材料力学　　演習課題 No.4：組合せ応力，ひずみ　　　　提出日:2003 年　　月　　日

解答例　　　　総得点:　　　　　点

クラス:　M1・M2　**学年:　　　年**　**学籍番号:**

氏名:

この用紙を表紙にして，レポート用紙に解答せよ．

問 1　：応力 $\sigma_x = 120\text{MPa}$,　$\sigma_y = -120\text{MPa}$,　$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0\text{MPa}$ が加わっているとき，主応力とその方向を 2 次元の固有値問題として求めよ．(10 点)

固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 120-\sigma & 0 \\ 0 & -120-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

となる．したがって

$$(120-\sigma)(120+\sigma) = 0$$

$$\sigma_1 = 120 \quad , \quad \sigma_2 = -120$$

1. 主応力 $\sigma_1 = 120$ に対応する主方向を $n_x = \cos\theta_1$,　$n_y = \sin\theta_1$ とすると

$$\begin{bmatrix} 120-120 & 0 \\ 0 & -120-120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

これより

$$240\sin\theta_1 = 0 \qquad \therefore \theta_1 = 0$$

2. 主応力 $\sigma_2 = -120$ に対応する主方向を $n_x = \cos\theta_2$,　$n_y = \sin\theta_2$ とすると

$$\begin{bmatrix} 120+120 & 0 \\ 0 & -120+120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

これより

$$240\cos\theta_2 = 0 \qquad \therefore \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

問 2　：応力 $\sigma_x = 120\text{MPa}$,　$\sigma_y = 40\text{MPa}$,　$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 30\text{MPa}$ が加わっているとき，主応力とその方向を 2 次元の固有値問題として求めよ．(10 点)

固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 120-\sigma & 30 \\ 30 & 40-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

となる．したがって

$$(120-\sigma)(40-\sigma) - 30^2 = 0$$

$$\sigma^2 - 160\sigma + 3900 = 0$$

$$\sigma_1 = 130 \quad , \quad \sigma_2 = 30$$

1. 主応力 $\sigma_1 = 130$ に対応する主方向を $n_x = \cos\theta_1$ ， $n_y = \sin\theta_1$ とすると

$$\begin{bmatrix} 120-130 & 30 \\ 30 & 40-130 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -10 & 30 \\ 30 & -90 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

これより

$$-\cos\theta_1 + 3\sin\theta_1 = 0$$

$$\tan\theta_1 = \frac{1}{3} \qquad \therefore \theta_1 = \tan^{-1}\frac{1}{3} = 18.4^\circ$$

2. 主応力 $\sigma_2 = 30$ に対応する主方向を $n_x = \cos\theta_2$ ， $n_y = \sin\theta_2$ とすると

$$\begin{bmatrix} 120-30 & 30 \\ 30 & 40-30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

これより

$$3\cos\theta_2 + \sin\theta_2 = 0$$

$$\tan\theta_2 = -3 \qquad \therefore \theta_1 = \tan^{-1}(-3) = -71.6^\circ$$

問 3 ：応力が

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

と与えられるとき，主応力を求めよ．(10 点)

固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 10-\sigma & 10 & 10 \\ 10 & 10-\sigma & 10 \\ 10 & 10 & 10-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

となる．したがって

$$(10-\sigma)^3 + 10^3 + 10^3 - 3 \cdot 10^2 \cdot (10-\sigma) = 0$$

$$\sigma^2(\sigma - 30) = 0$$

$$\sigma_1 = 30 \quad , \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

問 4 ：応力が

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 10 & 10 \\ 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

と与えられるとき，主応力とその方向を求めよ．(15 点)

固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 30-\sigma & 10 & 10 \\ 10 & -\sigma & 20 \\ 10 & 20 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

