Demazure module, Demazure crystal と X=M 予想

直井克之

東大数理

2011 年 6 月 4 日

Plan

1. $X = M$ 予想
   (i) X: $\mathbf{1}$-dimensional sum
   (ii) M: fermionic form
   (iii) Statement
2. non-twisted, simply-laced, nonexceptional の場合の $X = M$ 予想の証明

Kirillov Reshetikhin module

$\mathfrak{g}$: affine Lie algebra, $I = \{0, \dots, n\}$, $I_0 = I \setminus \{0\}$,

$\mathfrak{g}_0 \subseteq \mathfrak{g}$: I_0 に関する simple Lie subalgebra.

$W^{r,s}$: Kirillov-Reshetikhin module $(r \in I_0, s \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$.

:ある Drinferd 多項式により定義される有限次元既約 $U'_q(\mathfrak{g})$-module.

Kirillov-Reshetikhin crystal

Conjecture

任意の r, s に対し、$W^{r,s}$ は crystal basis $B^{r,s}$ を持つ.

$B^{r,s}$: Kirillov-Reshetikhin crystal (KR crystal).

Conjecture

任意の r, s に対し、$W^{r,s}$ は crystal basis $B^{r,s}$ を持つ.

$B^{r,s}$: Kirillov-Reshetikhin crystal (KR crystal).

Theorem

以下の場合に予想は正しい.

(i) ${}^\forall\mathfrak{g}$, ${}^\forall r$, $s = 1$ [Kashiwara, 2002],

(ii) $\mathfrak{g}$: nonexceptional type, ${}^\forall r$, ${}^\forall s$, [Okado, Schilling, 2008],

(iii) その他いくつかの場合.

local energy function

$B_1 = B^{r_1,s_1}, B_2 = B^{r_2,s_2}$: KR crystals.

∘ $B_1 \otimes B_2$ は連結,

∘ $^{\exists!}R : B_1 \otimes B_2 \xrightarrow{\sim} B_2 \otimes B_1$: combinatorial R-matrix.

$H : B_1 \otimes B_2 \to \mathbb{Z}$ (local energy function) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

- 各 $U_q(\mathfrak{g}_0)$-component で定数,
- $b_1 \otimes b_2 \in B_1 \otimes B_2$, $R(b_1 \otimes b_2) = \tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1$ に対し

$$H(e_0(b_1 \otimes b_2)) =$$
$$\begin{cases} H(b_1 \otimes b_2) + 1 & e_0(b_1 \otimes b_2) = e_0 b_1 \otimes b_2, \\ & e_0(\tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1) = e_0 \tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1, \\ H(b_1 \otimes b_2) - 1 & e_0(b_1 \otimes b_2) = b_1 \otimes e_0 b_2, \\ & e_0(\tilde{b}_2 \otimes \tilde{b}_1) = \tilde{b}_2 \otimes e_0 \tilde{b}_1, \\ H(b_1 \otimes b_2) & \text{otherwise}, \end{cases}$$

を満たす関数 (定数差を除いて一意に存在).

Λ_i $(i \in I)$:　$\mathfrak{g}$ の fundamental weight,

KR crystal のテンソル積 B 上の関数 $D : B \to \mathbb{Z}$ (energy function) を以下で定義:

Λ_i $(i \in I)$: $\mathfrak{g}$ の fundamental weight,

KR crystal のテンソル積 B 上の関数 $D : B \to \mathbb{Z}$ (energy function) を以下で定義:

(1) $B = B^{r,s}$ のとき:

ある特別な元 $b^\natural \in B$ に対し,

$$D(b) := H(b^\natural \otimes b)$$

と定義.

(2) $B = B_1 \otimes \cdots \otimes B_p$ $(B_i = B^{r_i,s_i})$ のとき:

$b_1 \otimes \cdots \otimes b_p \in B$, $1 \le i \le j \le p$ に対し

$b_j^{(i)}$ で

$$\begin{aligned} B_i \otimes B_{i+1} \otimes \cdots \otimes B_j &\xrightarrow{\sim} B_j \otimes B_i \otimes \cdots \otimes B_{j-1} \\ b_i \otimes b_{i+1} \otimes \cdots \otimes b_j &\mapsto b_j^{(i)} \otimes \tilde{b}_i \otimes \cdots \otimes \tilde{b}_{j-1} \end{aligned}$$

を表し,

$$D(b_1 \otimes \cdots \otimes b_p) := \sum_{1 \le i \le p} D(b_i^{(1)}) + \sum_{1 \le i < j \le p} H(b_i \otimes b_j^{(i+1)})$$

と定義.

energy function と $B(\Lambda)$ の関係

$B(\Lambda)$: highest weight Λ の integrable highest weight
$U_q(\mathfrak{g})$-加群 $V(\Lambda)$ の crystal basis.

