介する。その後、BC 型の極小アフィン化の次数付き極限に関する [Nao12] の結果について紹介する。

研究集会において講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの和田先生と宮地先生に、この場を借りて御礼申し上げます。

1 極小アフィン化

1.1 動機付け

極小アフィン化を考える動機付けとして、まずリー代数の場合を考えよう。$\mathfrak{g}$ を複素単純リー代数とし、$\mathbf{L}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ で $\mathfrak{g}$ に付随するループ代数を表す。$\mathbf{L}\mathfrak{g}$ は $[x\otimes f, y\otimes g] = [x,y]\otimes fg$ により定義されるリー代数である。任意の $a\in\mathbb{C}^\times$ に対し、評価写像 $\mathrm{ev}_a\colon \mathbf{L}\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ が $\mathrm{ev}_a(x\otimes f) = f(a)x$ により定義される。このことから、任意の既約 $\mathfrak{g}$ 加群 V に対し、引き戻し $\mathrm{ev}_a^*(V)$ を考えることで V は既約 $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ 加群に持ち上がることがわかる。(これを V に付随する $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の評価加群と呼ぶ。)

$U_q(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ に付随する量子展開環、$U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を量子ループ代数とする。この場合には、評価写像に対応する射は (A 型以外）存在しない。そのため既約 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 V が与えられた時、それを $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群に持ち上げることは必ずしもできないのである。それでは、この場合に評価加群に対応する既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群は何であろうか？この問いに対する一つの答えが、次節で定義される極小アフィン化である。もう少し詳しく言うと、V に “なるべく小さい” $U_q(\mathfrak{g})$ 加群を直和して、$U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群に持ち上げたものを極小アフィン化というのである。

1.2 極小アフィン化の定義

$C = (c_{ij})_{1\le i,j\le n}$ を単純リー代数 $\mathfrak{g}$ のカルタン行列（添字付けは [Kac90, Section 4.8] に従う）とし、$d_1,\dots,d_n$ を $d_ic_{ij} = d_jc_{ji}$ を満たす互いに素な正整数の列とする。また $I = \{1,\dots,n\}$ とおく。量子アフィン代数 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ はループ代数 $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ の普遍包絡環の量子変形であり、生成元

$$x_{i,r}^{\pm}\ (i\in I, r\in\mathbb{Z}),\quad k_i^{\pm1}\ (i\in I),\quad h_{i,m}\ (i\in I, m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$$

といくつかの関係式（cf. [CP94] 等）により定義される $\mathbb{C}(q)$ 代数である。また $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ は（次数作用素なしの）量子アフィン代数 $U'_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ を、適当な中心元が生成する両側イデアルで割った商代数としても定義できる。$U_q(\mathfrak{g})$ で $\{x^{\pm}_{i,0}, k_i^{\pm 1} \mid i \in I\}$ が生成する部分代数を表す。これは $\mathfrak{g}$ に付随する量子展開環と同型である。

まず準備として $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元加群について復習しておく。P を $\mathfrak{g}$ のウェイト格子とし、$P^+ \subseteq P$ を支配的整ウェイトの集合とする。$U_q(\mathfrak{g})$ 加群 V が

$$V = \bigoplus_{\lambda \in P} V_\lambda, \quad V_\lambda = \{v \in V \mid k_i v = q_i^{\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle} v \quad \text{for } i \in I\}$$

（$\alpha_i^\vee$ は単純余ルート、$q_i = q^{d_i}$）を満たすとき、V は 1 型であるという。

定理 1.1 ([CP94])**.** (i) 任意の $\lambda \in P^+$ に対し、最高ウェイトが λ であるような 1 型有限次元既約 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 $V_q(\lambda)$ が同型を除いてただ一つ存在する。($U_q(\mathfrak{g})$ 加群の最高ウェイトは $\mathfrak{g}$ 加群と同様に定義される。)
(ii) $U_q(\mathfrak{g})$ の 1 型有限次元加群の圏は半単純であり、任意の単純対象はある $V_q(\lambda)$ に同型である。
(iii) $V_q(\lambda)$ の指標を $\mathrm{ch}\, V_q(\lambda) := \sum_\mu (\dim V_q(\lambda)_\mu) e^\mu$ と定義するとき、$\mathrm{ch}\, V_q(\lambda)$ は $\mathfrak{g}$ の最高ウェイト λ の既約加群 $V(\lambda)$ の指標と一致する。

