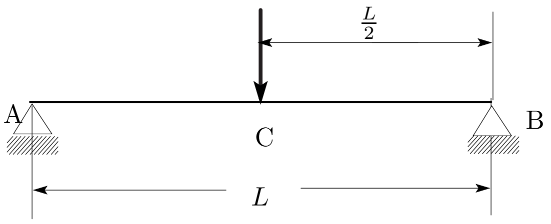
材料力学　　演習課題 No.6：ひずみエネルギー

総得点:　　　　　　点（100 点満点換算　　　　点）

学科:　　　　　　　　　　**工学科**　**学年:**　　　**年**　**学籍番号:**　　　　　　　**氏名:**

解答例

問 1：図のように集中荷重 W を受ける両端支持はりについて以下の問に答えよ．ただし，ヤング率を E ，断面二次モーメントを I とする．



1. せん断力，曲げモーメントの分布を求め，SFD,BMD を描け．(10 点)
2. 点 C のたわみ をカスティリアーノの定理を用いて求めよ．(40 点)

1.

$0 < x < L/2$
$F = \frac{W}{2}$
$M = \frac{W}{2}x$

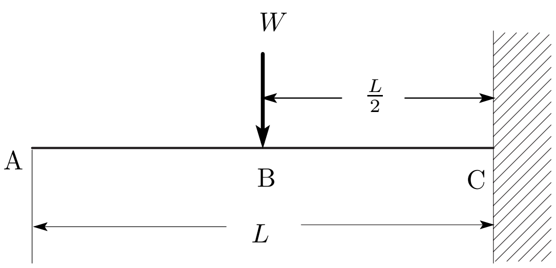
$L/2 < x < L$
$F = \frac{W}{2} - W = -\frac{W}{2}$
$M = \frac{W}{2}x - W(x - L/2) = \frac{W}{2}(L - x)$

2.

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial W} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial W}\,dx = \int_0^{L/2} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial W}\,dx + \int_{L/2}^{L} \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial W}\,dx$$

$$\begin{aligned}
EI\delta &= \int_0^{L/2} \frac{W}{2}x \cdot \frac{x}{2}\,dx + \int_{L/2}^{L} \frac{W}{2}(L-x)\cdot\frac{1}{2}(L-x)\,dx \\
&= \frac{W}{4}\int_0^{L/2} x^2\,dx + \frac{W}{4}\int_{L/2}^{L}(L-x)^2\,dx \\
&= \frac{WL^3}{96} + \frac{WL^3}{96} = \frac{WL^3}{48}
\end{aligned}$$

問 2：図のように集中荷重 W を受ける片持ちはりについて以下の問に答えよ．ただし，ヤング率を E ，断面二次モーメントを I とする．



1. せん断力，曲げモーメントの分布を求め，SFD,BMD を描け．(10 点)
2. 点 A のたわみ をカスティリアーノの定理を用いて求めよ．(40 点)

1.

$0 < x < L/2$	$L/2 < x < L$
$F = 0$	$F = -W$
$M = 0$	$M = -W\left(x - \frac{L}{2}\right)$

2. 点 A に仮想的に集中力 P を加える．このとき，せん断力，曲げモーメントの分布は

$0 < x < L/2$	$L/2 < x < L$
$F = -P$	$F = -P - W$
$M = -Px$	$M = -Px - W\left(x - \frac{L}{2}\right)$

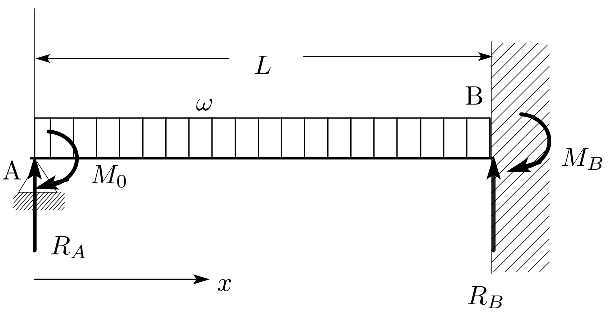
集中力 P が加わった場合の点 A のたわみ δ は

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}\,dx$$
$$= \frac{1}{EI}\left[\int_0^{L/2}(-Px)(-x)\,dx + \int_{L/2}^{L}\left\{-Px - W\left(x - \frac{L}{2}\right)\right\}(-x)\,dx\right]$$

実際の点 A のたわみ δ_A は $P \to 0$ を考えて

$$\delta_A = \delta|_{P\to 0} = \frac{1}{EI}\int_{L/2}^{L} W\left(x - \frac{L}{2}\right)x\,dx = \frac{W}{EI}\int_{L/2}^{L}\left(x^2 - \frac{L}{2}x\right)dx$$
$$= \frac{W}{EI}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{L}{4}x^2\right]_{L/2}^{L} dx = \frac{W}{EI}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{24} + \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{48}\frac{W}{EI}$$

問 3：図のように分布荷重 ω とモーメント荷重 M_0 を受けるはりについて以下の問に答えよ．ただし，ヤング率を E，断面二次モーメントを I とする．



1. 図のように反力，反モーメントを仮定して，力のつりあい，モーメントのつり合いをたてよ．(6 点)
2. このはりの不静定次数はいくらか．(3 点)
3. せん断力，曲げモーメントの分布を R_A，ω，M_0，x を用いて表せ．(6 点)
4. 点 A のたわみは 0 であることを利用し，カスティリアーノの定理を用いて反力 R_A を求めよ．また反力 R_B，反モーメント M_B を求めよ．(35 点)

1. 力のつりあい

$$\omega L = R_A + R_B$$

点 B のまわりのモーメントのつりあい

$$R_A L + M_0 + M_B = \frac{wL^2}{2}$$

2. 未知数は R_A, R_B, M_B の 3 個．したがって不静定次数は $3 - 2 = 1$．

3.

$$\text{せん断力} \qquad F = R_A - \omega x$$

$$\text{曲げモーメント} \qquad M = R_A x + M_0 - \frac{\omega}{2}x^2$$

4.

$$\begin{aligned}
\delta_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} &= \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^L M\frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx \\
EI\delta_A &= \int_0^L \left(R_A x + M_0 - \frac{\omega}{2}x^2\right)\cdot x\,dx \\
&= \int_0^L \left(R_A x^2 + M_0 x - \frac{\omega}{2}x^3\right)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}R_A x^3 + \frac{1}{2}M_0 x^2 - \frac{\omega}{8}x^4\right]_0^L = \frac{1}{3}R_A L^3 + \frac{1}{2}M_0 L^2 - \frac{\omega}{8}L^4
\end{aligned}$$

$\delta_A = 0$ であるから

$$\frac{1}{3}R_A L^3 + \frac{1}{2}M_0 L^2 - \frac{\omega}{8}L^4 = 0$$

$$R_A = \frac{3}{8}\omega L - \frac{3}{2}\frac{M_0}{L}$$

力のつりあいから

$$R_B = \omega L - R_A = \frac{5}{8}\omega L + \frac{3}{2}\frac{M_0}{L}$$

モーメントのつりあいから

$$M_B = \frac{wL^2}{2} - R_A L - M_0 = \frac{1}{8}\omega L^2 + \frac{1}{2}M_0$$