材料力学　試験（'02 年度 第 1 回）

2002/06/07（金）　得点

番号　　氏 名

注意　導出の過程を記すこと．未記入の場合は 0 点！
電卓は利用可．携帯電話等を電卓代わりに利用することは不可

---

1. 図のようにはりに荷重が加わっている．以下の問に答えよ．ただし，ヤング率を E，断面 2 次モーメントを I ，断面係数を Z とする．

   (a) 支点反力 R_B ， R_C を求めよ．(4 点)

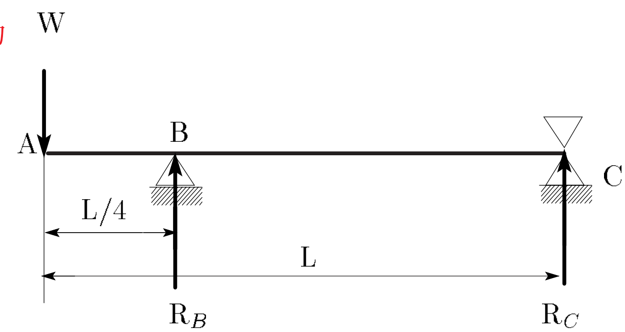
   図のように反力 R_B ， R_C を仮定すると力のつりあい

   $$R_B + R_C = W$$

   点 B のまわりのモーメントのつりあい

   $$W\,L = R_B\,(L - \frac{L}{4})$$

   から，$\underline{R_B = \frac{3}{4}L}$, $\underline{R_C = -\frac{1}{3}L \quad (答)}$



   (b) せん断力，曲げモーメントの分布を求め，SFD,BMD を描け．(10 点)

   せん断力を F ，曲げモーメントを M とすると，

   $0 < x < \frac{L}{4}$ において

   $$F = -W$$

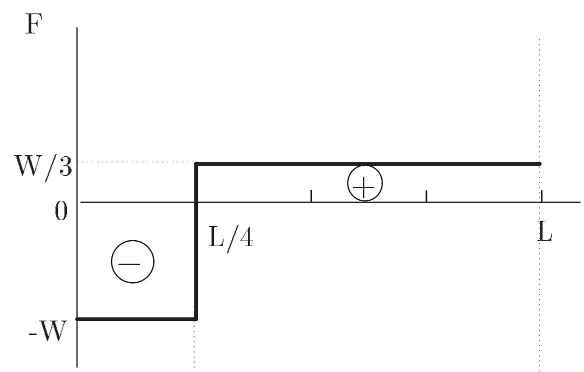
   $$M = -W\,x$$

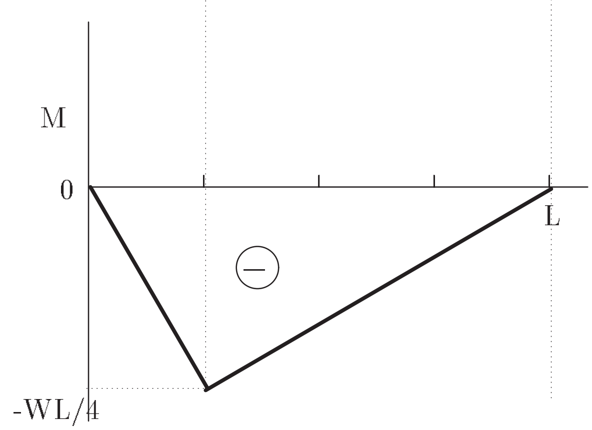
   $\frac{L}{4} < x < L$ において

   $$F = -W + R_B = \frac{1}{3}W$$

   $$\begin{aligned} M &= -W\,x + R_B\,(x - \frac{L}{4}) \\ &= \frac{W}{3}\,(x - L) \end{aligned}$$

   これらを図示すると右のようになる．





(c) 危険断面の位置はどこか，点 A からの距離として答えよ．(4 点)

前問から曲げモーメントの絶対値の最大値は， $x = \frac{L}{4}$ で $\frac{WL}{4}$ となる．
したがって危険断面の位置は $x = \frac{L}{4}$ (答え)

(d) このはりに働く最大曲げ応力を求めよ．(4 点)

曲げモーメントの絶対値の最大値は， $x = \frac{WL}{4}$ であるから，最大曲げ応力 σ_{max} は

$$\sigma_{max} = \frac{M}{Z} = \frac{WL}{4Z} \quad (答)$$

(e) このはりのたわみ曲線を求めよ．(26 点)