以下、本稿で登場する $U_q(\mathfrak{g})$ 加群は全て 1 型であると仮定する。極小アフィン化の定義を述べる前に、まずアフィン化の定義について述べよう。

定義 1.2 ([Cha95])**.** (i) 有限次元既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群 L が $U_q(\mathfrak{g})$ 加群として

$$L \cong V_q(\lambda) \oplus \bigoplus_{\mu < \lambda} V_q(\mu)^{\oplus m_\mu(L)} \qquad (m_\mu(L) \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と既約分解するとき、L は $V_q(\lambda)$ の**アフィン化**であるという。
(ii) $V_q(\lambda)$ のアフィン化 L と M が $U_q(\mathfrak{g})$ 加群として同型であるとき、L と M は**同値**であるという。また L の同値類を $[L]$ で表す。

$V_q(\lambda)$ のアフィン化の同値類の集合を $\mathbf{D}_\lambda$ で表すと、任意の $\lambda \in P^+$ に対し $\mathbf{D}_\lambda$ は空でない有限集合となる。$[L_1], [L_2] \in \mathbf{D}_\lambda$ に対し $m_\mu(L_i)$ $(i = 1, 2,\ \mu \in P^+)$ を上のように定義し、任意の $\mu \in P^+$ に対し

(i) $m_\mu(L_1) \leq m_\mu(L_2)$,
(ii) ある $\nu > \mu$ が存在して $m_\nu(L_1) < m_\nu(L_2)$ が成り立つ、

のいずれかが成り立つとき $[L_1] \leq [L_2]$ と定めると、$\mathbf{D}_\lambda$ 上に半順序が定義される。

定義 1.3 ([Cha95])**.** 同値類 $[L]$ が $\mathbf{D}_\lambda$ の（上で述べた半順序に関する）極小元であるような有限次元既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群 L を、既約 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 $V_q(\lambda)$ の**極小アフィン化**と呼ぶ。

極小アフィン化の例として、以下が挙げられる。

例 1.4. $\mathfrak{g}$ が A 型であると仮定する。この時リー代数の場合と同様に、任意の $a \in \mathbb{C}(q)^\times$ に対し評価写像と呼ばれる代数準同型 $\mathrm{ev}_a \colon U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g}) \to U_q(\mathfrak{g})$ が存在する [Jim86, Section 2]。よって引き戻し $\mathrm{ev}_a^*\big(V_q(\lambda)\big)$ は既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群となり、これが $V_q(\lambda)$ の（同値を除いて唯一の）極小アフィン化となる。$\mathrm{ev}_a^*\big(V_q(\lambda)\big)$ は $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の**評価加群**と呼ばれる。

例 1.5. $\mathfrak{g}$ を任意の型とする。$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $i \in I$ に対し $\lambda = m\varpi_i$（ϖ_i は基本ウェイト）とおくと、$V_q(\lambda)$ は同値を除いて唯一の極小アフィン化をもつ（cf. 定理 1.7, 1.8)。この極小アフィン化のことを **Kirillov-Reshetikhin 加群**と呼ぶ。Kirillov-Reshetikhin 加群は「T 系を満たす」、「フェルミ型分解公式を満たす」、等の様々な良い性質を持つことが知られている（cf. [Nak03, Her06])。一般の極小アフィン化に対してこれらの結果の拡張を得ることは、興味深い問題であると思われる（実際 [MY12a] では、AB 型の場合に極小アフィン化を含むある加群のクラスが "拡大 T 系"を満たすことを示している)。ただし結晶基底を持つ極小アフィン化は Kirillov-Reshetikhin 加群だけであろうと予想されており、結晶基底の存在に関する拡張はほとんど望めないことを追記しておく。

