箙 Hecke 代数の有限次元加群圏と Hernandez-Leclerc 圏の同値性

東京農工大学工学研究院　直井　克之 (Katsuyuki Naoi)
Institute of Engineering,
Tokyo University of Agriculture and Technology

概要

本稿では, 箙 Hecke 代数の有限次元加群圏から量子アフィン代数のある加群圏 (Hernandez-Leclerc 圏) への関手である一般化量子アフィン Schur-Weyl 双対性関手が, これらの圏の間の同値を与える, という著者の最近の結果 [Nao21] と, その証明の概略について紹介する.

1　主定理の主張

1.1　量子アフィン代数に関する記号の準備

$\mathfrak{g}$ をアフィン Lie 代数 (非捩れ型 (nontwisted type) でも捩れ型 (twisted type) でもよい), P を $\mathfrak{g}$ のウェイト格子, $\delta \in P$ を虚ルートの生成元とし, $P_{\mathrm{cl}} = P/\mathbb{Z}\delta$ とおく. $\mathfrak{g}$ の添え字集合を I とし, $I_0 = I \setminus \{0\}$ を有限型部分 Lie 代数 $\mathfrak{g}_0$ に対応する I の部分集合とする[1]. P_0 を $\mathfrak{g}_0$ のウェイト格子とし, ϖ_i $(i \in I_0)$ を $\mathfrak{g}_0$ の基本ウェイトとする. 以下 P_0 の元をレベル 0 として, 自然に P_0 を P の部分格子とみなす.

$\mathbf{k} = \overline{\mathbb{C}(q)}$ とし, $U_q'(\mathfrak{g}) = \langle e_i, f_i, q^h \mid i \in I, h \in P_{\mathrm{cl}}^\vee = \mathrm{Hom}(P_{\mathrm{cl}}, \mathbb{Z})\rangle$ を $\mathbf{k}$ 上の（次数作用素のない）**量子アフィン代数** (**quantum affine algebra**) とする (定義は [Kas02] 等参照). 可積分[2]な有限次元 $U_q'(\mathfrak{g})$ 加群のなす圏を $\mathcal{C}$ と表す. 各 $i \in I_0$ に対し, ($U_q(\mathfrak{g}_0)$ に制限したとき適切な意味で) 最高ウェイトが ϖ_i であるような $\mathcal{C}$ の単純対象は $\mathbf{k}^*$ でパラメトライズされることが知られている. これらの加群を以下 $L(\boldsymbol{\varpi}_{i,a})$ $(i \in I_0, a \in \mathbf{k}^*)$ と表す[3].

有限次元単純 $U_q'(\mathfrak{g})$ 加群 M に対しその**アフィン化** (**affinization**) $M_{\mathrm{aff}} = M \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[z^{\pm 1}]$ を, e_i, f_i をそれぞれ $e_i \otimes z^{\delta_{0i}}$, $f_i \otimes z^{-\delta_{0i}}$ と作用させることで定義する. また $i \in I_0$ と $a \in \mathbf{k}^*$ に対し,

$$\widehat{W}_{i,a} = L(\boldsymbol{\varpi}_{i,a})_{\mathrm{aff}} \otimes_{\mathbf{k}[z^{\pm 1}]} \mathbf{k}[\![w]\!]$$

とする. ここで $\mathbf{k}[z^{\pm 1}]$ は完備環 $\mathbf{k}[\![w]\!]$ に $z = 1 + w$ で作用する. $\widehat{W}_{i,a}$ も自然に $U_q'(\mathfrak{g})$ 加群となる.

1）ラベル付けは $A_{2n}^{(2)}$ 以外では [Kac90] に従い, $A_{2n}^{(2)}$ では [Kac90] と逆のラベル付けとする.
2）ウェイト空間分解を持ち, e_i, f_i たちが局所冪零に作用する加群のこと.
3）記号は基本的に原論文 [Nao21] に合わせた. 記号 $\boldsymbol{\varpi}_{i,a}$ の正確な意味は, そちらをご参照いただきたい.

1.2 箙 Hecke 代数と一般化量子アフィン Schur-Weyl 双対性関手

アフィン Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対し, 対応する有限次元単純 Lie 代数 g を以下で定める.

