

Demazure 加群、Demazure クリスタルと $X = M$ 予想

直井克之

概要

量子アファイン代数の有限次元既約加群である Kirillov-Reshetikhin 加群のテンソル積には、フェルミ型公式と呼ばれる分解公式が知られている。この分解公式を q -変形したものが $X = M$ 予想であり、 $A_n^{(1)}$ 型の場合には Kirillov、Schilling、Shimozono により [13] において証明が与えられた。本稿では $X = M$ 予想について解説するとともに、近年新しく得られた Demazure 加群と Demazure クリスタルを用いた $D_n^{(1)}$ 型の場合の証明（同時に $A_n^{(1)}$ 型の場合の別証明）について概略を述べようと思う。（詳しくはプレプリント [19, 20] をご参照ください。）

研究集会において講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの池田先生と鈴木先生に、この場を借りてお礼申し上げます。

1 $X=M$ 予想

1.1 Kirillov-Reshetikhin 予想

\mathfrak{g} を Cartan 行列が $A = (a_{ij})$ であるようなアファイン Kac-Moody Lie 代数とし、 $I = \{0, 1, \dots, n\}$ で \mathfrak{g} の単純ルートの添え字集合を表す。また \mathfrak{g}_0 を $I_0 = I \setminus \{0\}$ に対応する \mathfrak{g} の単純部分 Lie 代数とする。（本稿における単純ルートの添え字付けは Kac [11] に従う。） $U_q(\mathfrak{g})$ で対応する量子アファイン代数、 $U_q(\mathfrak{g}_0)$ で $U_q(\mathfrak{g})$ から次数作用素を取り除いたものをそれぞれ表すことにする。また $U_q(\mathfrak{g}_0) \subseteq U_q(\mathfrak{g})$ で対応する部分代数を表す。

$U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元既約加群には、Kirillov-Reshetikhin 加群と呼ばれる特別なクラスが知られている。（省略のため、KR 加群と呼ぶことにする。）KR 加群は I_0 の元と正の整数の組によってパラメトライズされ、 $W^{r,\ell}$ ($r \in I_0, \ell \in \mathbb{Z}_{>0}$) と表される。KR 加群は他の有限次元既約加群に比べ、様々な良い性質を持つことが知られている（または期待されている）。例えば全ての KR 加群は結晶基底を持つと予想されており、非例外型の場合には実際に証明も与えられている [22]。また KR 加群のテンソル積は、以下で述べるフェルミ型公式と呼ばれる分解公式を満たすことも知られている。

簡単のため $\mathfrak{g} \neq A_{2n}^{(2)}$ とする。 P (resp. P_0) で \mathfrak{g} (resp. \mathfrak{g}_0) のウェイト格子、 $P^+ \subseteq P$ (resp. $P_0^+ \subseteq P_0$) で支配的整ウェイトの集合を表す。 $I_0 \times \mathbb{Z}_{>0}$ の元の列 $\nu = ((r_1, \ell_1), \dots, (r_p, \ell_p))$ と $\mu \in P_0^+$ が与えられたとし、各 $r \in I_0, \ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し非負整数 $n_{r,\ell}$ を $n_{r,\ell} = \#\{1 \leq j \leq p \mid r_j = r, \ell_j = \ell\}$ によって定義する。非負整数の無限列 $\mathbf{m} = \{m_\ell^{(r)}\}_{r \in I_0, \ell \in \mathbb{Z}_{>0}}$ で和が有限なものに対し、各 $r \in I_0$ と $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ ごとに vacancy 数

$$p_\ell^{(r)} (= p_\ell^{(r)}(\mathbf{m})) = \sum_{s \in \mathbb{Z}_{>0}} n_{r,s} \min\{\ell, s\} - \frac{1}{t_r} \sum_{j \in I_0, s \in \mathbb{Z}_{>0}} (\alpha_r, \alpha_j) \min\{t_j, st_r\} m_s^{(j)}$$

が定義される。ここで α_r は単純ルート、 $(,)$ は P 上の Weyl 群不変対称双線形形式で $(\alpha_0, \alpha_0) = 2$ となる

もの、 t_r は

$$t_r = \begin{cases} \frac{2}{(\alpha_r, \alpha_r)} & \mathfrak{g} : \text{non-twisted,} \\ 1 & \mathfrak{g} : \text{twisted,} \end{cases}$$

${}^t t_r$ は ${}^t \mathfrak{g}$ (${}^t A$ に付随するアファイン Lie 代数) に関する t_r を表す。フェルミ型公式 $M(\nu, \mu)$ はこれらを用いて

$$M(\nu, \mu) = \sum_{\mathbf{m}} \prod_{r \in I_0, \ell \in \mathbb{Z}_{>0}} \binom{p_\ell^{(r)} + m_\ell^{(r)}}{m_\ell^{(r)}} \quad (1.1)$$

により定義される。ただし $\sum_{\mathbf{m}}$ は、以下の二条件を満たす $\mathbf{m} = \{m_\ell^{(r)}\}_{r \in I_0, \ell \in \mathbb{Z}_{>0}}$ を走ることとする：

$$(i) \text{ 任意の } r, \ell \text{ に対し, } p_\ell^{(r)}(\mathbf{m}) \geq 0, \quad (ii) \sum_{r, \ell} \ell m_\ell^{(r)} \alpha_r = \sum_{r, \ell} n_{r, \ell} \ell \varpi_r - \mu$$