1.3 極小アフィン化の分類

本節では Chari と Pressley によりなされた、極小アフィン化の分類結果について紹介する。そのためにまず、Drinfeld 多項式を用いた有限次元既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群の分類について復習する。$U_q(\mathbf{L}\mathfrak{n}_\pm)$（resp. $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{h})$）で $\{x_{i,r}^\pm \mid i \in I, r \in \mathbb{Z}\}$（resp. $\big\{k_i^{\pm 1}, h_{i,m} \mid i \in I, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\big\}$）により生成される $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の部分代数を表す。この時三角分解 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g}) \cong U_q(\mathbf{L}\mathfrak{n}_-) \otimes U_q(\mathbf{L}\mathfrak{h}) \otimes U_q(\mathbf{L}\mathfrak{n}_+)$ が成り立つ。また $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{h}) = \mathbb{C}[k_i^\pm, h_{i,m}]$ は可換部分代数となる。よって任意の $\mathbb{C}(q)$ 代数の射 $\Psi \colon U_q(\mathbf{L}\mathfrak{h}) \to \mathbb{C}(q)$ に対し、$U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群 $M(\Psi)$ を生成元 v_Ψ と関係式

$$x_{i,r}^+ v_\Psi = 0, \quad H v_\Psi = \Psi(H) v_\Psi \quad \big(H \in U_q(\mathbf{L}\mathfrak{h})\big)$$

により定義でき、$M(\Psi)$ は唯一つの既約商を持つ。

$\mathbb{C}(q)$ を係数とする多項式の列 $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_1(u), \dots, \boldsymbol{\pi}_n(u))$ でそれぞれの定数項が 1 であるものに対し、$\Psi_{\boldsymbol{\pi}}$ を以下のように定義する（この対応は少々複雑なので、とりあえず $\boldsymbol{\pi}$ に対応してなにか $\Psi_{\boldsymbol{\pi}}$ が定まると思えばよい)。まず $\phi_{i,\pm r}^\pm \in U_q(\mathbf{L}\mathfrak{h})$ $(i \in I, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を

$$\sum_{r=0}^{\infty} \phi_{i,\pm r}^\pm u^{\pm r} = k_i^{\pm 1} \exp\left(\pm (q_i - q_i^{-1}) \sum_{r'=1}^{\infty} h_{i,\pm r'} u^{\pm r'} \right)$$

により定義し、$\Psi_{\boldsymbol{\pi}}$ を

$$\sum_{r=0}^{\infty} \Psi_{\boldsymbol{\pi}}(\phi_{i,r}^+) u^r = q_i^{\deg \boldsymbol{\pi}_i(u)} \frac{\boldsymbol{\pi}_i(q_i^{-1}u)}{\boldsymbol{\pi}_i(q_i u)} = \sum_{r=0}^{\infty} \Psi_{\boldsymbol{\pi}}(\phi_{i,-r}^-) u^{-r}$$

により定める。$M(\Psi_{\boldsymbol{\pi}})$ の既約商を $L_q(\boldsymbol{\pi})$ とする。

定理 1.6 ([CP95b])**.** 任意の $\boldsymbol{\pi}$ に対し $L_q(\boldsymbol{\pi})$ は有限次元である。また任意の（1 型）有限次元既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群はある $L_q(\boldsymbol{\pi})$ に同型である。$\boldsymbol{\pi}$ を $L_q(\boldsymbol{\pi})$ の **Drinfeld 多項式**と呼ぶ。

Drinfeld 多項式 $\boldsymbol{\pi}$ に対し $\mathrm{wt}(\boldsymbol{\pi}) \in P^+$ を $\mathrm{wt}(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{i \in I} \varpi_i \deg \boldsymbol{\pi}_i(u)$ により定義する。$L_q(\boldsymbol{\pi})$ が $V_q(\lambda)$ のアフィン化となるための必要十分条件は $\mathrm{wt}(\boldsymbol{\pi}) = \lambda$ となることである。