$\mathfrak{g}$	$A_n^{(1)}$	$D_n^{(1)}$	$E_n^{(1)}$	$B_n^{(1)}$	$C_n^{(1)}$	$F_4^{(1)}$	$G_2^{(1)}$	$X_n^{(t)}$ $(t \in \{2,3\})$
g	A_n	D_n	E_n	A_{2n-1}	D_{n+1}	E_6	D_4	X_n

J を g の添え字集合[4], $\alpha_\imath^{\mathsf{g}}$ $(\imath \in J)$ を単純ルート, Q_{g} を g のルート格子, $Q_{\mathsf{g}}^+ = \sum_\imath \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_\imath^{\mathsf{g}}$ をその正錐 (positive cone) とし, $\beta \in Q_{\mathsf{g}}^+$ に対し

$$J^\beta = \{(\imath_1, \ldots, \imath_m) \in J^m \mid \alpha_{\imath_1}^{\mathsf{g}} + \cdots + \alpha_{\imath_m}^{\mathsf{g}} = \beta\}$$

と定める (ここで m は β の高さを表す). 各 $\beta \in Q_{\mathsf{g}}^+$ に対し,

$$R(\beta) = \langle e(\boldsymbol{\imath}), x_k, \tau_l \mid \boldsymbol{\imath} \in J^\beta, 1 \leq k \leq m, 1 \leq l < m\rangle$$

で g に付随する β における**箙 Hecke 代数** (**quiver Hecke algebra**) を表す (定義は [KKK15] 等参照). 以下 x_k たちが冪零で作用する有限次元 $R(\beta)$ 加群のなす圏を, $R(\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fd}}^0$ と表す.

$\phi\colon J \to I_0 \times \mathbb{Z}$ を固定し, $\beta \in Q_+^{\mathsf{g}}$ に対し

$$\widehat{W}^{\otimes\beta} = \bigoplus_{(\imath_1,\ldots,\imath_m)\in J^\beta} \widehat{W}_{\phi(\imath_1)} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \widehat{W}_{\phi(\imath_m)}$$

と定める ($\hat{\otimes}$ はテンソル積の完備化を表す). このとき適切な ϕ をとると, 各 $\beta \in Q_+^{\mathsf{g}}$ に対し $\widehat{W}^{\otimes\beta}$ に $R(\beta)$ の右作用を定めることができ, これにより $\widehat{W}^{\otimes\beta}$ は $(U_q'(\mathfrak{g}), R(\beta))$ 双加群となる. そこで $M \in R(\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fd}}^0$ に $\mathcal{F}_\beta(M) = \widehat{W}^{\otimes\beta} \otimes_{R(\beta)} M$ を対応させせることで, 関手 $\mathcal{F}_\beta\colon R(\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fd}}^0 \to \mathcal{C}$ が各 β ごとに得られる. 以下 $\mathcal{F} = \bigoplus_{\beta\in Q_+^{\mathsf{g}}} \mathcal{F}_\beta\colon \bigoplus_\beta R(\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fd}}^0 \to \mathcal{C}$ と表す. これは Kang-Kashiwara-Kim [KKK18] において導入された**一般化量子アフィン Schur-Weyl 双対性関手** (**generalized quantum affine Schur-Weyl duality functor**) の特別な場合である.

注意 1.1. ϕ の具体的な定め方は, $\mathfrak{g}$ が非捩れ ADE 型の場合は [HL15, KKK15], 捩れ型は [KKKO16], $B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$ 型は [KO19], $F_4^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ 型は [OS19] によって与えられた. また Q-datum と呼ばれる組合せ論的対象を用いることで, 型によらない統一的な ϕ の定め方も [FO21] により得られている.

$\mathcal{F}(M)$ $(M \in \bigoplus_\beta R(\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fd}}^0)$ をすべて含み, テンソル積, 拡大, 部分商を取る操作で閉じた最小の $\mathcal{C}$ の部分圏を $\mathcal{C}_{\mathbf{Q}}$ と表し[5] **Hernandez-Leclerc 圏**と呼ぶ. 以下の定理 (i), (ii) は [KKK18], (iii) は [KKK15] (非捩れ ADE 型), [KKKO16] (捩れ型), [KO19] ($B_n^{(1)}$, $C_n^{(1)}$ 型), [OS19] ($F_4^{(1)}$, $G_2^{(1)}$ 型) による.