区間 $0 < x < \frac{L}{4}$ のたわみを y_1 ，区間 $\frac{L}{4} < x < L$ のたわみを y_2 とおく．
たわみの微分方程式は，以下のようになり，順次積分すると

$0 < x < \frac{L}{4}$ において

$$\begin{aligned} EI\frac{d^2 y_1}{d x^2} &= -M \\ &= W x \\ EI\frac{d y_1}{d x} &= \frac{1}{2} W x^2 + C_1 \quad (1) \\ EI y_1 &= \frac{1}{6} W x^3 + C_1 x + C_2 \quad (2) \end{aligned}$$

$\frac{L}{4} < x < L$ において

$$\begin{aligned} EI\frac{d^2 y_2}{d x^2} &= -M \\ &= -\frac{W}{3}(x - L) \\ EI\frac{d y_2}{d x} &= -\frac{W}{6}(x - L)^2 + C_3 \quad (3) \\ EI y_2 &= -\frac{W}{18}(x - L)^3 + C_3 (x - L) + C_4 \quad (4) \end{aligned}$$

境界条件は

$$\begin{cases} x = \frac{L}{4} \quad で \quad y_1 = 0 & (5) \\ x = L \quad で \quad y_2 = 0 & (6) \end{cases}$$

また，点 B での連続の条件は

$$\begin{cases} x = \frac{L}{4} \quad で \quad y_1 = y_2 & (7) \\ x = \frac{L}{4} \quad で \quad \frac{d y_1}{d x} = \frac{d y_2}{d x} & (8) \end{cases}$$

(6) を (4) に代入して，ただちに $C_4 = 0$
(5)(7) から (4) は

$$-\frac{W}{18}\left(\frac{L}{4} - L\right)^3 + C_3 (\frac{L}{4} - L) = 0$$

これより，

$$C_3 = \frac{WL^2}{32}$$

(8) を考慮して (1)(3) から

$$\frac{1}{2} W \left(\frac{L}{4}\right)^2 + C_1 = -\frac{W}{6}\left(\frac{L}{4} - L\right)^2 + C_3$$

$$\frac{WL^2}{32} + C_1 = -\frac{3WL^2}{32} + C_3$$

$$C_1 = -\frac{3}{32} WL^2$$

(5) を (2) へ代入して

$$\frac{1}{6} W \left(\frac{L}{4}\right)^3 + C_1 \frac{L}{4} + C_2 = 0$$

$$C_2 = -\frac{1}{6} W \left(\frac{L}{4}\right)^3 - C_1 \frac{L}{4}$$

$$C_2 = \frac{WL^3}{48}$$

これらをまとめると，たわみ曲線は以下のように求められる．

$0 < x < \frac{L}{4}$ において

$$\begin{aligned} EI y_1 &= \frac{W}{6} x^3 - \frac{3}{32} W L^2 x + \frac{WL^3}{48} \\ &= \frac{W}{96}(16x^3 - 9L^2 x + 2L^3) \\ &= \frac{W}{384}\left(x - \frac{1}{4} L\right)(4 x^2 - L x - 2 L^2) \end{aligned}$$

$\frac{L}{4} < x < L$ において

$$\begin{aligned} EI y_2 &= -\frac{W}{18}(x - L)^3 + \frac{WL^2}{32}(x - L) \\ &= -\frac{W}{18}(x - L)\left\{(x - L)^2 - \frac{9}{16} L^2\right\} \\ &= -\frac{W}{18}(x - L)\left(x - \frac{1}{4} L\right)\left(x - \frac{7}{4} L\right) \end{aligned}$$

番号　　　　氏 名

(f) 点 A のたわみを求めよ．(4 点)

点 A は $x = 0$ の位置であるから，前問のたわみ曲線において

$$EI\,y_1 = \frac{W}{6}x^3 - \frac{3}{32}W\,L^2\,x + \frac{W\,L^3}{48}$$

$$y_1(0) = \underline{\frac{W\,L^3}{48\,EI} \qquad \text{(答)}}$$

(g) BC 間でたわみの絶対値が最大になるのは，どこか．点 A からの距離で答えよ．またそのたわみの最大値（絶対値）はいくらか．(8 点)