極小アフィン化の分類について述べよう。まず $\mathfrak{g}$ が DE 型でない場合について述べる。

定理 1.7 ([Cha95, CP95a])**.** $\mathfrak{g}$ が DE 型でないとき、任意の $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \varpi_i$ に対し $V_q(\lambda)$ の極小アフィン化が同値を除いてただ一つ存在する。また $L_q(\boldsymbol{\pi})$ が $V_q(\lambda)$ の極小アフィン化であるための必要十分条件は、任意の $i \in I$ に対し

$$\boldsymbol{\pi}_i(u) = (1 - a_i q_i^{\lambda_i - 1} u)(1 - a_i q_i^{\lambda_i - 3} u) \cdots (1 - a_i q_i^{-\lambda_i + 3} u)(1 - a_i q_i^{-\lambda_i + 1} u)$$

となるような $a_i \in \mathbb{C}(q)^\times$ が存在し、列 $(a_i)_{i \in I}$ が

(I) 任意の $1 \leq i < j \leq n$ に対し $a_i / a_j = \prod_{i \leq k < j} c_k(\lambda)$,

(II) 任意の $1 \leq i < j \leq n$ に対し $a_i / a_j = \prod_{i \leq k < j} c_k(\lambda)^{-1}$,

のいずれかを満たすことである。ただし $c_k(\lambda) = q^{d_k \lambda_k + d_{k+1} \lambda_{k+1} + d_k - c_{k,k+1} - 1}$ とおいた。

$\mathfrak{g}$ が DE 型の場合にも、大部分の λ に対して分類が得られている。それを紹介するためにいくつか記号を準備する。以下 I の元と $\mathfrak{g}$ の Dynkin 図形の頂点を同一視する。3 頂点と連結な唯一つの頂点を i_0、$I \setminus \{i_0\}$ の 3 つの連結成分に対応する部分集合をそれぞれ J_1, J_2, J_3 で表し、$J^k = I \setminus J_k$ とおく。また $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \varpi_i$ に対し、$\mathrm{supp}(\lambda) = \{ i \in I \mid \lambda_i \neq 0 \}$ とする。部分集合 $J \subseteq I$ に対し $\mathfrak{g}_J$ で Dynkin 図形が J となるような単純リー代数、Drinfeld 多項式 $\boldsymbol{\pi}$ に対し $\boldsymbol{\pi}_J$ で多項式の $\#J$ 個の列 $\big(\boldsymbol{\pi}_i(u)\big)_{i \in J}$ を表し、$\lambda_J = \sum_{i \in J} \lambda_i \varpi_i$ とおく。$V_q^J(\lambda_J)$ と $L_q^J(\boldsymbol{\pi}_J)$ で、それぞれ $U_q(\mathfrak{g}_J)$ と $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g}_J)$ の対応する既約加群を表す。

定理 1.8 ([CP96a])**.**
(i) ある $k \in \{1, 2, 3\}$ が存在して $\mathrm{supp}(\lambda) \cap J_k = \emptyset$ となると仮定する。このとき $V_q(\lambda)$ の極小アフィン化が同値を除いてただ一つ存在する。また $L_q(\boldsymbol{\pi})$ が $V_q(\lambda)$ の極小アフィン化であるための必要十分条件は、$\mathrm{wt}(\boldsymbol{\pi}) = \lambda$ であり $L_q(\boldsymbol{\pi}_{J^k})$ が $V_q(\lambda_{J^k})$ の極小アフィン化となることである。

(ii) 任意の $k \in \{1, 2, 3\}$ に対し $\mathrm{supp}(\lambda) \cap J_k \neq \emptyset$ であり、かつ $\lambda_{i_0} \neq 0$ であると仮定する。このとき $V_q(\lambda)$ の極小アフィン化の同値類はちょうど 3 つ存在する。また $L_q(\boldsymbol{\pi})$ が $V_q(\lambda)$ の極小アフィン化であるための必要十分条件は、$\mathrm{wt}(\boldsymbol{\pi}) = \lambda$ であり、ある $\ell \in \{1, 2, 3\}$ が存在して $k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{\ell\}$ に対し $L_q(\boldsymbol{\pi}_{J^k})$ が $V_q(\lambda_{J^k})$ の極小アフィン化となることである。

λ が (i)、(ii) のどちらも満たさない場合（i.e., 任意の k に対し $\mathrm{supp}(\lambda) \cap J_k \neq \emptyset$ かつ $\lambda_{i_0} = 0$ の場合）には、λ の選び方によって極小アフィン化の同値類の数はいくらでも大きくなり得ることが知られている。この場合は D_4 型のみ完全な分類が得られている [CP96b]。