(ϖ_r は \mathfrak{g}_0 の基本ウェイト) このとき KR 加群のテンソル積 $W^\nu = W^{r_1, \ell_1} \otimes \cdots \otimes W^{r_p, \ell_p}$ は以下を満たすことが知られている。

定理 1.1. $U_q(\mathfrak{g}_0)$ の最高ウェイト μ の既約加群を $V_{q,0}(\mu)$ と表すとき、 W^ν は $U_q(\mathfrak{g}_0)$ 加群として

$$[W^\nu : V_{q,0}(\mu)] = M(\nu, \mu) \quad (1.2)$$

と分解する。

この分解公式は (すでに定理であるが) Kirillov-Reshetikhin 予想と呼ばれる。この予想がどのように証明されたかについても簡単に触れておこう。(1.1) において、 $\sum_{\mathbf{m}}$ を (条件 (i) を必ずしも満たさない) 条件 (ii) を満たすすべての \mathbf{m} を走らせることで得られる値を $N(\nu, \mu)$ と表す。このとき $[W^\nu : V_{q,0}(\mu)] = N(\nu, \mu)$ という等式は、KR 加群の指標が Q -system と呼ばれる関係式を満たすことと同値であることが知られている [6, 5]。KR 加群が T -system と呼ばれる関係式を満たすことが [17, 7] により示され、その帰結として Q -system を満たすことが証明できる。この結果と [3] において示された等式 $M(\nu, \mu) = N(\nu, \mu)$ から、(1.2) が従う。(non-twisted かつ非例外型の場合には、[1] において全く異なる証明が得られている。)

1.2 $X = M$ 予想

$X = M$ 予想は Kirillov-Reshetikhin 予想の q -変形というべきものである。すなわち、(1.2) の両辺の q -変形であるような二つの q を変数とする多項式の間にも、やはり等号が成立することが期待されるのである。

右辺の q -変形は以下のように定義される。非負整数の無限列 $\mathbf{m} = \{m_\ell^{(r)}\}_{r \in I_0, \ell \in \mathbb{Z}_{>0}}$ に対し $c(\mathbf{m})$ が

$$c(\mathbf{m}) = \frac{1}{2} \sum_{r, j \in I_0, \ell, s \in \mathbb{Z}_{>0}} (\alpha_r, \alpha_j) \min\{\ell t_j, s t_r\} m_\ell^{(r)} m_s^{(j)} - \sum_{r \in I_0} t_r \sum_{\ell, s \in \mathbb{Z}_{>0}} n_{r, \ell} \min\{\ell, s\} m_s^{(r)}$$

により与えられ、(graded) フェルミ型公式 $M(\nu, \mu, q)$ が以下のように定義される。

$$M(\nu, \mu, q) = \sum_{\mathbf{m}} q^{c(\mathbf{m})} \prod_{r \in I_0, \ell \in \mathbb{Z}_{>0}} \left[\begin{matrix} p_\ell^{(r)} + m_\ell^{(r)} \\ m_\ell^{(r)} \end{matrix} \right]_{q^{t_r}}. \quad (1.3)$$

ただし

$$\left[\begin{matrix} p + m \\ m \end{matrix} \right]_q = \frac{(q^{p+1}; q)_m}{(q; q)_m}, \quad (x; q)_m = \prod_{j=0}^{m-1} (1 - xq^j)$$

とする。このとき $M(\nu, \mu, 1) = M(\nu, \mu)$ となることは明らかである。 $M(\nu, \mu, q)$ は、臙装配位 (rigged configuration) と呼ばれる組合せ論的对象を用いても定義できることを注意しておく ([25] 等参照)。

左辺の q -変形を得るためには結晶基底を考える必要がある。以下、KR 加群 $W^{r, \ell}$ は結晶基底 $B^{r, \ell}$ を持つと仮定する (KR クリスタルと呼ぶ)。 $B^\nu = B^{r_1, \ell_1} \otimes \cdots \otimes B^{r_p, \ell_p}$ とおくと、 B^ν が W^ν の結晶基底であることから

$$[W^\nu : V_{q,0}(\mu)] = \#\{b \in B^\nu \mid i \in I_0 \text{ に対し } \tilde{e}_i b = 0, \text{ wt}(b) = \mu\} \quad (1.4)$$

が従う。そこで $X(B^\nu, \mu, q)$ を以下で定義する:

$$X(B^\nu, \mu, q) = \sum_{\substack{b \in B^\nu \\ \tilde{e}_i b = 0 \ (i \in I_0) \\ \text{wt}(b) = \mu}} q^{D(b)}.$$

ここで D は B^ν 上の \mathbb{Z} に値を持つある関数であり、エネルギー関数と呼ばれる。(エネルギー関数の定義はいくつか準備が必要なため、本稿では割愛させていただく。詳しくは [6, 5] 等を参照いただきたい。) このとき、(1.4) より $X(B^\nu, \mu, 1) = [W^\nu : V_{q,0}(\mu)]$ が従う。 $X(B^\nu, \mu, q)$ は一次元状態和と呼ばれる。

各 KR クリスタル $B^{r, \ell}$ はウェイトが $\ell \varpi_r$ であるような元をただ一つ持つ。これを $u(B^{r, \ell})$ と表し、

$$u(B^\nu) = u(B^{r_1, \ell_1}) \otimes \cdots \otimes u(B^{r_p, \ell_p})$$

とおく。このとき $X = M$ 予想は以下のように述べられる。

予想 1.2 ([6, 5]).