$U'_q(\mathfrak{g})$-crystal B が "perfect"のとき

$$\text{“}\cdots \otimes B \otimes B \otimes B\text{”} \xrightarrow{\sim} B({}^{\exists}\Lambda) \quad \text{(path realization)}.$$

上の同型において左辺における energy function は右辺において $-\langle \mathrm{wt}(b), d\rangle$ に対応する.

energy function と $B(\Lambda)$ の関係

$B(\Lambda)$: highest weight Λ の integrable highest weight $U_q(\mathfrak{g})$-加群 $V(\Lambda)$ の crystal basis.

$U_q'(\mathfrak{g})$-crystal B が "perfect"のとき

$$\text{“}\cdots \otimes B \otimes B \otimes B\text{”} \xrightarrow{\sim} B({}^{\exists}\Lambda) \quad \text{(path realization)}.$$

上の同型において左辺における energy function は右辺において $-\langle \mathrm{wt}(b), d\rangle$ に対応する.

$$\text{“}U_q'(\mathfrak{g})\text{-weight} \overset{\text{energy function}}{\Longrightarrow} U_q(\mathfrak{g})\text{-weight”}.$$

1-dimensional sum X

$P_0{}^+$: $\mathfrak{g}_0$ の dominant integral weight の集合,

$V_0(\mu)$: highest weight $\mu \in P_0{}^+$ の既約 $U_q(\mathfrak{g}_0)$-加群.

$T = ((r_1, s_1), \ldots, (r_p, s_p)) \in (I_0 \times \mathbb{Z}_{\geq 1})^p$,

$$B^T := B^{r_1,s_1} \otimes \cdots \otimes B^{r_p,s_p}.$$

1-dimensional sum X

$P_0{}^+$: $\mathfrak{g}_0$ の dominant integral weight の集合,

$V_0(\mu)$: highest weight $\mu \in P_0{}^+$ の既約 $U_q(\mathfrak{g}_0)$-加群.

$T = ((r_1, s_1), \ldots, (r_p, s_p)) \in (I_0 \times \mathbb{Z}_{\geq 1})^p$,

$$B^T := B^{r_1,s_1} \otimes \cdots \otimes B^{r_p,s_p}.$$

Definition (1-dimensional sum)

$\mu \in P_0{}^+$ に対し, q を変数とする多項式 $X(T, \mu, q)$ を

$$X(T, \mu, q) = \sum_{\substack{b \in B^T \\ e_j b = 0 \ (j \in I_0) \\ \mathrm{wt}(b) = \mu}} q^{D(b)}$$

と定義し、1-dimensional sum と呼ぶ.

Remark

$W^T = W^{r_1,s_1} \otimes \cdots \otimes W^{r_p,s_p}$ とおくと, B^T が W^T の crystal basis であることから

$$X(T, \mu, 1) = [W^T : V_0(\mu)]$$

が従う.

∴ 1-dimensional sum $X(T, \mu, q)$ は W^T の $U_q(\mathfrak{g}_0)$-加群に関する重複度の q-analog.

簡単のために, $\mathfrak{g} \neq A_{2n}^{(2)}$ とする.

