情報理論
第 9 回 伝送情報量と通信路容量

堀田 政二
工学部 情報工学科

情報伝達における情報理論の中心的課題 (再掲)

情報をより正確に，高速に，安く，誰にでも，いつでも，どこでも伝達するために，シャノンは情報理論の中心的課題として以下の二つを掲げている:

- 通信系において伝送すべき情報の量を明らかにすること
  - 情報源の発生情報量を明確にすること
  - 通信路の情報伝送能力を明確にすること
- 具体的な情報交換操作の考案
  - 送受信機における情報の符号化法と復号化法の考案

(2)

通信路のモデル (再掲)

- 通信: 遠隔地どうしを結ぶ電線，電波等が必要
- 通信路: 情報理論特有の用語．通信回線のこと
- デジタル通信路: 通信路行列と通信路線図で表現できる離散通信路
- n 元通信路: 送信記号の数が n 個の $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ の通信路．雑音の無い理想の環境では送信記号がそのまま受信記号 $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$ となる: $n = m$
- 実際には雑音があるので $n = m$ とは限らない (間違って伝わったり，減ったり増えたりする)

通信における相互情報量

相互情報量

$$I(A;B) = H(A) - H(A|B)$$

前回は A と B を抽象的な事象系として考えたが，今回は通信路モデルに当てはめて相互情報量について考えてみる

- A: 送信記号の集合 $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$
- B: 受信記号の集合 $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$
- 送信記号 $A \to$ 受信記号 B

雑音のない理想的な状況では B は A と同じであると言えるので，不確定さはない．しかし，実際には雑音があり，B と A は同じであると信じられない，すなわち A に関する知識の不確定さは 0 になったとは言えず，減少したとしか言えない．この減少の度合いが相互情報量

伝送情報量 (transinformation)

通信の分野では $I(A;B)$ **を伝送情報量と呼ぶ．** $I(A;B)$ **の定義より**

$$I(A;B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(a_i, b_j)\log_2 \frac{p(a_i, b_j)}{p(a_i)p(b_j)}$$

ここで

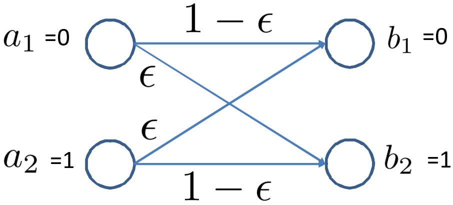
- $p(a_i, b_j) = P(b_j|a_i)p(a_i)$
- $p(b_j) = \sum_{i=1}^{n} p(a_i, b_j) = \sum_{i=1}^{n} p(b_j|a_i)p(a_i)$

したがって，送信記号の生起確率 $p(a_i)$ **と，通信路行列** $p(b_j|a_i)$ **が分かれば** $I(A;B)$ **は計算可能**

基本的な例: 二元対称通信路 (BSC)

次のような通信路行列 P で定義される二元通信路のこと

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1-\epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 1-\epsilon \end{pmatrix}$$



- $0 \le \epsilon < 1/2$ **は雑音による誤り発生率で，誤り率と呼ばれる**
- ϵ **の具体的な値は通信路によって異なるが，おおよそ $10^{-1} \sim 10^{-10}$ 程度の値**

BSC の伝送情報量 (1/3)

BSC において，記号 0 の生起確率を $p(a_1) = p$ とすれば，記号 1 の生起確率は $p(a_2) = 1 - p$ となる．一方，通信路行列の各要素は

$$p(b_j|a_i) = p_{ij} = \begin{cases} 1 - \epsilon \ (i = j) \\ \epsilon \ (i \neq j) \end{cases}$$

であるから，これらから $p(b_j)$ を求めると

- $p(b_1) = p(1 - \epsilon) + (1 - p)\epsilon$
- $p(b_2) = p\epsilon + (1 - p)(1 - \epsilon)$

となる．ここで，便宜上 $\nu = p\epsilon + (1 - p)(1 - \epsilon)$ とおけば

- $p(b_1) = 1 - \nu$，$p(b_2) = \nu$

となる．ところで $I(A; B) = H(A) - H(A|B) = H(B) - H(B|A)$

(7)

BSC の伝送情報量 (2/3)