$$q^{-D(u(B^\nu))} X(B^\nu, \mu, q) = M(\nu, \mu, q) \quad (1.5)$$

が成り立つ。

$X = M$ 予想は $A_n^{(1)}$ 型の場合には、 B^ν の最高ウェイト元と臙装配位の間に grading を保つような全単射 (KSS 全単射と呼ばれる) が存在することを示すことで、[13] により証明された。またそれ以外にも、いくつかの特別な条件下では証明が知られている [23, 24, 26]。特に [16, 21] により、非例外型でランクが十分大きい場合に対して証明がなされたことは特筆すべき結果であろう。また [18] では LS パスを用いることで、一般の型に対して $\ell_1 = \cdots = \ell_p = 1$ の場合に証明がなされた。

2 クリスタルに関する結果

[19, 20] において、 $A_n^{(1)}$ 型と $D_n^{(1)}$ 型の場合に $X = M$ 予想に証明を与えることができた。これは $D_n^{(1)}$ 型の場合には新しい結果である。また $A_n^{(1)}$ 型の場合も、[13] とは異なる新しい証明となっている。以下ではこの証明の概略を述べたいと思う。本節では主に [19] の結果を、次節では [20] の結果を概説する。

本節では \mathfrak{g} は非例外型であると仮定する。まず拡大アフィン Weyl 群について復習しておく。 \mathfrak{h} を \mathfrak{g} の Cartan 部分代数とし、 P_0 から $GL(\mathfrak{h}^*)$ への単射群準同型写像を

$$\lambda \mapsto t_\lambda : t_\lambda(\mu) = \mu + \langle \mu, K \rangle \lambda - \left((\mu, \lambda) + \frac{1}{2}(\lambda, \lambda) \langle \mu, K \rangle \right) \delta$$

により定義する (K は \mathfrak{g} の中心元、 δ は零ルートであり、標準的な埋め込みにより $P_0 \subseteq P$ とみなしている) 互いに素な正整数の列 (a_1, \dots, a_n) と $(a_1^\vee, \dots, a_n^\vee)$ をそれぞれ

$$\text{任意の } i \in I \text{ に対し } \sum_{j \in I} a_{ij} a_j = 0, \quad \text{任意の } j \in I \text{ に対し } \sum_{i \in I} a_i^\vee a_{ij} = 0$$

を満たす唯一つの列とし、 $i \in I_0$ に対し $c_i = \max\{1, a_i/a_i^\vee\}$ とおく (\mathfrak{g} が $B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, F_4^{(1)}, G_2^{(1)}$ 以外の場合、すべての i に対し $c_i = 1$ である) W_0 を \mathfrak{g}_0 の Weyl 群とし、 P_0 の部分格子 M と \widetilde{M} を

$$M = \sum_{w \in W_0} \mathbb{Z}w(\alpha_0/a_0), \quad \widetilde{M} = \bigoplus_{i \in I_0} \mathbb{Z}c_i\varpi_i$$

により定義する。 $T(M) = \{t_\lambda \mid \lambda \in M\}$ とおくと、 \mathfrak{g} の Weyl 群 W は $W \cong W_0 \ltimes T(M)$ となる。 $T(\widetilde{M}) = \{t_\lambda \mid \lambda \in \widetilde{M}\}$ とおき、 $\widetilde{W} = W_0 \ltimes T(\widetilde{M})$ を拡大アファイン Weyl 群と呼ぶ。基本チャンパー $C = \{\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} P \mid (\lambda, \alpha_i) \geq 0 \ (i \in I)\}$ を不変にする元からなる \widetilde{W} の部分群を Σ で表す。このとき $\widetilde{W} \cong W \rtimes \Sigma$ が成り立ち、また $\tau \in \Sigma$ に対し $\tau(\alpha_i) = \alpha_{\tau(i)}$ とすることで、 Σ は \mathfrak{g} の Dynkin 図形の自己同型群の部分群と同一視できる。

本稿では $U_q(\mathfrak{g})$ クリスタルと $U'_q(\mathfrak{g})$ クリスタルをまとめてクリスタルと呼ぶことにする。各 \widetilde{W} の元 w ごとに、クリスタルの部分集合に対し別の部分集合を与えるような作用素 \mathcal{F}_w を以下で定義する。まずクリスタル B の部分集合 S と $w \in W$ に対し、最短表示 $w = s_{i_k} \cdots s_{i_1}$ を一つ固定し

$$\mathcal{F}_w(S) = \{\widetilde{f}_{i_k}^{s_k} \cdots \widetilde{f}_{i_1}^{s_1}(b) \mid b \in S, s_j \geq 0 \ (1 \leq j \leq k)\} \setminus \{0\} \subseteq B$$

と定義する。ある条件下 (少なくとも本稿で登場するすべての場合) では $\mathcal{F}_w(S)$ は w の最短表示の選び方によらないことが知られている。またクリスタル B と $\tau \in \Sigma$ に対しクリスタル $\widetilde{\tau}(B)$ を、集合としては $\widetilde{\tau}(B) = \{\widetilde{\tau}(b) \mid b \in B\} \cong B$ 、ウェイト関数と柏原作用素は

$$\text{wt}(\tau(b)) = \tau(\text{wt}(b)), \quad \widetilde{e}_i \widetilde{\tau}(b) = \widetilde{\tau}(\widetilde{e}_{\tau^{-1}(i)} b), \quad \widetilde{f}_i \widetilde{\tau}(b) = \widetilde{\tau}(\widetilde{f}_{\tau^{-1}(i)} b)$$