Notation

α_i $(i \in I)$: $\mathfrak{g}$ の単純 root,
$\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}$ の Cartan Lie subalgebra,
W: $\mathfrak{g}$ の Weyl 群,
$(\ ,\ )$: $\mathfrak{h}^*$ 上の W-不変な双線形形式で $(\alpha_0, \alpha_0) = 2$,
ϖ_i $(i \in I_0)$: $\mathfrak{g}_0$ の fundamental weight.

$$t_i = \begin{cases} \frac{2}{(\alpha_i,\alpha_i)} & \mathfrak{g}\text{: non-twisted,} \\ 1 & \mathfrak{g}\text{: is twisted,} \end{cases}$$

$${}^t t_i : \ t_i \text{ for } {}^t\mathfrak{g},$$

$$\begin{bmatrix} p+m \\ m \end{bmatrix}_q = \frac{\prod_{j=1}^{m}(1-q^{p+j})}{\prod_{j=1}^{m}(1-q^{j})},$$

$T = ((r_1, s_1), \ldots, (r_p, s_p))$ に対し,

$$\#(i,u) = \#\{j \mid r_j = i, s_j = u\}.$$

$M(T,\mu,q)$ を以下で定義 (fermionic form):

$$M(T,\mu,q) = \sum_{\substack{m=\{m_i^{(u)}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}_{i\in I_0,u\geq 1}\\ \text{s.t } p_i^{(u)}\geq 0\ ({}^\forall i,u)\\ \sum_{i,u} u m_i^{(u)}\alpha_i=\sum_{i,u}\#(i,u)u\varpi_i-\mu}} q^{c(m)} \prod_{i\in I_0,u\geq 1} \begin{bmatrix} p_i^{(u)}+m_i^{(u)} \\ m_i^{(u)} \end{bmatrix}_{q^{t_i}},$$

$$c(m) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\in I_0\\ u,v\geq 1}} (\alpha_i,\alpha_j)\min(ut_j,vt_i)m_i^{(u)}m_j^{(v)}$$

$$-\sum_{i\in I^0} {}^t t_i \sum_{u,v\geq 1}\min\{u,v\}m_i^{(v)}\#(i,u),$$

$$p_i^{(u)} = \sum_{v\geq 1}\min\{u,v\}\#(i,u) - \frac{1}{{}^t t_i}\sum_{\substack{j\in I_0\\ v\geq 1}}(\alpha_i,\alpha_j)\min\{ut_j,vt_i\}m_j^{(v)}.$$

X=M 予想

Conjecture (X=M 予想, [Hatayama, Kuniba, Okado, Takagi, Yamada, 1999])

ある μ によらない定数 C に対し

$$X(T,\mu,q) = q^C M(T,\mu,q).$$

Conjecture (X=M 予想, [Hatayama, Kuniba, Okado, Takagi, Yamada, 1999])

ある μ によらない定数 C に対し

$$X(T,\mu,q) = q^{C} M(T,\mu,q).$$

Theorem (Kirillov-Reshetikhin conjecture, [Chari], [Nakajima], [Hernandez], [Di Francesco, Kedem])

$$[W^{T} : V_0(\mu)] = M(T,\mu,1).$$

$X = M$ 予想とは?

"$W^{r,s}$ たちのテンソル積の分解公式の q-analog."

Theorem

以下の場合に予想は正しい.

- $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$, ${}^\forall T$, [Kirillov, Schilling, Shimozono, 2002],
- $\mathfrak{g}$: nonexceptional type, T: $\mathfrak{g}$ **の** rank **に比べて** "**小さい**" [Lecouvey, Okado, Shimozono, 2010], [Okado, Sakamoto, 2010],
- ${}^\forall\mathfrak{g}$, T: $s_i = 1$ for all i [N],
- **その他いくつかの場合**,

Theorem

以下の場合に予想は正しい.

- $\mathfrak{g} = A_n^{(1)}$, ${}^\forall T$, [Kirillov, Schilling, Shimozono, 2002],
- $\mathfrak{g}$: nonexceptional type, T: $\mathfrak{g}$ **の** rank **に比べて** “**小さい**” [Lecouvey, Okado, Shimozono, 2010], [Okado, Sakamoto, 2010],
- ${}^\forall\mathfrak{g}$, T: $s_i = 1$ for all i [N],
- **その他いくつかの場合**,
- $\mathfrak{g}$: non-twisted, simply-laced, nonexceptional ($D_n^{(1)}$), ${}^\forall T$, $\Longleftarrow$ **今回の結果**

以下, non-twisted, simply-laced, nonexceptional **の場合に関する証明の概略を述べる**.

証明の流れ

$\mathfrak{b}$: $\mathfrak{g}$ の Borel Lie subalgebra.

