材料力学　演習（2004 年度 第 2 回） 2004/04/30（金）

解答例

点Aを $x=0$ とし，点B方向を x の正方向とする．

1．

点Aから距離 x で切断したと仮定すると，点Aを含む物体の釣り合いから次式を得る．

$$\mathrm{F}(x) = -\omega x + W \quad [\textbf{5点}] \tag{1}$$

$$\mathrm{M}(x) = -\frac{\omega}{2}x^2 + Wx = -x\left(\frac{\omega}{2}x - W\right) \quad [\textbf{5点}] \tag{2}$$

式 (1) に $x=L$ を代入する．

$$\mathrm{F} = -\omega L + W \tag{3}$$

式 (3) の値でＳＦＤ，ＢＭＤが変化するので以下のように場合分けをする．

(1)　$-\omega L + W \geq 0 (L \leq W/\omega)$ の場合

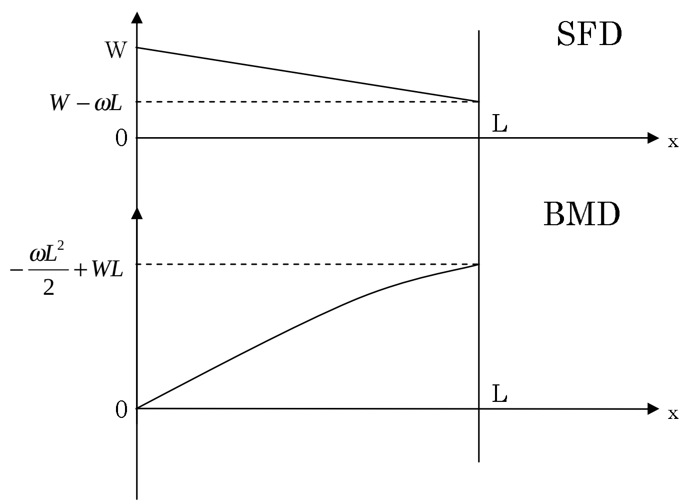

図 1: $-\omega L + W \geq 0 (L \leq W/\omega)$ の場合

(2)　$\omega L + W < 0 (L > W/\omega)$ の場合

式 (2) からＢＭＤは $x=0$，$2W/\omega$ で x 軸と交わるので更に以下のように場合分けをする．ただし，(ii) の図中の括弧内の値は問題４の式 (9) を用いた場合である．

３条件のどれか１組のＳＦＤ [**5点**]，ＢＭＤ [**5点**] を記入すれば正解とした．

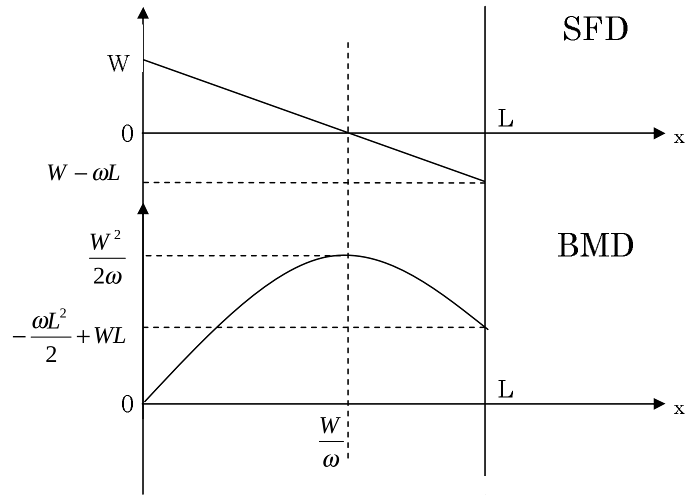

図 2: (i) $\quad \frac{W}{\omega} < L \leq \frac{2W}{\omega}$

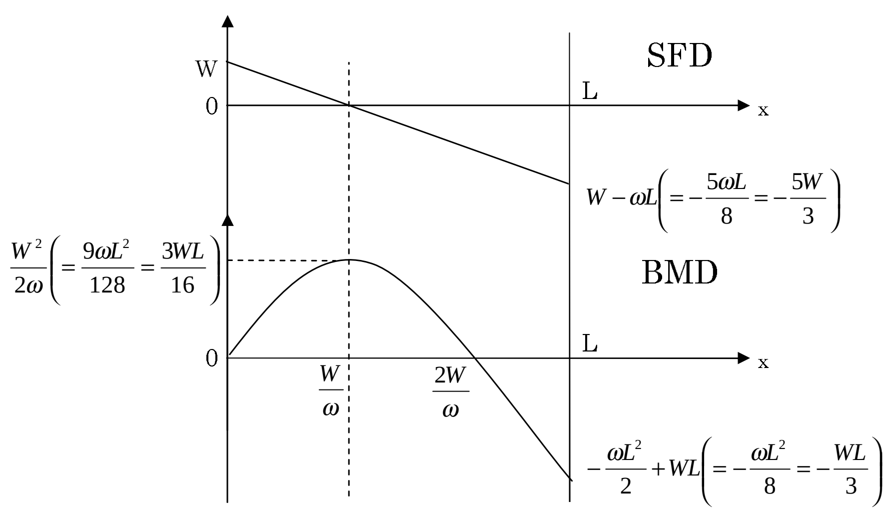

図 3: (ii) $\quad L > \frac{2W}{\omega}$

2.

