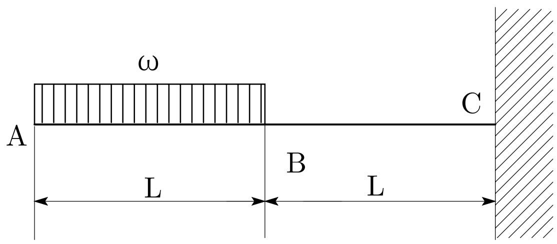
材料力学　試験（2K1年度 第1回）

2001/05/25（金）　得点

番号　　氏 名

1. 図のように分布荷重 ω を受ける片持ちはりについて以下の問に答えよ．ただし，ヤング率を E，断面二次モーメントを I とする．



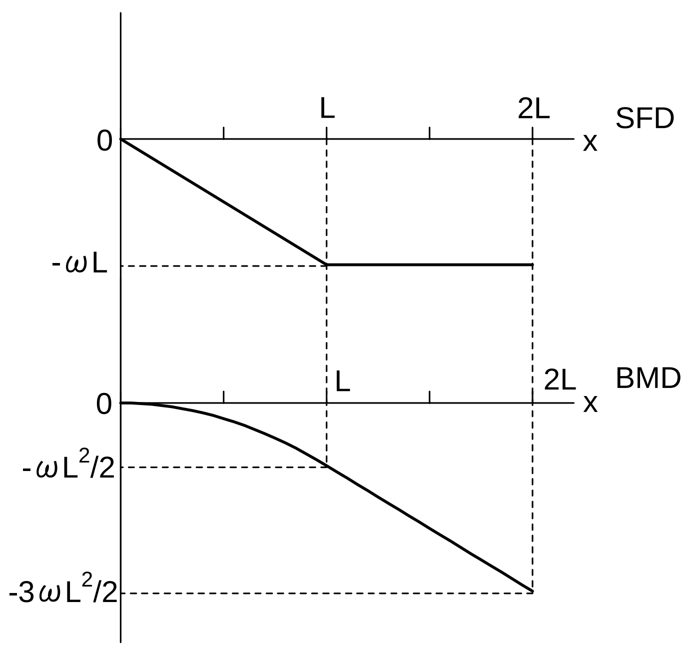
(a) せん断力，曲げモーメントの分布を求め，SFD,BMD を描け．(10点)

(b) たわみ曲線を求めよ．(30点)

(c) 最大たわみを生じる位置と，最大たわみ量を求めよ．(10点)

［解答例］

(a) せん断力および曲げモーメントをそれぞれ，F および M とすると，A 点から x の距離にある $x-x$ 断面において



i) 0 ≦ x ≦ L のとき

$$
\begin{aligned}
F &= -\omega x \\
M &= -\omega x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{\omega}{2}x^2
\end{aligned}
$$

ii) L ≦ x ≦ 2L のとき

$$
\begin{aligned}
F &= -\omega L \\
M &= -\omega L\left(x - \frac{x}{2}\right) = -\omega L x + \frac{\omega L^2}{2}
\end{aligned}
$$

これより SFD および BMD はそれぞれ，左図のようになる．

(b) たわみ，ヤング率および断面二次モーメントをそれぞれ，y，E および I とすると次の関係が成立する．

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

解答 (a) より

i) 0 ≦ x ≦ L のとき

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{2}x^2$$

ii) L ≦ x ≦ 2L のとき

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \omega Lx - \frac{\omega L^2}{2}$$

両辺をそれぞれ順次積分すると

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{\omega}{6}x^3 + C_1 \quad (1)$$
$$EIy = \frac{\omega}{24}x^4 + C_1x + C_2 \quad (2)$$

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{\omega L}{2}x^2 - \frac{\omega L^2}{2}x + C_3 \quad (3)$$
$$EIy = \frac{\omega L}{6}x^3 - \frac{\omega L^2}{4}x^2 + C_3x + C_4 \quad (4)$$