により定義する。 $w = w'\tau \in \widetilde{W}$ ($w' \in W, \tau \in \Sigma$) が与えられたとき、クリスタル B の部分集合 S に対し $\mathcal{F}_w(S) = \mathcal{F}_{w'}\widetilde{\tau}(S) \subseteq \widetilde{\tau}(B)$ と定めることで \mathcal{F}_w が定義される。

$\Lambda \in P^+$ に対し $B(\Lambda)$ で最高ウェイト Λ の可積分加群の結晶基底、 $u_\Lambda \in B(\Lambda)$ でその最高ウェイト元を表すことにする。また Λ_i ($i \in I$) で \mathfrak{g} の基本ウェイト、 w_0 で W_0 の最長元を表す。以下の定理が [19] の主定理である。

定理 2.1 ([19]). $I_0 \times \mathbb{Z}_{>0}$ の元の列 $((r_1, \ell_1), \dots, (r_p, \ell_p))$ が $\ell_1 \geq \dots \geq \ell_p$ を満たすとき、 $U'_q(\mathfrak{g})$ クリスタルの充満部分グラフとしての同型

$$\begin{aligned} \Psi : u_{\ell_1 \Lambda_0} \otimes B^{r_1, \ell_1} \otimes \cdots \otimes B^{r_p, \ell_p} \\ \cong \mathcal{F}_{t_{c_{r_1} w_0}(\varpi_{r_1})} \left(u_{(\ell_1 - \ell_2) \Lambda_0} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{t_{c_{r_{p-1}} w_0}(\varpi_{r_{p-1}})} \left(u_{(\ell_{p-1} - \ell_p) \Lambda_0} \otimes \mathcal{F}_{t_{c_{r_p} w_0}(\varpi_{r_p})} (u_{\ell_p \Lambda_0}) \right) \cdots \right) \end{aligned}$$

で、ある定数 C が存在して任意の $b \in B^{r_1, \ell_1} \otimes \cdots \otimes B^{r_p, \ell_p}$ に対し

$$\text{wt} \Psi(u_{\ell_1 \Lambda_0} \otimes b) = \text{wt}(b) + \ell_1 \Lambda_0 - (D(b) + C)\delta \quad (2.1)$$

を満たすものが存在する (定義から $\text{wt}(b)$ は $P/\mathbb{Z}\delta$ の元であるが、標準的な埋め込みにより P の元とみなす)。

上の定理についていくつか補足しておく。上の同型では、 $U_q(\mathfrak{g})$ クリスタル $B(\Lambda)$ たちを自然に $U'_q(\mathfrak{g})$ クリスタルとみなしている。このとき同型により右辺から左辺に移ると、次数作用素の作用に関する情報はウェイトから失われてしまうが、(2.1) はそれをエネルギー関数によって (定数差を除いて) 復元できることを示している。

定理 2.1 の右辺の指標を求めるために、Demazure クリスタルの定義とそれに関する結果をいくつか復習しておく。

定義 2.2 ([12]). $\Lambda \in P^+$ と $w \in W$ に対し、 $B(\Lambda)$ の部分集合

$$B_w(\Lambda) := \mathcal{F}_w(u_\Lambda)$$

を Demazure クリスタルと呼ぶ。

$U_q(\mathfrak{g})$ クリスタルの部分集合 S に対し、その指標 $\text{ch } S \in \mathbb{Z}[P]$ を

$$\text{ch } S = \sum_{b \in S} e^{\text{wt}(b)}$$

によって表す。また $i \in I$ に対し、 $\mathbb{Z}[P]$ 上の Demazure 作用素 D_i を

$$D_i(f) = \frac{f - e^{-\alpha_i} \cdot s_i(f)}{1 - e^{-\alpha_i}}$$

と定義する。ただし s_i は $\mathbb{Z}[P]$ に $e^\lambda \mapsto e^{s_i(\lambda)}$ で作用する。 $w \in W$ とし $w = s_{i_k} \cdots s_{i_1}$ をその最短表示とすると、 $\mathbb{Z}[P]$ 上の作用素

$$D_w = D_{i_k} \cdots D_{i_1}$$

は最短表示の選び方によらないことが知られている。

定理 2.3 ([12]). 任意の $\Lambda \in P^+$ と $w \in W$ に対し

$$\text{ch } B_w(\Lambda) = D_w(e^\Lambda)$$

が成り立つ。

$w = w'\tau \in \widetilde{W}$ ($w' \in W, \tau \in \Sigma$) に対し、 D_w を

$$D_w = D_{w'\tau}$$

と定義する。ただし τ は $\mathbb{Z}[P]$ に $e^\lambda \mapsto e^{\tau(\lambda)}$ により作用する。このとき上の定理から以下の系が容易に従う。

系 2.4. 任意の $w' \in \widetilde{W}$ に対し $\mathcal{F}_{w'}(B_w(\Lambda))$ はやはり Demazure クリスタルであり、

$$\text{ch } \mathcal{F}_{w'}(B_w(\Lambda)) = D_{w'} \text{ch } B_w(\Lambda)$$

に従う。

定理 2.5 ([15, 9]). $\Lambda, \Lambda' \in P^+$ と $w \in W$ に対し、 $B(\Lambda) \otimes B(\Lambda')$ の部分集合 $u_\Lambda \otimes B_w(\Lambda')$ は Demazure クリスタルの直和になる。