---

4) 以下 I の元と J の元を区別するため, しばしば I の元を i, j, J の元を $\imath, \jmath$ などと表す.

5) この $\mathbf{Q}$ は, Q-datum を表す.

定理 1.2. (i) 関手 $\mathcal{F}$ はそれぞれの自然なモノイド圏構造に関し, モノイド関手となる.
(ii) 関手 $\mathcal{F}$ は完全である.
(iii) 関手 $\mathcal{F}$ は $\bigoplus_\beta R(\beta)\text{-mod}^0_{\mathrm{fd}}$ と $\mathcal{C}_{\mathbf{Q}}$ の単純対象の同型類の間の全単射を誘導する.

定理 1.2 は, 二つのモノイド圏 $\bigoplus_\beta R(\beta)\text{-mod}^0_{\mathrm{fd}}$ と $\mathcal{C}$ がよく似ていることを示唆している (例えば二つの圏の Grothendieck 環は同型である). そこでさらに強く, これらはモノイド圏として同値であることを期待することは自然であろう. この同値性は非捩れ ADE 型の場合に藤田 [Fuj17] により示された. さらにこれを一般の $\mathfrak{g}$ で示した, というのが [Nao21] の主結果である. 改めて定理の形で述べると, 以下のようになる.

定理 1.3 ([Fuj17], [Nao21]). 関手 $\mathcal{F}\colon \bigoplus_\beta R(\beta)\text{-mod}^0_{\mathrm{fd}} \to \mathcal{C}_{\mathbf{Q}}$ はモノイド圏の同値を与える.

2 定理 1.3 の証明の概略

主定理を述べる前に, 一つ重要なポイントを述べておく. 圏同値を示すための道具としてホモロジー代数の理論が考えられるが, これらの理論を適用するためには $R(\beta)\text{-mod}^0_{\mathrm{fd}}$ や $\mathcal{C}_{\mathbf{Q}}$ は “小さすぎる”[6]. そこでこれらをより大きな圏に取り換えることが肝要である. その際 $R(\beta)\text{-mod}^0_{\mathrm{fd}}$ については, 次のような非常に良い代替物が知られている. $R(\beta)$ は次数付き代数となることは有名な事実である. そこでその次数に沿って完備化して得られる環

$$\widehat{R}(\beta) = \prod_{n\in\mathbb{Z}} R(\beta)_n$$

をとり, その有限生成加群圏 $\widehat{R}(\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ を考えるのである. このとき $R(\beta)\text{-mod}^0_{\mathrm{fd}}$ は, $\widehat{R}(\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ の充満部分圏である有限次元 $\widehat{R}(\beta)$ 加群圏 $\widehat{R}(\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ と自然に同一視される. さらに $\widehat{W}^{\otimes\beta}$ は $(U'_q(\mathfrak{g}), \widehat{R}(\beta))$ 双加群へと持ち上がり, このことから $\mathcal{F}$ も $\widehat{R}(\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ から $U'_q(\mathfrak{g})$ の加群圏への関手に持ち上げることができるのである. 一方で $\mathcal{C}_{\mathbf{Q}}$ については, このような良い代替物をどのようにとるか, というのは簡単な問題ではなく, ここが定理の証明の重要なポイントとなる (ちなみに後に述べる $\mathbb{E}^\beta\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ が, ちょうどこの代替物にあたる).

以下定理 1.3 の証明の概略を述べる. まず量子アフィン代数の有限次元表現論より次が示せる.

補題 2.1 ([Nao21, Lemma 5.2.6, Theorem 5.3.3 (i)]). $\mathcal{C}_{\mathbf{Q}}$ はブロック分解 $\mathcal{C}_{\mathbf{Q}} = \bigoplus_{\beta\in Q^{\mathfrak{g}}_+} \mathcal{C}_{\mathbf{Q},\beta}$ を持ち, 各 $\mathcal{F}_\beta$ $(\beta \in Q^{\mathfrak{g}}_+)$ は $\widehat{R}(\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fd}}$ から $\mathcal{C}_{\mathbf{Q},\beta}$ への関手を誘導する.