(e) で得られたたわみ曲線を微分して

$$EI\,\frac{dy_1}{dx} = \frac{W}{2}x^2 - \frac{3WL^2}{32} = \frac{W}{2}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{4}L\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{4}L\right)$$

$$EI\,\frac{dy_2}{dx} = -\frac{W}{6}(x - L)^2 + \frac{WL^2}{32} = -\frac{W}{6}\left(x - \frac{4+\sqrt{3}}{4}L\right)\left(x - \frac{4-\sqrt{3}}{4}L\right)$$

$\frac{dy_1}{dx} = 0$ ， $\frac{dy_2}{dx} = 0$ となる x を考慮して，たわみの増減表を作成すると

x	0		$L/4$		$\frac{4-\sqrt{3}}{4}L$		L
$\frac{dy}{dx}$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
y	$\frac{WL^3}{48}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}WL^3}{192}$	$\nearrow$	0

これより，たわみの絶対値が最大になるのは $\underline{\frac{4-\sqrt{3}}{4}L}$ の位置で，たわみの最大値（絶対値）は

$$\underline{\frac{\sqrt{3}WL^3}{192} \qquad \text{(答)}}$$

2. 外径 d ，肉厚 t の円形断面のパイプの断面 2 次モーメント，断面係数を求めよ．ただし肉厚は外径に比べて充分薄いものとする ($t/d << 1$)．(20 点)

外径 d の中実円柱の断面 2 次モーメントは $\frac{\pi}{64}d^4$ である．

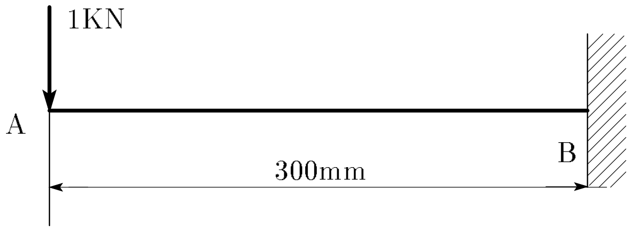
パイプの内径を $d_i = d - 2t$ とすると，断面 2 次モーメントの加法（減法）定理により，パイプの断面 2 次モーメント I は

$$\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{64}d^4 - \frac{\pi}{64}d_i^4 = \frac{\pi}{64}(d^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{64}(d - d_i)(d + d_i)(d^2 + d_i^2) \\
&= \frac{\pi}{64}\cdot 2t\cdot 2(d-t)\cdot\{d^2 + (d-2t)^2\} = \frac{\pi}{16}\cdot t\cdot(d-t)\cdot(2d^2 - 4\,d\,t + 4t^2) \\
&= \frac{\pi}{16}\cdot t\cdot d\left(1 - \frac{t}{d}\right)\cdot 2d^2\left\{1 - 2\frac{t}{d} + 2\left(\frac{t}{d}\right)^2\right\} \approx \underline{\frac{\pi}{8}t\,d^3 \qquad \text{(答)}}
\end{aligned}$$

断面係数 Z は

$$Z = \frac{I}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi}{8}t\,d^3\cdot\frac{2}{d} = \underline{\frac{\pi}{4}t\,d^2 \qquad \text{(答)}}$$

3. 図に示す片持ちはりがある．このはりを引張り強さ $\sigma_B = 500MPa$ の材料を用い，長方形断面として製作する．安全率 S を 5 として，はりの幅 b を $15mm$ とするとき，はりの高さ h を定めよ．(20 点)



曲げモーメントの最大値 M_{max} は点 B に生じ，その値は

$$M_{max} = 1000 \times 300\ N \cdot mm$$

最大応力 σ_{max} は,

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{Z}$$

ここで z は断面係数で，長方形断面の場合には

$$Z = \frac{1}{6}bh^2$$

である．

最大応力 σ_{max} が許容応力 $\sigma_a = \sigma_B/S$ 以下であれば良いから

$$\frac{\sigma_B}{S} > \frac{M}{Z} = \frac{M}{\frac{1}{6}bh^2}$$

これより

$$h > \sqrt{\frac{6MS}{b\,\sigma_B}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 1000 \cdot 300 \cdot 5}{15 \cdot 500}} = \sqrt{1200} \approx \underline{34.6mm \quad （答）}$$

4. 講義の感想，コメントなど自由に（採点には無関係！）