系 2.4 と定理 2.5 より定理 2.1 の右辺は Demazure クリスタルの直和となり、その指標は

$$D_{t_{c_{r_1} w_0(\varpi_{r_1})}} \left(e^{(\ell_1 - \ell_2)\Lambda_0} \cdots D_{t_{c_{r_{p-1}} w_0(\varpi_{r_{p-1})}} \left(e^{(\ell_{p-1} - \ell_p)\Lambda_0} \cdot D_{t_{c_{r_p} w_0(\varpi_{r_p})}} (e^{\ell_p \Lambda_0}) \right) \cdots \right)$$

となるのがわかる。よって定理 2.1 より以下に従う。

系 2.6. 定理 2.1 の仮定の下で $B^\nu = B^{r_1, \ell_1} \otimes \cdots \otimes B^{r_p, \ell_p}$ とおく。このとき $q = e^{-\delta}$ とおくと、ある定数 C に対し

$$\begin{aligned} & \sum_{b \in B^\nu} q^{D(b)} e^{\text{wt}(b)} \\ &= e^{-\ell_1 \Lambda_0 + C\delta} D_{t_{c_{r_1} w_0(\varpi_{r_1})}} \left(e^{(\ell_1 - \ell_2)\Lambda_0} \cdots D_{t_{c_{r_{p-1}} w_0(\varpi_{r_{p-1})}} \left(e^{(\ell_{p-1} - \ell_p)\Lambda_0} \cdot D_{t_{c_{r_p} w_0(\varpi_{r_p})}} (e^{\ell_p \Lambda_0}) \right) \cdots \right) \end{aligned}$$

に従う。

3 カレント代数 $\mathfrak{g}_0[t]$ の表現に関する結果

本節では \mathfrak{g} を non-twisted 型と仮定し、 \mathfrak{g} を $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$ (d は次数作用素) と同一視する。 \mathfrak{g} の部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}_0[t] := \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[t]$ はカレント代数と呼ばれる。 t の次数により $U(\mathfrak{g}_0[t])$ は自然な \mathbb{Z} -grading $U(\mathfrak{g}_0[t]) = \bigoplus_{s \geq 0} U(\mathfrak{g}_0[t])^s$ を持つ。

Feigin と Loktev により定義されたフュージョン積 [4] について復習しよう。 M^1, \dots, M^p を \mathbb{Z} -graded 一元生成 $\mathfrak{g}_0[t]$ 加群とし、それぞれの生成元を v_1, \dots, v_p とする。また c_1, \dots, c_p を互いに異なる複素数とし、各 $1 \leq j \leq p$ に対し $M_{c_j}^j$ で引き戻し $\varphi_{c_j}^* M^j$ を表す (φ_c は $\mathfrak{g}_0[t]$ の自己同型 $\varphi_c: x \otimes t^k \mapsto x \otimes (t+c)^k$ とする)。このとき $M_{c_1}^1 \otimes \dots \otimes M_{c_p}^p$ は $v_1 \otimes \dots \otimes v_p$ から生成される一元生成 $\mathfrak{g}_0[t]$ 加群となることが知られている。よって $M_{c_1}^1 \otimes \dots \otimes M_{c_p}^p$ 上にフィルトレーション

$$F^s(M_{c_1}^1 \otimes \dots \otimes M_{c_p}^p) := U(\mathfrak{g}_0[t])^{\leq s}(v_1 \otimes \dots \otimes v_p)$$

が定義される。

定義 3.1. 上で述べたフィルトレーションから得られる \mathbb{Z} -graded $\mathfrak{g}_0[t]$ 加群

$$\mathrm{gr}_F(M_{c_1}^1 \otimes \dots \otimes M_{c_p}^p) := \bigoplus_{s \geq 0} F^s(M_{c_1}^1 \otimes \dots \otimes M_{c_p}^p) / F^{s-1}(M_{c_1}^1 \otimes \dots \otimes M_{c_p}^p)$$

を $M^1 * \dots * M^p$ と表し、フュージョン積と呼ぶ。

フュージョン積の定義はパラメータ c_1, \dots, c_p に依っているが、記号の簡略化のためこれを省略した。本稿に現れるフュージョン積は、全て同型を除いてパラメータによらないことが知られている。

続いて Chari, Moura により定義されたカレント代数の Kirillov-Reshetikhin 加群 [2] について復習する。 \mathfrak{g}_0 の三角分解 $\mathfrak{n}_0^+ \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{n}_0^-$ を一つ固定し、 $\{e_i, f_i \mid i \in I_0\}$ を \mathfrak{g}_0 の Chevalley 生成元とする。

定義 3.2. $r \in I_0$ と $\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、 $KR^{r, \ell}$ をベクトル $v_{r, \ell}$ から以下の関係式により定義される $\mathfrak{g}_0[t]$ 加群とする:

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_0^+[t]v_{r, \ell} &= 0, & \mathfrak{h}_0 \otimes t\mathbb{C}[t]v_{r, \ell} &= 0, & hv_{r, \ell} &= \langle \ell\varpi_r, h \rangle v_{r, \ell} \quad (h \in \mathfrak{h}_0), \\ f_r^{\ell+1}v_{r, \ell} &= (f_r \otimes t)v_{r, \ell} = 0, & f_i v_{r, \ell} &= 0 \quad (i \in I_0 \setminus \{r\}). \end{aligned}$$