固定端 C($x = 2L$) においてたわみ角，たわみが 0 であるから，式 (3)，(4) より

$$2\omega L^3 - \omega L^3 + C_3 = 0 \qquad \therefore C_3 = -\omega L^3$$
$$\frac{4\omega L^4}{3} - \omega L^4 - 2\omega L^4 + C_4 = 0 \qquad \therefore C_4 = \frac{5\omega L^4}{3}$$

B 点 ($x = L$) においてたわみ角，たわみが連続であるから

$$\frac{\omega L^3}{6} + C_1 = \frac{\omega L^3}{2} - \frac{\omega L^3}{2} - \omega L^3 \qquad \therefore\ C_1 = -\frac{7\omega L^3}{6}$$
$$\frac{\omega L^4}{24} - \frac{7\omega L^4}{6} + C_2 = \frac{\omega L^4}{6} - \frac{\omega L^4}{4} - \omega L^4 + \frac{5\omega L^4}{3} \qquad \therefore\ C_2 = \frac{41\omega L^4}{24}$$

得られた積分定数 C_1〜C_4 を式 (2)，(4) に代入し整理すると，たわみ曲線は次式で与えられる．

$$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{\omega}{24}x^4 - \frac{7\omega L^3}{6}x - \frac{41\omega L^4}{24}\right) \qquad (0 \le x \le L \text{ のとき})$$

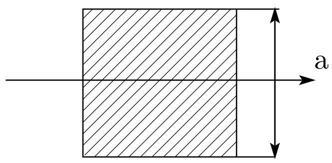
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{EI}\left(\frac{\omega L}{6}x^3 - \frac{\omega L^2}{4}x^2 - \omega L^3 x + \frac{5\omega L^4}{3}\right) \\ &= \frac{1}{EI}\left[\frac{\omega L}{6}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 - \frac{9\omega L^3}{8}x + \frac{27\omega L^4}{16}\right] \end{aligned} \qquad (L \le x \le 2L \text{ のとき})$$

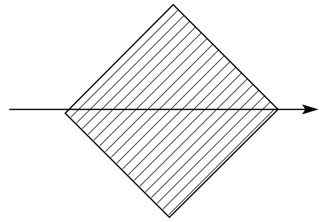
(c) A 点 ($x = 0$) において最大たわみは生じ，その大きさは解答 (b) 第一式に $x = 0$ を代入すると

$$y_{max} = \frac{41\omega L^4}{24EI}$$

2. 一辺が a の正方形断面のはりについて，

(a) 図 (A)，(B)，(C) のように X 軸を中立面として曲げられる場合について，断面 2 次モーメントをそれぞれ求めよ．（30 点）





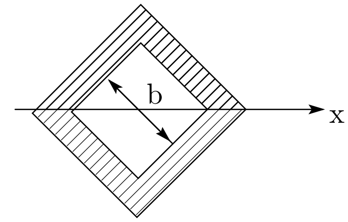


図 (A)　　図 (B)　　図 (C)

[解答例]　各図の断面 2 次モーメントをそれぞれ I_A，I_B，I_C とする．（各 10 点，答えのみ 5 点減点）

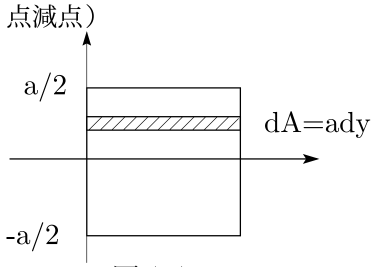


図 (A)

$$
\begin{aligned}
I_A &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2\, a\, dy = 2a \int_0^{\frac{a}{2}} y^2\, dy \\
&= 2a \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{2a}{3}\frac{a^3}{8} = \frac{a^4}{12}
\end{aligned}
$$