2　次数付き極限を用いた極小アフィン化の $U_q(\mathfrak{g})$ 加群構造の決定

前章では極小アフィン化の分類について述べたが、それぞれの極小アフィン化の構造に関する情報は、この結果からはほとんど得られない。$U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 加群に対して、その指標および $U_q(\mathfrak{g})$ に制限したときの分規則を求めることは基本的な問題である。本章では BC 型の極小アフィン化に対し、次数付き極限を用いてこの問題にある種の解答を与えた [Nao12] の結果について紹介する。

2.1　次数付き極限

まず次数付き極限の定義を述べる。本節の内容の多くは一般の型で成り立つが、簡単のために $\mathfrak{g}$ が BC 型であると仮定する。

$$\mathbf{A} = \mathbb{C}[q, q^{-1}] \subseteq \mathbb{C}(q)、\quad [k]_q = \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}、\quad [k]_q! = [k]_q[k-1]_q \cdots [1]_q$$

とし、$U_\mathbf{A}(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ を $k_i^{\pm 1}$ $(i \in I)$、$\big(x_{i,r}^{\pm}\big)^{(k)} := \big(x_{i,r}^{\pm}\big)^k / [k]_{q_i}!$ $(i \in I, r \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_{>0})$ で生成される $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の $\mathbf{A}$ 部分代数とする。

$\lambda \in P^+$ に対し Drinfeld 多項式 $\boldsymbol{\pi}$ を、$L_q(\boldsymbol{\pi})$ が $V_q(\lambda)$ の極小アフィン化であり、$\boldsymbol{\pi}_i(u) \in \mathbf{A}[u]$ かつ最高次の項の係数が $\mathbb{C}^\times q_i^\mathbb{Z}$ に含まれるようにとり（定理 1.7 により任意の λ に対しこのような $\boldsymbol{\pi}$ が存在する）、$L_\mathbf{A}(\boldsymbol{\pi}) := U_\mathbf{A}(\mathbf{L}\mathfrak{g}) v_{\Psi_\pi} \subseteq L_q(\boldsymbol{\pi})$ とおく。このとき $\overline{L_q(\boldsymbol{\pi})} := \mathbb{C} \otimes_\mathbf{A} L_\mathbf{A}(\boldsymbol{\pi})$ は $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ 加群となる（ただし $\mathbb{C}$ は $q = 1$ として $\mathbf{A}$ 加群とみなしている）。$\overline{L_q(\boldsymbol{\pi})}$ を $L_q(\boldsymbol{\pi})$ の**古典極限**と呼ぶ。$\boldsymbol{\pi}$ に $q = 1$ を代入して得られる複素係数多項式の列を $\overline{\boldsymbol{\pi}} = \big(\overline{\boldsymbol{\pi}}_i(u)\big)_{i \in I}$ で表すと、定理 1.7 よりある $a \in \mathbb{C}^\times$ により $\overline{\boldsymbol{\pi}}_i(u) = (1 - au)^{\langle \lambda, \alpha_i \rangle}$ と表せる。この a に対し**カレント代数** $\mathfrak{g}[t] := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ の自己同型 τ_a を $\tau_a\big(x \otimes f(t)\big) = x \otimes f(t + a)$ で定義し、$\mathfrak{g}[t]$ 加群 $L(\boldsymbol{\pi})$ を $L(\boldsymbol{\pi}) := \tau_a^* \overline{L_q(\boldsymbol{\pi})}$ により定義する。この $L(\boldsymbol{\pi})$ を $L_q(\boldsymbol{\pi})$ の**次数付き極限**と呼ぶ。