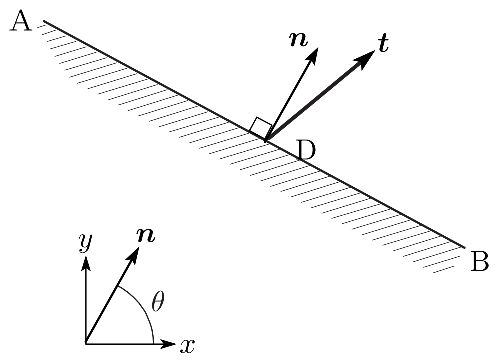
となる．したがって

$$\sigma^3 - 30\sigma^2 - 600\sigma + 8000 = 0$$

$$(\sigma - 10)(\sigma - 40)(\sigma + 20) = 0$$

$$\sigma_1 = 40 \quad , \quad \sigma_2 = 10 \quad , \quad \sigma_3 = -20$$

問 5 ：図のような物体内部の点 D の応力が $\sigma_x = 120\mathrm{MPa}$, $\sigma_y = 40\mathrm{MPa}$, $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 40\mathrm{MPa}$ であるという．この点 D を通る面 AB に働く単位面積あたりの力（応力ベクトル）$\boldsymbol{t}$ を求めよ．ただし，図に示す $\boldsymbol{n}$ は面の単位法線ベクトルであり，角度 $\theta = 60°$ である．2 次元問題として考えよ．(10 点)



Cauchy の関係

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$$

から，$n_x = \cos\theta$, $n_y = \sin\theta$ を用いて

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & 40 \\ 40 & 40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos 60° \\ \sin 60° \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & 40 \\ 40 & 40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 60 + 20\sqrt{3} \\ 20 + 20\sqrt{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 94.6 \\ 54.6 \end{Bmatrix}$$

なお

$$|\boldsymbol{t}| = \sqrt{94.6^2 + 54.6^2} = 109.3\ \mathrm{MPa}$$

問 6 ：ある材料の引張試験を行ったところ，引張降伏応力が 300MPa となった．この材料が最大せん断応力説に従うとすれば，せん断降伏応力はいくらになるか. (10 点)

一般に

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

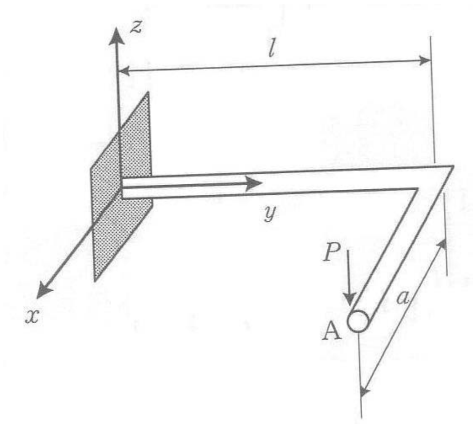
引張試験において降伏応力に達した時， $\sigma_x = \sigma_Y$ ， $\sigma_y = 0$ ， $\tau_{xy} = 0$ であるから，このとき

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_Y - 0}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sigma_Y}{2}$$

したがってせん断降伏応力は

$$\tau_Y = \frac{\sigma_Y}{2} = \frac{300}{2} = 150\ \mathrm{MPa}$$

問 7 ：図のように直角に曲げられた棒を考える．固定端から $l/2$ の距離の位置の棒の上面における最大主応力，最大せん断応力を求めよ．ただし $l = 200$mm，$a = 200$mm，$d = 10$mm，$P = 100$N とする．(15 点)



1. 片もちはりとして

点 C の曲げモーメント　　$|M_C| = P \cdot \dfrac{l}{2} = 100 \times 100 = 10^4$ N mm

$$\sigma = \frac{|M_c|}{Z} = \frac{10^4}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{32 \times 10^4}{\pi \cdot 10^3} = 102\ \mathrm{MPa}$$

2. ねじりを受ける丸棒として

ねじりトルク T とすると　　$T = P \times a = 100 \times 200 = 2 \times 10^4$ N mm

$$\tau = \frac{T}{Z_P} = \frac{T}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{16 \times 2 \times 10^4}{\pi \cdot 10^3} = 102 \ \mathrm{MPa}$$

$(\sigma, \tau) = (102, 102)$ を受ける場合について

$$\text{最大主応力} \qquad \sigma_{max} = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right) = 165 \ \mathrm{MPa}$$

$$\text{最大せん断応力} \qquad \tau_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 114 \ \mathrm{MPa}$$