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{V(\Lambda^1) \otimes \cdots \otimes V(\Lambda^p)} : \ \boldsymbol{U_q(\mathfrak{g})}\text{-module} \\ \qquad \cup \\ \quad {}^{\exists}\boldsymbol{S_q(T)} : \boldsymbol{U_q(\mathfrak{b})}\text{-submodule} \end{array}$$

証明の流れ

$\mathfrak{b}$: $\mathfrak{g}$ の Borel Lie subalgebra.

$$\begin{array}{l} V(\Lambda^1)\otimes\cdots\otimes V(\Lambda^p) : U_q(\mathfrak{g})\text{-module} \\ \qquad\quad \cup \\ \qquad {}^{\exists}S_q(T) : U_q(\mathfrak{b})\text{-submodule} \end{array}$$

$$\overset{q\to 0}{\Longrightarrow} S_0(T) \subset B(\Lambda^1)\otimes\cdots\otimes B(\Lambda^p)$$

$$\overset{\mathrm{ch}}{\Longrightarrow} \sum_{\mu\in P_0{}^+} X(T,\mu,q)\,\mathrm{ch}\,V_0(\mu)$$

証明の流れ

$\mathfrak{b}$: $\mathfrak{g}$ の Borel Lie subalgebra.

$$\boldsymbol{V(\Lambda^1)\otimes\cdots\otimes V(\Lambda^p)}: \ \boldsymbol{U_q(\mathfrak{g})}\text{-module}$$

$$\cup$$

$$^{\exists}\boldsymbol{S_q(T)}: \boldsymbol{U_q(\mathfrak{b})}\text{-submodule}$$

$$\overset{q\to 0}{\Longrightarrow} \boldsymbol{S_0(T)} \subset \boldsymbol{B(\Lambda^1)\otimes\cdots\otimes B(\Lambda^p)}$$

$$\overset{\mathrm{ch}}{\Longrightarrow} \sum_{\mu\in {P_0}^+} \boldsymbol{X(T,\mu,q)\,\mathrm{ch}\,V_0(\mu)}$$

$$\overset{q\to 1}{\Longrightarrow} \boldsymbol{S_1(T)}: \boldsymbol{U(\mathfrak{b})}\text{-module} \overset{\mathrm{ch}}{\Longrightarrow} \sum_{\mu\in {P_0}^+} \boldsymbol{M(T,\mu,q)\,\mathrm{ch}\,V_0(\mu)}$$

$\mathfrak{g}$: general affine Lie algebra,

$\Lambda \in P^+$, $w \in W$ に対し $\dim V(\Lambda)_{w\Lambda} = 1$,

$0 \neq v \in V(\Lambda)_{w\Lambda}$ に対し,

$$V(\Lambda) \supseteq V_w(\Lambda) := U_q(\mathfrak{b})v : \quad \text{Demazure module}.$$

w_0: $\mathfrak{g}_0$ の Weyl 群 W_0 の最長元.

Theorem ([Chari], et al.)

各 $r \in I_0$ に対しある値 $c_r \in \{1,2,3\}$ が存在し, $c_r \mid s$ ならば $U_q(\mathfrak{g}_0)$-加群として

$$W^{r,s} \cong V_{w_r}(s\Lambda_{i_r}/c_r)$$

となる. ただし $i_r \in I$, $w_r \in W$: $w_r(\Lambda_{i_r}) = c_r w_0(\varpi_r) + \Lambda_0$.

しかも, $\mathfrak{g}$ が non-twisted simply-laced, または twisted
$\Longrightarrow$ すべての r に対し $c_r = 1$.

$B^{r,s}$ と Demazure crystal

$$V(\Lambda) \stackrel{q\to 0}{\Longrightarrow} B(\Lambda)$$

$$\cup \qquad\qquad \cup$$

$$V_w(\Lambda) \stackrel{q\to 0}{\Longrightarrow} B_w(\Lambda)$$: Demazure crystal

$B^{r,s}$ と Demazure crystal

$$
\begin{array}{ccc}
V(\Lambda) & \overset{q\to 0}{\Longrightarrow} & B(\Lambda) \\
\cup & & \cup \\
V_w(\Lambda) & \overset{q\to 0}{\Longrightarrow} & B_w(\Lambda)
\end{array}
$$

$B_w(\Lambda)$: Demazure crystal

$u_\Lambda \in B(\Lambda)$: highest weight element.