この補題により, 各 β ごとに $\mathcal{F}_\beta$ が同値であることを示せば十分である. 以下 $\beta \in Q^{\mathfrak{g}}_+$ を固定し, 代数 $\mathbb{E}^\beta$ を

$$\mathbb{E}^\beta = \mathrm{End}_{\widehat{R}(\beta)^{\mathrm{opp}}}(\widehat{W}^{\otimes\beta})$$

と定める. このとき $\widehat{W}^{\otimes\beta}$ が $(U'_q(\mathfrak{g}), \widehat{R}(\beta))$ 双加群であったことから, 自然な代数射 $\Phi_\beta\colon U'_q(\mathfrak{g}) \to \mathbb{E}^\beta$ が存在するとともに, $\mathcal{F}_\beta$ を $\widehat{R}(\beta)\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ から $\mathbb{E}^\beta\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ への関手とみなすことができる. 本章の初めに述べたように, $\mathcal{C}_{\mathbf{Q},\beta}$ を $\mathbb{E}^\beta\text{-mod}_{\mathrm{fg}}$ に取り換える, というのが重要なポイントである.

---

6) 例えばこれらの圏は充分射影的 (enough projective) ではなく, 射影分解 (projective resolution) を持たない.

このとき定理 1.3 を示すには, 以下の命題を示せば十分である (もともとの $\mathcal{F}_\beta$ は以下の命題では $\Phi_\beta^* \circ \mathcal{F}_\beta$ に一致することに注意).

命題 2.2. (i) 引き戻し関手 Φ_β^* は有限次元 $\mathbb{E}^\beta$ 加群の圏 $\mathbb{E}^\beta$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{fd}}$ と $\mathcal{C}_{\mathbf{Q},\beta}$ の圏同値を与える.
(ii) $\mathcal{F}_\beta \colon \widehat{R}(\beta)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{fg}} \to \mathbb{E}^\beta$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{fg}}$ は圏の同値を与える.

命題 2.2 (i) の証明の概略は以下のとおりである. まず有限次元 $\mathbb{E}^\beta$ 加群を Φ_β で引き戻すと $\mathcal{C}_{\mathbf{Q},\beta}$ の対象となることはすぐ分かる. 次に, $\mathbb{E}^\beta$ は完備局所環 $\mathbf{k}[\![z_1, \ldots, z_p]\!]$ (p は適当な正整数) と同型な中心 $\widehat{\mathbb{S}}^\beta = Z(\mathbb{E}^\beta)$ を持ち, さらに $\widehat{\mathbb{S}}_\beta^+$ をその極大イデアルとするとき, 任意の $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\mathbb{E}^\beta / (\mathbb{S}_\beta^+)^m$ は有限次元となる. そこで本質的全射性 (essentially surjectivity) を示すには, 代数射 Φ_β が稠密である, すなわち任意の $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\Phi_\beta^m \colon U_q'(\mathfrak{g}) \to \mathbb{E}^\beta / (\mathbb{S}_\beta^+)^m$ が全射となることを示せば十分である. 一方充満忠実性 (fully faithfulness) を示すには, 任意の $M \in \mathcal{C}_{\mathbf{Q},\beta}$ に対し $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して $(\ker \Phi_\beta^m) M = 0$ となることを示せばよい. このように命題の証明は, 代数射 Φ_β の像や核の性質に帰着される. これらの性質はそれぞれの代数の**アフィン準遺伝代数** (**affine quasihereditary algebra**) 構造を用いて示される (詳細は割愛する).

次に命題 2.2 (ii) の証明の概略について述べる. まず以下の事実が, [Kat14, BKM14] と [Fuj18] の結果を組み合わせることで得られる.

命題 2.3. $\widehat{R}$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{fg}}$ は**アフィン最高ウェイト圏** (**affine highest weight category**) の構造を持つ.

アフィン最高ウェイト圏は, 各単純対象 $L(\lambda)$ に対応する**標準加群** (**standard module**) $\Delta(\lambda)$ や**真余標準加群** (**proper costandard module**) $\overline{\nabla}(\lambda)$ が存在し, 適切な性質を満たす圏である (正確な定義は, [Kle15, Fuj18] 等を参照). さらに [Fuj18, Theorem 3.9] により, 二つの (適切な条件を満たす) アフィン最高ウェイト圏の間の完全関手が標準加群と真余標準加群を保つとき, その関手が同値を与えることが知られている. よって命題 2.2 (ii) の証明は以下に帰着されることになる (この命題の証明については, 割愛する).

