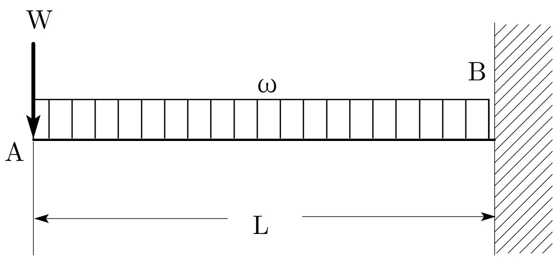
材料力学　　演習課題 No.1：はりのたわみ

総得点:　　　　　点

学科:　　　　　　　　　　**工学科**　**学年:**　　　**年**　**学籍番号:**　　　　　　　**氏名:**

問：図のように集中荷重 W ，分布荷重 ω を受ける片持ちはりについて以下の問に答えよ．ただし，ヤング率を E ，断面二次モーメントを I とする．(解答スペースが不足する場合にはレポート用紙を付加してよい)

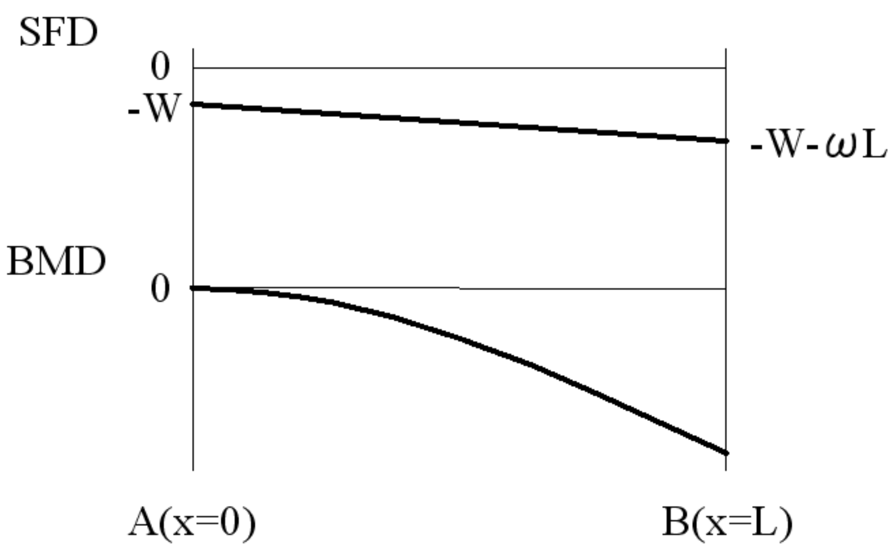


1. せん断力，曲げモーメントの分布を求め，SFD,BMD を描け．(20 点)
2. たわみ曲線を求めよ．(40 点)
3. 最大たわみを生じる位置と，最大たわみ量を求めよ．(10 点)
4. $W = 500N$，$\omega = 1N/mm$ ，$L = 500mm$ ，$E = 200GPa$ とするとき，このはりの断面を円とすると，最大たわみを $1mm$ 以下とするためには直径 d をどのように定めればよいか．またそのとき生じる最大応力を求めよ．(30 点)

解答例

1. A 点からの距離を x とし，上向きの力を正とすると

$$F = -W - \omega x$$
$$M = -Wx - \frac{1}{2}\omega x^2$$



2. たわみを y とすると，たわみの基礎方程式を積分して

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M = Wx + \frac{1}{2}\omega x^2$$
$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}Wx^2 + \frac{1}{6}\omega x^3 + C_1$$
$$EIy = \frac{1}{6}Wx^3 + \frac{1}{24}\omega x^4 + C_1 x + C_2$$

となり，境界条件は B 点 $(x = L)$ で $\frac{dy}{dx} = 0$，$y = 0$ であることから積分定数 C_1, C_2 は

$$C_1 = -\frac{1}{2}WL^2 - \frac{1}{6}\omega L^3$$

$$C_2 = \frac{1}{3}WL^3 + \frac{1}{8}\omega L^4$$

と求められる．よってこれらを代入し，y を求めると

$$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}Wx^3 + \frac{1}{24}\omega x^4 - \frac{1}{2}WL^2x - \frac{1}{6}\omega L^3x + \frac{1}{3}WL^3 + \frac{1}{8}\omega L^4\right)$$

となる．

3. 最大たわみは上の解答から A 点 $(x = 0)$ で生じ，最大たわみ量は

$$y_{\max} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}WL^3 + \frac{1}{8}\omega L^4\right)$$

である．

4. 円の断面二次モーメント I と断面係数 Z はそれぞれ

$$I = \frac{\pi}{64}d^4,\ Z = \frac{\pi}{32}d^3$$

であるから，最大たわみを 1 mm 以下とするには

$$y_{\max} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}WL^3 + \frac{1}{8}\omega L^4\right) = \frac{1}{E\frac{\pi}{64}d^4}\left(\frac{1}{3}WL^3 + \frac{1}{8}\omega L^4\right) \leq 1$$

となればよい．この式に与えられた数値を代入し，計算すると

$$41.3 \leq d$$

となるので，直径 d は 41.3mm 以上とすればよい．また，そのとき生じる最大応力は

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{max}|}{Z} = \frac{|-WL - \frac{1}{2}\omega L^2|}{\frac{\pi}{32}d^3} = 54.2\ \text{MPa}$$

である．