Theorem ([Fourier, Schilling, Shimozono, 2007])

$\mathfrak{g}$ が nonexceptional で $c_r \mid s$ のとき,

$$u_{s\Lambda_0/c_r} \otimes B^{r,s} \cong B_{w_r}(s\Lambda_{i_r}/c_r)$$

であり, energy function は右辺において $-\langle \mathrm{wt}(b), d\rangle$ と定数差を除いて一致する.

以下, $T = ((r_1, s_i), \cdots (r_p, s_p))$ は $c_{r_j} \mid s_j$ ($^\forall j$) と仮定する.

上で述べたように,

$$W^{r,s} \longleftrightarrow V_{w_r}(s\Lambda_{i_r}/c_r).$$

上で述べたように,

$$W^{r,s} \longleftrightarrow V_{w_r}(s\Lambda_{i_r}/c_r).$$

$$W^T = W^{r_1,s_1} \otimes \cdots \otimes W^{r_p,s_p} \longleftrightarrow S_q(T)$$

を構成したい.

上で述べたように,

$$W^{r,s} \longleftrightarrow V_{w_r}(s\Lambda_{i_r}/c_r).$$

$$W^T = W^{r_1,s_1} \otimes \cdots \otimes W^{r_p,s_p} \longleftrightarrow S_q(T)$$

を構成したい.

素朴には

$$\text{“}S_q(T) = V_{w_{r_1}}(s_1\Lambda_{i_{r_1}}/c_{r_1}) \otimes \cdots \otimes V_{w_{r_p}}(s_p\Lambda_{i_{r_p}}/c_{r_p}).\text{”}$$

これではうまくいかないので, 少し異なる構成をする.

$\mathfrak{b}_i := \mathfrak{b} \oplus \mathbb{C} f_i$ $(i \in I)$: parabolic Lie subalgebra,
V: $U_q(\mathfrak{g})$-module, $V \supseteq W$: $U_q(\mathfrak{b})$-submodule に対し,

$$V \supseteq \mathcal{F}_i W := U_q(\mathfrak{b}_i) W.$$

$U_\Lambda := \mathbb{C}(q) u_\Lambda \subseteq V(\Lambda)$: 1 次元 $U_q(\mathfrak{b})$-submodule,

$\mathfrak{b}_i := \mathfrak{b} \oplus \mathbb{C} f_i$ ($i \in I$): parabolic Lie subalgebra,
V: $U_q(\mathfrak{g})$-module, $V \supseteq W$: $U_q(\mathfrak{b})$-submodule に対し,

$$V \supseteq \mathcal{F}_i W := U_q(\mathfrak{b}_i)W.$$

$U_\Lambda := \mathbb{C}(q)u_\Lambda \subseteq V(\Lambda)$: 1 次元 $U_q(\mathfrak{b})$-submodule,

$c_r \mid s$ となる r, s に対し,
τ_r: diagram automorphism such that $\tau_r^* U_{\Lambda_0} \cong U_{\Lambda_{i_r}}$,
$w_r = s_{i_k} \cdots s_{i_1}$ を最短表示とするとき,

$$\mathcal{F}_{i_k} \cdots \mathcal{F}_{i_1} \tau_r^* U_{s\Lambda_0 / c_r} \cong V_{w_r}(s\Lambda_{i_r}/c_r).$$

$\mathcal{F}^r := \mathcal{F}_{i_k} \cdots \mathcal{F}_{i_1} \tau_r^*$ とおく.

Proposition

$T = ((r_1, s_1), \cdots, (r_p, s_p))$, $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対し,
$\sigma T = ((r_{\sigma(1)}, s_{\sigma(1)}), \cdots, (r_{\sigma(p)}, s_{\sigma(p)}))$ とおくと,

$$X(T, \mu, q) = X(\sigma T, \mu, q), \quad M(T, \mu, q) = M(\sigma T, \mu, q)$$

となる.

T に対し

$$s'_i = s_i / c_{r_i}$$

とおき, 以下 T は

$$s'_1 \geq s'_2 \geq \cdots \geq s'_p$$

を満たすと仮定する.