$KR^{r, \ell}$ を $\mathfrak{g}_0[t]$ の Kirillov-Reshetikhin (KR) 加群と呼ぶ。

$KR^{r, \ell}$ は $U'_q(\mathfrak{g})$ の KR 加群 $W^{r, \ell}$ の古典極限のある自己同型に関する引き戻しとしても得られることが知られている [2]。これが $\mathfrak{g}_0[t]$ の KR 加群と呼ばれる所以である。

Di Francesco と Kedem は [3] において、 $\mathfrak{g}_0[t]$ の KR 加群のフュージョン積とフェルミ型公式との間に以下に述べるような関係があることを明らかにした。

定理 3.3 ([3]). $I_0 \times \mathbb{Z}_{>0}$ の元列 $\nu = ((r_1, \ell_1), \dots, (r_p, \ell_p))$ に対し

$$\sum_{\mu \in P_0^+} M(\nu, \mu, q^{-1}) \mathrm{ch} V_0(\mu) = \mathrm{ch}_q KR^{r_1, \ell_1} * \dots * KR^{r_p, \ell_p}$$

が成り立つ。ここで $V_0(\mu)$ は \mathfrak{g}_0 の最高ウェイト μ の既約表現、 ch_q は \mathbb{Z} -graded 指標を表す。

定理 3.3 から、フェルミ型公式を調べるのに $\mathfrak{g}_0[t]$ の KR 加群のフュージョン積が役立つことがわかる。以下では、 \mathfrak{g} の最高ウェイト加群のテンソル積の Borel 部分代数に関するある部分加群を構成し、その加群と $\mathfrak{g}_0[t]$ の KR 加群のフュージョン積の間に同型が存在するという結果について述べる。この Borel 部分代数に関する部分加群は、定理 2.1 の右辺に現れた最高ウェイトクリスタルのテンソル積の部分集合と非常に似通った形で構成される。

\mathfrak{g}_0 の Borel 部分代数 $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{n}_0^+$ によって、 \mathfrak{g} の Borel 部分代数 \mathfrak{b} が

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d \oplus \mathfrak{g}_0 \otimes t\mathbb{C}[t]$$

により定義される。 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$ とし、 \mathfrak{h} 半単純有限次元 \mathfrak{b} 加群のなす圏を $\mathfrak{b}\text{-Mod}$ で表す。また $i \in I$ に対し \mathfrak{p}_i で $\{i\}$ に付随する \mathfrak{g} の放物型部分代数を表し、 $\mathfrak{p}_i\text{-Mod}$ を同様に定義する。このとき、忘却関手 $\mathfrak{p}_i\text{-Mod} \rightarrow \mathfrak{b}\text{-Mod}$ は左随伴関手 $\mathcal{D}_i: \mathfrak{b}\text{-Mod} \rightarrow \mathfrak{p}_i\text{-Mod}$ を持つことが知られている [8, 14]。本稿では忘却関手を合成することで \mathcal{D}_i を $\mathfrak{b}\text{-Mod}$ 上の関手とみなす。このとき、任意の $w \in W$ とその最短表示 $w = s_{i_k} \cdots s_{i_1}$ に対し

$$\mathcal{D}_w = \mathcal{D}_{i_k} \cdots \mathcal{D}_{i_1}: \mathfrak{b}\text{-Mod} \rightarrow \mathfrak{b}\text{-Mod}$$

は最短表示の選び方によらないことが知られている [14, Remark 8.1.18]。 \mathcal{D}_w を Joseph 関手と呼ぶ。

$\tau \in \Sigma$ は Dynkin 図形の自己同型と同一視できるから、自己同型 $\tau: \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{b}$ を誘導する。この自己同型を用いて $w = w'\tau \in \widetilde{W}$ ($w' \in W, \tau \in \Sigma$) に対し $\mathfrak{b}\text{-Mod}$ 上の関手 \mathcal{D}_w を

$$\mathcal{D}_w = \mathcal{D}_{w'} \circ (\tau^{-1})^*$$

によって定義する ($(\tau^{-1})^*$ は引き戻しを表す)。このとき、以下が [20] の主定理である:

定理 3.4 ([20]). \mathfrak{g}_0 が ADE 型であると仮定する。 $I_0 \times \mathbb{Z}_{>0}$ の列 $((r_1, \ell_1), \dots, (r_p, \ell_p))$ が $\ell_1 \geq \dots \geq \ell_p$ を満たすとき、 $\mathfrak{b}' := \mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}_0[t]$ 加群としての同型

$$KR^{r_1, \ell_1} * \cdots * KR^{r_p, \ell_p} \cong \mathcal{D}_{t_{w_0(\varpi_{r_p})}} \left(\mathbb{C}_{(\ell_p - \ell_{p-1})\Lambda_0} \otimes \cdots \otimes \mathcal{D}_{t_{w_0(\varpi_{r_2})}} \left(\mathbb{C}_{(\ell_2 - \ell_1)\Lambda_0} \otimes \mathcal{D}_{t_{w_0(\varpi_{r_1})}} \mathbb{C}_{\ell_1\Lambda_0} \right) \cdots \right)$$

が存在する。ただし \mathbb{C}_Λ はウェイト Λ の一次元 \mathfrak{b} 加群を表す。

定理 3.4 の右辺の指標を求めるために、Demazure 加群の定義とそれに関する結果をいくつか復習しておく。 $\Lambda \in P^+$ に対し、 $V(\Lambda)$ で \mathfrak{g} の最高ウェイト加群を表す。

定義 3.5. $\Lambda \in P^+$ と $w \in W$ に対し、 $V(\Lambda)$ の 1 次元ウェイト空間 $V(\Lambda)_{w(\Lambda)}$ から生成される \mathfrak{b} 部分加群を $V_w(\Lambda)$ と表し Demazure 加群と呼ぶ。