$L(\boldsymbol{\pi})$ は次節の結果から分かるように $\mathfrak{g}[t]$ 上の $\mathbb{Z}$ 次数付き加群となる。また定義から $\mathrm{ch}\, L_q(\boldsymbol{\pi}) = \mathrm{ch}\, L(\boldsymbol{\pi})$ が成り立ち、また任意の $\mu \in P^+$ に対し $[L_q(\boldsymbol{\pi}) : V_q(\mu)] = [L(\boldsymbol{\pi}) : V(\mu)]$ を満たす。よって $L_q(\boldsymbol{\pi})$ の $U_q(\mathfrak{g})$ 加群としての構造を知るためには、$L(\boldsymbol{\pi})$ の $\mathfrak{g}$ 加群としての構造を調べれば十分である。

2.2　BC 型の極小アフィン化の次数付き極限に関する結果

本節では $\mathfrak{g}$ は BC 型であると仮定する。$\widehat{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ に付随する nontwisted アフィンリー代数、$\widehat{\mathfrak{b}}$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ のボレル部分代数とし、$\widehat{\mathfrak{g}}$ の支配的整ウェイト $\Lambda \in \widehat{P}^+$ に対し $\widehat{V}(\Lambda)$ で最高ウェイト Λ の既約 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群を表す。$\widehat{\mathfrak{g}}$ のウェイトの列 $\xi_1, \ldots, \xi_p \in \widehat{P}$ が与えられたとき、各 k に対し Λ^k を $\widehat{P}^+ \cap \widehat{W}\xi_k$ の唯一の元（$\widehat{W}$ は $\widehat{\mathfrak{g}}$ のワイル群）とし、$D(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ を $V(\Lambda^1) \otimes \cdots \otimes V(\Lambda^p)$ の 1 次元部分空間 $V(\Lambda^1)_{\xi_1} \otimes \cdots \otimes V(\Lambda^p)_{\xi_p}$ から生成される $\widehat{\mathfrak{b}}$-部分加群として定義する。任意の k に対し $\xi_k \in -P^+ + \mathbb{Z}_{\geq 0}\Lambda_0 + \mathbb{C}\delta$ （Λ_0 は基本ウェイト、δ は零ルート）となるとき、$D(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ は

$\mathfrak{g}[t]$ 加群となる。

定理 2.1 ([Nao12, Theorem 4.5]). $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \varpi_i$ とし、$L_q(\boldsymbol{\pi})$ が $V_q(\lambda)$ の極小アフィン化であると仮定する。このとき次数付き極限 $L(\boldsymbol{\pi})$ は $D(w_\circ \xi_1, \dots, w_\circ \xi_n)$ と同型となる。ここで $w_\circ$ は $\mathfrak{g}$ のワイル群の最長元であり、$\xi_1, \dots, \xi_p$ は以下のようにして与えられる。

○ $\mathfrak{g} = B_n$ のとき、

$$\xi_i = \begin{cases} \lambda_i(\varpi_i + \Lambda_0) & (1 \leq i \leq n-1), \\ \lambda_n \varpi_n + \lceil \lambda_n/2 \rceil \Lambda_0 & (i = n). \end{cases}$$

○ $\mathfrak{g} = C_n$ のとき、$J = \{1 \leq i \leq n-1 \mid \lambda_i \neq 0\}$、$\widehat{J} = \{0\} \sqcup J$ とし、$i \in I$ に対し $i^\flat \in \{0\} \sqcup I$ を

$$i^\flat = \begin{cases} \max\{j \in \widehat{J} \mid j < i\} & (i \in J), \\ i & (i \notin J) \end{cases}$$

と定義する。$i \in \widehat{J}$ に対し $p_i \in \{0, 1\}$ を

$$i = \max\{j \in \widehat{J}\} \Rightarrow p_i = 0, \qquad p_{i^\flat} \equiv \lambda_i + p_i \bmod 2 \quad (i \in J)$$

により定め、また $i \in I \setminus J$ に対し $p_i = 0$ とおく。このとき $\xi_1, \dots, \xi_n$ を

$$\xi_i = p_{i^\flat} \varpi_{i^\flat} + (\lambda_i - p_i)\varpi_i + \frac{d_i}{2}\big(\lambda_i - p_i + p_{i^\flat}\big)\Lambda_0.$$