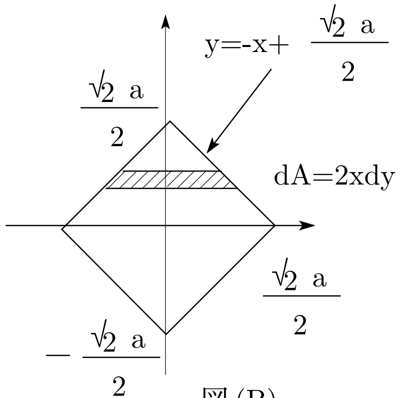


図 (B)

$$
\begin{aligned}
I_B &= 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}a}{2}} y^2\, dA = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}a}{2}} y^2 \cdot 2x\, dy \\
&= 4\int_0^{\frac{\sqrt{2}a}{2}} y^2 \left\{-y + \frac{\sqrt{2}a}{2}\right\} dy \\
&= 4\int_0^{\frac{\sqrt{2}a}{2}} \left\{-y^3 + \frac{\sqrt{2}a}{2} y^2\right\} dy \\
&= 4\left[-\frac{y^4}{4} + \frac{\sqrt{2}a}{2}\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}a}{2}} = 4\left\{-\frac{a^4}{16} + \frac{\sqrt{2}a}{2}\frac{a^3}{2\sqrt{2}}\right\} \\
&= 4a^4\left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{12}\right) = \frac{a^4}{12}
\end{aligned}
$$

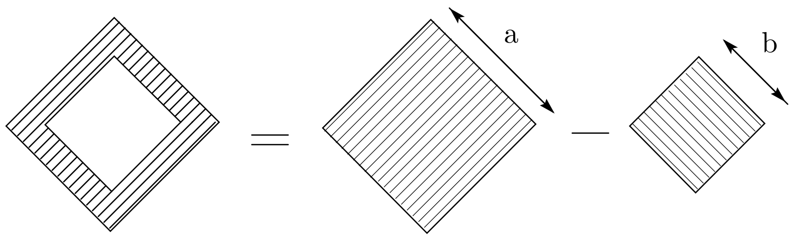


図 (C)

加法（減法）定理を用いて

$$
I_C = I_B - I_B\big|_{\text{辺の長さ}=b} = \frac{a^4}{12} - \frac{b^4}{12} = \frac{1}{12}(a-b)(a+b)(a^2+b^2)
$$

(b) 図 (A) と (B) のはりについて，同じ曲げモーメントが加わった場合に生じる最大応力の比を求めよ．(10 点)

[解答例]

加わっている曲げモーメントを M とし， 図 (A)，(B) のはりに生じる最大応力をそれぞれ σ_A ，σ_B ，断面係数をそれぞれ Z_A ， Z_B とすると

$$
\begin{aligned}
\sigma_A &= \frac{M}{Z_A}, \qquad & \sigma_B = \frac{M}{Z_B}, \\
Z_A &= \frac{I_A}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{2}} = \frac{a^3}{6}, \qquad & Z_B = \frac{I_B}{\frac{\sqrt{2}a}{2}} = \frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{\sqrt{2}a}{2}} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}
\end{aligned}
$$

したがって最大応力の比は

$$
\frac{\sigma_B}{\sigma_A} = \frac{\frac{M}{Z_B}}{\frac{M}{Z_A}} = \frac{Z_A}{Z_B} = \frac{\frac{a^3}{6}}{\frac{\sqrt{2}a^3}{12}} = \frac{12}{6\sqrt{2}} = \sqrt{2}
$$

(c) 問 1 のはりの断面形状を図 (A)，(B) の正方形とした場合について，生じる最大たわみの比を求めよ．(10 点)

[解答例] はりのたわみの基礎式は

$$
\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{E\,I}
$$

であり，他の条件が同じであれば，断面 2 次モーメントが等しければ，たわみ曲線も同一となる．前問より，図 (A)，図 (B) の断面ではどちらも $I = \frac{a^4}{12}$ で断面 2 次モーメントが等しく，したがって生じる最大たわみも等しい（最大たわみの比は 1:1)．

3. 講義の感想，コメントなど自由に（採点には無関係！）