たわみ量を y とし，下向きを正とする．たわみ曲線の微分方程式に式 (2) を代入する．

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{E\,I}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{E\,I}}\left(\frac{\omega}{2}x^2 - Wx\right) \quad [\textbf{5点}] \qquad (4)\end{aligned}$$

式 (4) を積分する．ただし，C_1，C_2 は積分定数である．

$$\mathrm{E\,I}\,\frac{dy}{dx} = \frac{\omega}{6}x^3 - \frac{W}{2}x^2 + C_1 \quad [\textbf{5点}] \qquad (5)$$

$$\mathrm{E\,I}\;y = \frac{\omega}{24}x^4 - \frac{W}{6}x^3 + C_1x + C_2 \quad [\textbf{5点}] \qquad (6)$$

境界条件は点B ($x = L$) で $y = 0$，$dy/dx = 0$ となるので式 (5)，(6) に代入して C_1，C_2 を求める． [**10点**]

$$C_1 = -\frac{\omega L^3}{6} + \frac{WL^2}{2} \quad [\textbf{5点}]$$

$$C_2 = \frac{\omega L^4}{8} - \frac{WL^3}{3} \quad [\textbf{5点}]$$

よってたわみ曲線は次式となる．

$$y = \frac{1}{\mathrm{E\,I}}\left(\frac{\omega}{24}x^4 - \frac{W}{6}x^3 - \frac{\omega L^3}{6}x + \frac{WL^2}{2}x + \frac{\omega L^4}{8} - \frac{WL^3}{3}\right) \quad [\textbf{5点}] \qquad (7)$$

3.

点Aのたわみ量を y_{A} とし，式 (7) に $x = 0$ を代入して以下のようになる．

$$y_{\mathrm{A}} = \frac{1}{\mathrm{E\,I}}\left(\frac{\omega L^4}{8} - \frac{WL^3}{3}\right) \quad [\textbf{10点}] \qquad (8)$$

4.

式 (8) で $y_{\mathrm{A}} = 0$ とすると W と ω の関係は以下のようになる．

$$W = \frac{3\omega L}{8} \quad [\textbf{10点}] \qquad (9)$$

5.

式 (9) より $L = 8W/3\omega$ となるのでＳＦＤ，ＢＭＤは問題１の (ii) となる．曲げモーメントの絶対値が最大となるところが危険断面となるので，その位置はＢＭＤより $x = 3L/8(= W/\omega)$，L のどちらかとなる． [**3点**]
そこで式 (2) に代入して $|\,\mathrm{M}\,(x)|$ の大小関係を見る．ただし，計算結果は ω と L で表し，括弧内は W と L で表した場合である．

$$\left|\mathrm{M}\left(\frac{3}{8}L\right)\right| = \frac{W^2}{2\omega} = \frac{9\omega L^2}{128}\left(= \frac{3WL}{16}\right) \quad [\textbf{2点}]$$

$$|\,\mathrm{M}\,(L)| = \frac{\omega L^2}{2} - WL = \frac{\omega L^2}{8}\left(= \frac{WL}{3}\right) \quad [\textbf{2点}]$$

$|\,\mathrm{M}\,(3L/8)| < |\,\mathrm{M}\,(L)|$ なので危険断面の位置は $x = L$ となる． [**3点**]

6.

断面係数をZ，曲げモーメントの絶対値の最大値を$|\mathrm{M}_{max}|$とすると最大応力σ_{max}は次式となる．また断面2次モーメントIを用いた場合は括弧内の式となる．

$$\sigma_{max} = \frac{|\mathrm{M}_{max}|}{\mathrm{Z}}\left(= \frac{|\mathrm{M}_{max}|}{\mathrm{I}}\frac{d}{2}\right) \qquad [\textbf{5点}] \tag{10}$$

よってσ_{max}は式(10)に$\mathrm{Z} = \pi d^3/32$($\mathrm{I} = \pi d^4/64$)，問題5より$|\mathrm{M}_{max}| = \omega L^2/8$を代入して以下のようになる．ただし，問題5と同様，計算結果はωとLで表し，括弧内はWとLで表した場合である．

$$\sigma_{max} = \frac{4\omega L^2}{\pi d^3}\left(= \frac{32WL}{3\pi d^3}\right) \quad [\textbf{5点}]$$