

材料力学I 演習課題 No.10: 断面の性質

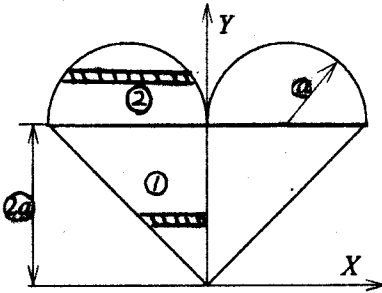
総得点: \_\_\_\_\_ 点

学科: \_\_\_\_\_ 工学科 学年: \_\_\_\_\_ 年 学籍番号: \_\_\_\_\_ 氏名: \_\_\_\_\_

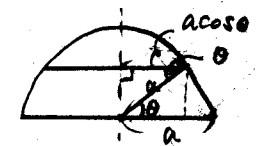
問1: 図のようなハート型断面に関する次の各問いに答えよ。なお、導出過程は必ず記すこと(未記入は0点)。

(a) まず、断面一次モーメント  $S_x$  と図心  $Y_G$  を算出せよ。

(b) 次に、断面二次モーメント  $I_x$  を算出せよ。



$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad da &= 2a \cos\theta \, dy \\ &= 2a^2 \cos^2\theta \, d\theta \\ &= a^2(1 + \cos 2\theta) \, d\theta \end{aligned}$$



$y$	$2a$	----	$3a$
$\theta$	$0$	----	$\frac{\pi}{2}$

(a) Y軸に対して対称であるから半分だけ計算して考える。

$$\begin{aligned} \bar{S}_{x0} &= \int_A y \, dA = \int_0^{2a} y \cdot 2 \, dy = \left[ \frac{2}{3} y^3 \right]_0^{2a} = \frac{8}{3} a^3 \\ \bar{S}_{x\textcircled{2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a(2 + \sin\theta) a^2(1 + \cos 2\theta) \, d\theta = a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2\cos 2\theta + \sin\theta + \sin\theta \cos 2\theta) \, d\theta \\ &= a^3 \left( \pi + \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x &= 2\bar{S}_{x0} + 2\bar{S}_{x\textcircled{2}} = \frac{16}{3} a^3 + a^3 \left( 2\pi + \frac{4}{3} \right) \\ &= a^3 \left( \frac{20}{3} + 2\pi \right) \end{aligned}$$

$$Y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{a^3 \left( \frac{20}{3} + 2\pi \right)}{4a^2 + \pi a^2} = \frac{\frac{20}{3} + 2\pi}{4 + \pi} a$$

$$\boxed{\frac{S_x}{A} = a^3 \left( \frac{20}{3} + 2\pi \right)}$$

$$\boxed{Y_G = \frac{\frac{20}{3} + 2\pi}{4 + \pi} a}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad I_{x0} &= \int_A y^2 \, dA = \int_0^{2a} y^3 \, dy = \left[ \frac{y^4}{4} \right]_0^{2a} = 4a^4 \\ I_{x\textcircled{2}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \sin\theta + 2a)^2 \cdot 2a^2 \cos^2\theta \, d\theta \\ &= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( -\frac{\cos 4\theta}{4} + 4 \sin\theta \cos 2\theta + 4 \cos 2\theta + 4 \sin\theta + \frac{17}{4} \right) \, d\theta \\ &= a^4 \left( \frac{17}{8} \pi + \frac{8}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore I_x &= 2I_{x0} + 2I_{x\textcircled{2}} \\ &= 8a^4 + a^4 \left( \frac{17}{4} \pi + \frac{16}{3} \right) \\ &= a^4 \left( \frac{17}{4} \pi + \frac{40}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{I_y = \left( \frac{17}{4} \pi + \frac{40}{3} \right) a^4}$$