と定める（ただし $\varpi_0 = 0$ とする）。

この定理の系として、極小アフィン化の指標公式が得られる。この結果を紹介するためにいくつか記号の準備をする。$\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群 V の部分 $\widehat{\mathfrak{b}}$ 加群 D と $i \in \{0\} \sqcup I$ に対し $F_i D := U(\mathbb{C} f_i \oplus \widehat{\mathfrak{b}})D \subseteq V$ とおき、$w \in \widehat{W}$ の最短表示が $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ であるとき $F_w D := F_{i_1} \cdots F_{i_k} D$ とする。また Dynkin 図形の自己同型のなす群を Σ で表し、$\tau \in \Sigma$ と最高ウェイト既約 $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群のテンソル積 $\widehat{V}(\Lambda^1) \otimes \cdots \otimes \widehat{V}(\Lambda^p)$ の部分加群 D に対し、$F_\tau D$ で標準的に定義される全単射 $\widehat{V}(\Lambda^1) \otimes \cdots \otimes \widehat{V}(\Lambda^p) \xrightarrow{\sim} \widehat{V}(\tau\Lambda^1) \otimes \cdots \otimes \widehat{V}(\tau\Lambda^p)$ による D の像を表す。すると定理 2.1 で与えられた加群 $D(w_\circ \xi_1, \dots, w_\circ \xi_n)$ は、上で述べた記号を用いて

$$F_{w_\circ w_1}\Big(D(\Lambda^1) \otimes F_{w_2}\Big(D(\Lambda^2) \otimes \cdots \otimes F_{w_{n-1}}\Big(D(\Lambda^{n-1}) \otimes F_{w_n} D(\Lambda^n)\Big) \cdots\Big)\Big) \tag{2.1}$$

と表すことができる。ここで $w_i \in \widehat{W} \rtimes \Sigma$ は $\mathfrak{g} = B_n$ (resp. $\mathfrak{g} = C_n$) のとき

$$w_i = s_{i-1} s_{i-2} \cdots s_1 \tau_{01} \quad (\text{resp. } w_i = s_{i-1} s_{i-2} \cdots s_1 s_0)$$

($\tau_{01} \in \Sigma$ は頂点 0 と 1 を入れ替える Dynkin 図形の自己同型)、$\Lambda^i \in \widehat{P}^+$ は $\Lambda^i = w_i^{-1} w_{i-1}^{-1} \cdots w_1^{-1} \xi_i$ と定義する。

$i \in I$ に対し $\mathbb{C}[\widehat{P}]$ 上の作用素 D_i を

$$D_i(f) = \frac{f - e^{-\alpha_i} s_i(f)}{1 - e^{-\alpha_i}}$$

により定義し、$\widehat{W} \ni w = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ が最短表示であるとき $D_w = D_{i_1} \cdots D_{i_k}$ とおく。D_w は **Demazure 作用素**と呼ばれる。また $\tau \in \Sigma$ に対し、$D_{w\tau} := D_w \circ \tau$ とする。このとき加群 (2.1) の（$\widehat{\mathfrak{g}}$ のカルタン部分代数 $\widehat{\mathfrak{h}}$ に関する）指標は [LLM02, Theorem 5] により

$$\mathcal{D}_{w_\circ w_1}\Big(e^{\Lambda^1} \cdot \mathcal{D}_{w_2}\Big(e^{\Lambda^2} \cdots \mathcal{D}_{w_{n-1}}\Big(e^{\Lambda^{n-1}} \cdot \mathcal{D}_{w_n}(e^{\Lambda^n})\Big) \cdots\Big)\Big)$$

と表すことができる。$\mathrm{ch}\, L_q(\boldsymbol{\pi}) = \mathrm{ch}\, L(\boldsymbol{\pi})$ であるから、以下が得られる。

系 2.2 ([Nao12, Corollary 4.10])**.**

$$\mathrm{ch}\, L_q(\boldsymbol{\pi}) = \mathcal{D}_{w_\circ w_1}\Big(e^{\Lambda^1} \cdot \mathcal{D}_{w_2}\Big(e^{\Lambda^2} \cdots \mathcal{D}_{w_{n-1}}\Big(e^{\Lambda^{n-1}} \cdot \mathcal{D}_{w_n}(e^{\Lambda^n})\Big) \cdots\Big)\Big)\Big|_{e^{\Lambda_0}=e^{\delta}=1}.$$