問 8 ：ある機械部品に応力 $\sigma_y = 40\mathrm{MPa}$ ， $\tau_{xy} = 20\mathrm{MPa}$ がすでに作用している．さらに応力 σ_x を負荷したい．加えることのできる σ_x の値の範囲はどのようになるか．ただし，この部品を最大せん断応力説に従って破損する材料で製作し，その引張降伏応力は $\sigma_Y = 250\mathrm{MPa}$ であり，安全率 S を 5 とする．(10 点)

平面応力問題として考える．

主応力は固有方程式

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & 20 \\ 20 & 40 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

より

$$(\sigma_x - \sigma)(40 - \sigma) - 400 = 0$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\left\{\sigma_x + 40 \pm \sqrt{(\sigma_x + 40)^2 - 4(40\sigma_x - 400)}\right\}$$

最大せん断応力は

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min}) = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x + 40)^2 - 160(\sigma_x - 10)}$$

一方，許容せん断応力 τ_a ，せん断降伏応力 τ_Y とすると，この材料は最大せん断応力説に従うから，

$$\tau_Y = \frac{\sigma_Y}{2}$$

$$\tau_a = \frac{\tau_Y}{S} = \frac{\sigma_Y}{2S} = \frac{250}{2 \times 5} = 25 \ \mathrm{MPa}$$

$\tau_{max} < \tau_a$ であればよいから，

$$\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x + 40)^2 - 160(\sigma_x - 10)} < 25$$

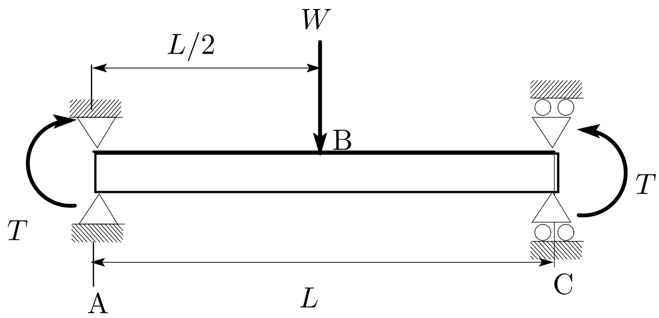
$$(\sigma_x + 40)^2 - 160(\sigma_x - 10) < 2500$$

$$\sigma_x^2 - 80\sigma_x + 700 < 0$$

$$(\sigma_x - 70)(\sigma_x - 10) < 0$$

$$\therefore \qquad 10 < \sigma_x < 70$$

問 9 ：図のように，直径 $d = 40\text{mm}$ の丸棒にねじりモーメント $T = 100\text{Nm}$ と横荷重 $W = 300\text{N}$ とが同時に作用する場合，軸に生じる最大引張応力と最大せん断応力を求めよ．ただし軸の長さ $L = 800\text{mm}$ とする．(10 点)



曲げモーメントの最大値は $x = L/2$ で生じ，

$$M = \frac{WL}{4} = \frac{300 \cdot 800}{4} = 6 \times 10^4 \ \text{N mm}$$

$$\begin{aligned}
M_e &= \frac{1}{2}\left(M + \sqrt{M^2 + T^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(6 \times 10^4 + \sqrt{(6 \ \times 10^4)^2 + (100 \times 10^3)^2}\right) \\
&= 8.83 \times 10^4 \ \text{N mm} \\
\sigma_{max} &= \frac{M_e}{Z} = \frac{32}{\pi d^3} M_e = \frac{32}{\pi \cdot 40^3} \cdot 8.83 \times 10^4 = 14.1 \ \text{MPa} \\
T_e &= \sqrt{M^2 + T^2} = 10^4 \sqrt{136} = 1.17 \times 10^5 \ \text{N mm} \\
\tau_{max} &= \frac{T_e}{Z_P} = \frac{16}{\pi d^3} T_e = \frac{16 \times 1.17 \times 10^5}{\pi \cdot 40} = 9.28 \ \text{MPa}
\end{aligned}$$

授業に関する感想，コメントなど