T に対し

$$S_q(T) := \mathcal{F}^{r_1}(U_{(s'_1-s'_2)\Lambda_0} \otimes \mathcal{F}^{r_2}(U_{(s'_2-s'_3)\Lambda_0} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}^{r_{p-1}}(U_{(s'_{p-1}-s'_p)\Lambda_0} \otimes \mathcal{F}^{r_p} U_{s'_p\Lambda_0}) \cdots)) \subseteq V((s'_1 - s'_2)\Lambda_{\tau^p(0)}) \otimes \cdots \otimes V(s'_p\Lambda_{\tau^1(0)}),$$

ただし, $\tau^j = \tau_p^{-1} \circ \cdots \circ \tau_j^{-1}$.

$S_0(T)$ と 1-dimensional sum の関係

$$S_q(T) \subseteq V((s'_1 - s'_2)\Lambda_{\tau^p(0)}) \otimes \cdots \otimes V(s'_p\Lambda_{\tau^p(0)})$$

$S_0(T)$ と 1-dimensional sum の関係

$$S_q(T) \subseteq V((s'_1 - s'_2)\Lambda_{\tau^p(0)}) \otimes \cdots \otimes V(s'_p\Lambda_{\tau^p(0)})$$

$$\overset{q \to 0}{\Longrightarrow}$$

$$S_0(T) \subseteq B((s'_1 - s'_2)\Lambda_{\tau^1(0)}) \otimes \cdots \otimes B(s'_p\Lambda_{\tau^p(0)}).$$

Theorem

$\mathfrak{g}$ が nonexceptional のとき,

$$u_{s'_p\Lambda_0} \otimes B^T \cong S_0(T)$$

であり, energy function は右辺において $-\langle \mathrm{wt}(b), d\rangle$ と定数差を除いて一致する.

Theorem

$\mathfrak{g}$ が nonexceptional のとき,

$$u_{s'_p\Lambda_0} \otimes B^T \cong S_0(T)$$

であり, energy function は右辺において $-\langle \mathrm{wt}(b), d\rangle$ と定数差を除いて一致する.

Corollary

$\mathfrak{g}$ が nonexceptional のとき,

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}\, S_0(T)(= \mathrm{ch}\, S_q(T)) &= \sum_{b \in B^T} q^{D(b)+C} e(\mathrm{wt}(b)) \\ &= \sum_{\lambda \in P_0{}^+} q^C X(T, \mu, q) \mathrm{ch}\, V_0(\mu). \end{aligned}$$

ただし $q = e(-\delta)$ とおいた.

$S_1(T)$ と fermionic form の関係

$D^{r,s} := \lim_{q\to 1} V_{w_r}(s\Lambda_{i_r}/c_r)$: (classical) Demazure module

$\Longleftarrow U(\mathfrak{b})$-module.

Theorem (Di Francesco, Kedem, 2008)

$$\mathrm{ch}\,(D^{r_1,s_1} * D^{r_2,s_2} * \cdots * D^{r_p,s_p}) = \sum_{\mu\in P_0{}^+} M(T,\mu,q)\mathrm{ch}\,V_0(\mu).$$

$* \approx \otimes$: fusion product defined by Feigin, Loktev.

(V, W: cyclic $U(\mathfrak{b})$-modules $\Longrightarrow V * W$: cyclic $U(\mathfrak{b})$-module).

$S_1(T) := \lim_{q\to 1} S_q(T)$.

Theorem

$\mathfrak{g}$ が non-twisted, simply-laced のとき,

$$D^{r_1,s_1} * D^{r_2,s_2} * \cdots * D^{r_p,s_p} \cong S_1(T).$$

$S_1(T) := \lim_{q\to 1} S_q(T)$.

Theorem

$\mathfrak{g}$ が non-twisted, simply-laced のとき,

$$D^{r_1,s_1} * D^{r_2,s_2} * \cdots * D^{r_p,s_p} \cong S_1(T).$$

Corollary

$\mathfrak{g}$ が non-twisted, simply-laced のとき,

$$\mathrm{ch}\, S_1(T) (= \mathrm{ch}\, S_q(T)) = \sum_{\mu\in {P_0}^+} M(T,\mu,q)\mathrm{ch}\, V_0(\mu).$$

Corollary

$\mathfrak{g}$ が non-twisted, simply-laced, nonexceptional のとき,

$$M(T,\mu,q) = q^{C} X(T,\mu,q)$$

が成り立つ.