定理 3.6 ([14]). (i) 任意の $\Lambda \in P^+$ と $w \in W$ に対し

$$\mathcal{D}_w \mathbb{C}_\Lambda \cong V_w(\Lambda)$$

が従う。

(ii) Demazure 加群の指標は

$$\text{ch } V_w(\Lambda) = \mathcal{D}_w(e^\Lambda)$$

を満たす。

定義 3.7. $\mathfrak{b}\text{-Mod}$ の対象 M のフィルトレーション $0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_k = M$ で、各逐次商 M_i/M_{i-1} が Demazure 加群と同型となるものを Demazure 旗と呼ぶ。

定理 3.6 と Joseph 関手の基本的な性質により、以下の系が示せる。

系 3.8. $M \in \mathfrak{b}\text{-Mod}$ が Demazure 旗を持つとき、任意の $w \in \widetilde{W}$ に対し $\mathcal{D}_w M$ も Demazure 旗を持ち、

$$\text{ch } \mathcal{D}_w M = D_w \text{ch } M$$

が従う。

定理 3.9 ([10, Theorem 5.22]). \mathfrak{g}_0 が ADE 型であるとき、任意の $\Lambda \in P^+$ と Demazure 加群 $V_w(\Lambda')$ に対し $\mathbb{C}_\Lambda \otimes V_w(\Lambda')$ は Demazure 旗を持つ。

系 3.8 と定理 3.9 より定理 3.4 の右辺は Demazure 旗を持ち、その指標は

$$D_{t_{w_0(\varpi_{r_1})}} \left(e^{(\ell_1 - \ell_2)\Lambda_0} \cdots D_{t_{w_0(\varpi_{r_{p-1}})}} \left(e^{(\ell_{p-1} - \ell_p)\Lambda_0} \cdot D_{t_{w_0(\varpi_{r_p})}}(e^{\ell_p \Lambda_0}) \right) \cdots \right)$$

となるのがわかる。また定理 3.4 の左辺は一元生成かつ \mathbb{Z} -graded であるから、適当に grading を shift することで \mathbb{Z} -graded 加群として同型となる。よって以下が従う。

系 3.10. 定理 3.4 の仮定の下で、ある定数 C' に対し

$$\begin{aligned} & \text{ch}_q KR^{r_1, \ell_1} * \cdots * KR^{r_p, \ell_p} \\ &= e^{-\ell_1 \Lambda_0 + C' \delta} D_{t_{w_0(\varpi_{r_1})}} \left(e^{(\ell_1 - \ell_2)\Lambda_0} \cdots D_{t_{w_0(\varpi_{r_{p-1}})}} \left(e^{(\ell_{p-1} - \ell_p)\Lambda_0} \cdot D_{t_{w_0(\varpi_{r_p})}}(e^{\ell_p \Lambda_0}) \right) \cdots \right) \end{aligned}$$

が従う。ただし $q = e^\delta$ とおいた。

補足 3.11. 定理 2.1 の右辺の指標と定理 3.4 の右辺の指標が等しいのは決して偶然ではない。実際構成からも推測されるように、定理 2.1 の右辺は定理 3.4 の右辺の (適当な意味での) 結晶基底となっている。

系 3.10 と定理 3.3 から以下の系が得られる。

系 3.12. $I_0 \times \mathbb{Z}_{>0}$ の元の列 $\nu = ((r_1, \ell_1), \dots, (r_p, \ell_p))$ が $\ell_1 \geq \cdots \geq \ell_p$ を満たすとき、ある定数 C' に対し以下が従う:

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu \in P_0^+} M(\nu, \mu, q) \text{ch } V_0(\mu) \\ &= e^{-\ell_1 \Lambda_0 + C' \delta} D_{t_{w_0(\varpi_{r_1})}} \left(e^{(\ell_1 - \ell_2)\Lambda_0} \cdots D_{t_{w_0(\varpi_{r_{p-1}})}} \left(e^{(\ell_{p-1} - \ell_p)\Lambda_0} \cdot D_{t_{w_0(\varpi_{r_p})}}(e^{\ell_p \Lambda_0}) \right) \cdots \right). \end{aligned}$$

ただし $q = e^{-\delta}$ とおいた。

4 $A_n^{(1)}$ および $D_n^{(1)}$ に対する $X = M$ 予想の証明

\mathfrak{g} を $A_n^{(1)}$ または $D_n^{(1)}$ と仮定する。このとき $X = M$ 予想は 2, 3 節の結果から容易に従う。 $I_0 \times \mathbb{Z}_{>0}$ の元の列 $\nu = ((r_1, \ell_1), \dots, (r_p, \ell_p))$ を任意に与える。 \mathfrak{g}_0 の既約表現の指標 $\text{ch } V_0(\mu)$ たちは線形独立であるから、(1.5) を任意の $\mu \in P_0^+$ に対して示すには

$$q^{-D(u(B^\nu))} \sum_{\mu \in P_0^+} X(B^\nu, \mu, q) \text{ch } V_0(\mu) = \sum_{\mu \in P_0^+} M(\nu, \mu, q) \text{ch } V_0(\mu) \quad (4.1)$$

を示せばよい。定義から

$$\sum_{\mu \in P_0^+} X(B^\nu, \mu, q) \text{ch } V_0(\mu) = \sum_{b \in B^\nu} q^{D(b)} e^{\text{wt}(b)}$$