命題 2.4. $\mathbb{E}^\beta$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{fg}}$ はアフィン最高ウェイト圏であり, $\mathcal{F}_\beta \colon \widehat{R}(\beta)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{fg}} \to \mathbb{E}^\beta$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{fg}}$ はそれぞれの標準加群と真余標準加群を保つ.

注意 2.5. 先行研究 [Fuj17] では非捩れ ADE 型の場合に, $\mathbb{E}^\beta$ ではなく対応する箙多様体の同変 K 群 (の完備化) $\widehat{\mathcal{K}}^{\mathbb{G}}(Z^\bullet)$ に上と同様の議論を適用することで, $\mathcal{F}_\beta \colon \widehat{R}(\beta)$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{fg}} \to \mathbb{E}^\beta$-$\mathrm{mod}_{\mathrm{fg}}$ 定理 1.3 を示した. $\widehat{\mathcal{K}}^{\mathbb{G}}(Z^\bullet)$ の代わりに $\mathbb{E}^\beta$ を用いることで, 幾何的な議論を回避し一般の $\mathfrak{g}$ で同様な議論が可能となる, ということを見出した点が [Nao21] のアイデアの最も本質的な部分である.

謝辞

2021 年度研究集会「代数的 Lie 理論および表現論」において講演の機会を与えてくださった, 世話人の柳田伸太郎先生, 名古屋創先生, Liron Speyer 先生に, この場を借りて御礼申し上げます.

参考文献

[BKM14] J. Brundan, A. Kleshchev, and P. J McNamara. Homological properties of finite-type Khovanov-Lauda-Rouquier algebras. *Duke Math. J.*, 163(7):1353–1404, 2014.

[FO21] R. Fujita and S.-j. Oh. Q-data and representation theory of untwisted quantum affine algebras. *arXiv preprint arXiv:2007.03159v2*, 2021.

[Fuj17] R. Fujita. Affine highest weight categories and quantum affine Schur-Weyl duality of Dynkin quiver types. *arXiv preprint arXiv:1710.11288*, 2017.

[Fuj18] R. Fujita. Tilting modules of affine quasi-hereditary algebras. *Adv. Math.*, 324:241–266, 2018.

[HL15] D. Hernandez and B. Leclerc. Quantum Grothendieck rings and derived Hall algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 2015(701):77–126, 2015.

[Kac90] V.G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras.* Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990.

[Kas02] M. Kashiwara. On level-zero representations of quantized affine algebras. *Duke Math. J.*, 112(1):117–175, 2002.

[Kat14] S. Kato. Poincaré-Birkhoff-Witt bases and Khovanov-Lauda-Rouquier algebras. *Duke Math. J.*, 163(3):619–663, 2014.

[KKK15] S.-J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim. Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras, II. *Dule Math. J.*, 164(8):1549–1602, 2015.

[KKK18] S.-J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim. Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras. *Invent. Math.*, 211(2):591–685, 2018.

[KKKO16] S.-J. Kang, M. Kashiwara, M. Kim, and S.-J. Oh. Symmetric quiver Hecke algebras and R-matrices of quantum affine algebras IV. *Selecta Math. (N.S.)*, 22(4):1987–2015, 2016.

[Kle15] A.S. Kleshchev. Affine highest weight categories and affine quasihereditary algebras. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 110(4):841–882, 2015.

[KO19] M. Kashiwara and S.-j. Oh. Categorical relations between Langlands dual quantum affine algebras: doubly laced types. *J. Algebraic Combin.*, 49(4):401–435, 2019.

[Nao21] K. Naoi. Equivalence between module categories over quiver Hecke algebras and Hernandez–Leclerc's categories in general types. *Adv. Math.*, 389:107916, 47pages, 2021.

[OS19] S.-j. Oh and T. Scrimshaw. Categorical relations between langlands dual quantum affine algebras: exceptional cases. *Comm. Math. Phys.*, 368(1):295–367, 2019.