ただし δ は零ルートを表す。

また加群 (2.1) に対応する結晶基底の部分集合を用いることで、次数付き極限 $L(\boldsymbol{\pi})$ の $\mathfrak{g}$ 加群としての重複度を組合せ論的に与えることもできる。これはすなわち、極小アフィン化 $L_q(\boldsymbol{\pi})$ の $U_q(\mathfrak{g})$ 加群としての重複度を与えることに他ならない。（詳しくは [Nao12, Corollary 4.11] を参照頂きたい。）

[Nao12] では、極小アフィン化の次数付き極限の定義関係式も決定した。その結果について述べて、本稿を終えたいと思う。Δ_+ を $\mathfrak{g}$ の正ルートの集合とし、その部分集合 Δ_+^1 を

$$\Delta_+^1 = \{\alpha = \sum_{i \in I} n_i \alpha_i \in \Delta_+ \mid \text{全ての } i \text{ に対し } n_i \leq 1\}$$

と定義する。

定理 2.3 ([Nao12, Theorem 4.6])**.** $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \varpi_i$ とし、$L_q(\boldsymbol{\pi})$ が $V_q(\lambda)$ の極小アフィン化であると仮定する。このとき次数付き極限 $L(\boldsymbol{\pi})$ は、v から以下の関係式によって生成される $\mathfrak{g}[t]$ 加群と同型である。

$$\begin{gathered}\mathfrak{n}_+[t]v = 0, \quad (h \otimes t^s)v = \delta_{s0}\langle h, \lambda\rangle v \ (h \in \mathfrak{h}, s \geq 0), \quad f_i^{\lambda_i+1} v = 0 \ (i \in I), \\ t^2\mathfrak{n}_-[t]v = 0, \quad (f_\alpha \otimes t)v = 0 \ (\alpha \in \Delta_+^1).\end{gathered}$$

参考文献

[Cha95] V. Chari. Minimal affinizations of representations of quantum groups: the rank 2 case. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 31(5):873–911, 1995.

[CP94] V. Chari and A. Pressley. *A guide to quantum groups.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[CP95a] V. Chari and A. Pressley. Minimal affinizations of representations of quantum groups: the nonsimply-laced case. *Lett. Math. Phys.*, 35(2):99–114, 1995.

[CP95b] V. Chari and A. Pressley. Quantum affine algebras and their representations. In *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, volume 16 of *CMS Conf. Proc.*, pages 59–78. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[CP96a] V. Chari and A. Pressley. Minimal affinizations of representations of quantum groups: the irregular case. *Lett. Math. Phys.*, 36(3):247–266, 1996.

[CP96b] V. Chari and A. Pressley. Minimal affinizations of representations of quantum groups: the simply laced case. *J. Algebra*, 184(1):1–30, 1996.

[Her06] D. Hernandez. The Kirillov-Reshetikhin conjecture and solutions of T-systems. *J. Reine Angew. Math.*, 596:63–87, 2006.

[Her07] D. Hernandez. On minimal affinizations of representations of quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, 276(1):221–259, 2007.

[Jim86] M. Jimbo. A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation. *Lett. Math. Phys.*, 11(3):247–252, 1986.

[Kac90] V.G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras.* Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990.

[LLM02] V. Lakshmibai, P. Littelmann, and P. Magyar. Standard monomial theory for Bott-Samelson varieties. *Compositio Math.*, 130(3):293–318, 2002.

[Mou10] A. Moura. Restricted limits of minimal affinizations. *Pacific J. Math.*, 244(2):359–397, 2010.

[MY12a] E. Mukhin and C. A. S. Young. Extended T-systems. *Selecta Math. (N.S.)*, 18(3):591–631, 2012.

[MY12b] E. Mukhin and C. A. S. Young. Affinization of category $\mathcal{O}$ for quantum groups. math.QA/1204.2769.

[Nak03] H. Nakajima. t-analogs of q-characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantum affine algebras. *Represent. Theory*, 7:259–274 (electronic), 2003.

[Nao12] K. Naoi. Demazure modules and graded limits of minimal affinizations. math.QA/1210.0175.