が成り立つ。よって (1.5) は以下の等式に帰着される:

$$q^{D(u(B^\nu))} \sum_{b \in B^\nu} q^{-D(b)} e^{\text{wt}(b)} = \sum_{\mu \in P_0^+} M(\nu, \mu, q) \text{ch } V_0(\mu) \quad (4.2)$$

上の等式の両辺は $\nu = ((r_1, \ell_1), \dots, (r_p, \ell_p))$ の順序によらないことが知られている。よって、 $\ell_1 \geq \dots \geq \ell_p$ と仮定してよい。 \mathfrak{g} が $A_n^{(1)}$ または $D_n^{(1)}$ のとき任意の $i \in I_0$ に対し $c_i = 1$ であるから、系 2.6、3.12 によりある定数 C'' に対し

$$q^{C''} \sum_{b \in B^\nu} q^{-D(b)} e^{\text{wt}(b)} = \sum_{\mu \in P_0^+} M(\nu, \mu, q) \text{ch } V_0(\mu)$$

が成り立つことがわかる。 $\lambda = \sum_{1 \leq j \leq p} \ell_j \varpi_{r_j}$ とおくと、左辺の e^λ の係数は $q^{C'' - D(u(B^\nu))}$ 、右辺の e^λ の係数は 1 であることが容易にわかるから、 $C'' = D(u(B^\nu))$ が確かめられる。よって (4.2) が従うから、証明が完了する。

参考文献

- [1] V. Chari. On the fermionic formula and the Kirillov-Reshetikhin conjecture. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (12):629–654, 2001.
- [2] V. Chari and A. Moura. The restricted Kirillov-Reshetikhin modules for the current and twisted current algebras. *Comm. Math. Phys.*, 266(2):431–454, 2006.
- [3] P. Di Francesco and R. Kedem. Proof of the combinatorial Kirillov-Reshetikhin conjecture. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (7):Art. ID rnn006, 57, 2008.
- [4] B. Feigin and S. Loktev. On generalized Kostka polynomials and the quantum Verlinde rule. In *Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications*, volume 194 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 61–79. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [5] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Z. Tsuboi. Paths, crystals and fermionic formulae. In *MathPhys odyssey, 2001*, volume 23 of *Prog. Math. Phys.*, pages 205–272. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.
- [6] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, and Y. Yamada. Remarks on fermionic formula. In *Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998)*, volume 248 of *Contemp. Math.*, pages 243–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [7] D. Hernandez. The Kirillov-Reshetikhin conjecture and solutions of T -systems. *J. Reine Angew. Math.*, 596:63–87, 2006.
- [8] A. Joseph. On the Demazure character formula. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 18(3):389–419, 1985.
- [9] A. Joseph. A decomposition theorem for Demazure crystals. *J. Algebra*, 265(2):562–578, 2003.
- [10] A. Joseph. Modules with a Demazure flag. In *Studies in Lie theory*, volume 243 of *Progr. Math.*, pages 131–169. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

- [11] V.G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990.
- [12] M. Kashiwara. The crystal base and Littelmann’s refined Demazure character formula. *Duke Math. J.*, 71(3):839–858, 1993.
- [13] A.N. Kirillov, A. Schilling, and M. Shimozono. A bijection between Littlewood-Richardson tableaux and rigged configurations. *Selecta Math. (N.S.)*, 8(1):67–135, 2002.
- [14] S. Kumar. *Kac-Moody groups, their flag varieties and representation theory*, volume 204 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA.
- [15] V. Lakshmibai, P. Littelmann, and P. Magyar. Standard monomial theory for Bott-Samelson varieties. *Compositio Math.*, 130(3):293–318, 2002.
- [16] C. Lecouvey, M. Okado, and M. Shimozono. Affine crystals, one dimensional sums and parabolic Lusztig q -analogues. *Math. Z.*, DOI: 10.1007/s00209-011-0892-9. math.QA/1002.3715.
- [17] H. Nakajima. t -analogs of q -characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantum affine algebras. *Represent. Theory*, 7:259–274 (electronic), 2003.
- [18] K. Naoi. Weyl modules, Demazure modules and finite crystals for non-simply laced type. math.RT/1012.5480.
- [19] K. Naoi. Demazure crystals and tensor products of perfect Kirillov-Reshetikhin crystals with various levels. math.QA/1108.3139
- [20] K. Naoi. Fusion products of Kirillov-Reshetikhin modules and the $X = M$ conjecture. math.RT/1109.2450.
- [21] M. Okado and R. Sakamoto. Stable rigged configurations for quantum affine algebras of nonexceptional types. math.QA/1008.0460.
- [22] M. Okado and A. Schilling. Existence of Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types. *Represent. Theory*, 12:186–207, 2008.
- [23] M. Okado, A. Schilling, and M. Shimozono. A crystal to rigged configuration bijection for nonexceptional affine algebras. In *Algebraic combinatorics and quantum groups*, pages 85–124. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003.
- [24] A. Schilling. A bijection between type $D_n^{(1)}$ crystals and rigged configurations. *J. Algebra*, 285(1):292–334, 2005.
- [25] A. Schilling. $X = M$ theorem: fermionic formulas and rigged configurations under review. In *Combinatorial aspect of integrable systems*, volume 17 of *MSJ Mem.*, pages 75–104. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007.
- [26] A. Schilling and M. Shimozono. $X = M$ for symmetric powers. *J. Algebra*, 295(2):562–610, 2006.