B に関する事前エントロピー $H(B)$ は

$$H(B) = -\sum_{j=1}^{2} p(b_j) \log_2 p(b_j) = \mathcal{H}(\nu)$$

一方，事後エントロピー $H(B|A)$ は

$$\begin{aligned}
H(B|A) &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(a_i, b_j) \log_2 p(b_j|a_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(b_j|a_i)p(a_i) \log_2 p(b_j|a_i) \\
&= -p(p_{11} \log_2 p_{11} + p_{21} \log_2 p_{21}) - (1-p)(p_{12} \log_2 p_{12} + p_{22} \log_2 p_{22}) \\
&= -\epsilon \log_2 \epsilon - (1-\epsilon) \log_2 (1-\epsilon) \\
&= \mathcal{H}(\epsilon)
\end{aligned}$$

したがって $I(A;B) = H(B) - H(B|A) = \mathcal{H}(\nu) - \mathcal{H}(\epsilon)$

BSC の伝送情報量 (3/3)

BSC の伝送情報量

$I(A;B) = H(B) - H(B|A) = \mathcal{H}(\nu) - \mathcal{H}(\epsilon) = \mathcal{H}(p\epsilon + (1-p)(1-\epsilon)) - \mathcal{H}(\epsilon)$

単位は bit/**記号．特に，**$p = 1/2$ **の時**

$$I(A;B) = \mathcal{H}(1/2) - \mathcal{H}(\epsilon) = 1 - \mathcal{H}(\epsilon)$$

すなわち，情報源から発せられる 0 **と** 1 **の生起確率が等しいとき，伝送情報量は** 1 **から誤り率** ϵ **のエントロピー関数を引いたものになる**

- ϵ **が** 0 **か** 1 **の時，伝達情報量は** 1**．すなわち，**B **を観測すれば，**A **を知ることが出来る ．つまり完璧に送信できている**
- ϵ **が** $1/2$ **の時，伝達情報量は** 0**．すなわち，**B **から** A **を知ることはできない．つまり，何も送信していないのと実質的に同じ**

記号単位の通信路容量 (channel capacity)

一般に M 個の送信記号 a_i $(i = 1, ..., M)$ を持つ通信路において，各記号の生起確率 p_i $(i = 1, ..., M)$ に関する伝送情報量の最大値を通信路容量と呼ぶ:

通信路容量

$$C = \max_{p_i} I(A; B) \text{ bit/記号}$$

- 与えられた通信路を通して，送信記号の生起確率 p_i をうまく調整した場合の，一つの受信記号で得られる送信記号に関する伝送情報量の最大値を表す
- 言い換えれば，通信路を最も効率的に使った場合，一つの受信記号あたり，どれだけの情報量が平均して得られるかを表している

時間単位の通信路容量

単位時間あたり (1 **秒あたり**) **に送れる最大の伝送情報量という意味で通信路容量を** bit/sec (bps) **で定義することもある**:

- 1 **記号あたりの伝送時間がどの記号もすべて等しく，**t **秒である場合は，記号単位の通信路容量** C bit/**記号から，時間単位の通信路容量** C' bit/sec **への変換は以下となる**:

$$C' = \frac{C}{t} \text{ bps}$$

- **各記号の伝送時間が等しくない場合，すなわち，各記号の伝送時間が** $t_1, .., t_M$ **の場合，平均伝送時間は**

$$\tau = \sum_{i=1}^{M} p_i t_i$$

となる．この τ **と伝送情報量** $I(A;B)$ **を使って伝送速度** R **を以下のように定義**:

$$R = \frac{I(A;B)}{\tau}$$

この R **の各記号の生起確率** p_i **に関する最大値が** C' **となる**

$$C' = \max_{p_i} R$$

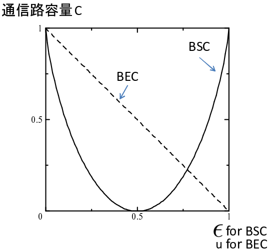
記号単位の通信路容量の計算

- **二元対称通信路** (BSC): **送信記号の生起確率が** $p = 1/2$ **のとき，伝送情報量** $I(A;B)$ **は最大となる**

$$C = \mathcal{H}(1/2) - \mathcal{H}(\epsilon) = 1 - \mathcal{H}(\epsilon) \text{ bit/記号}$$

- **二元消失通信路** (BEC): **送信記号の生起確率が** $p = 1/2$ **のとき，伝送情報量** $I(A;B)$ **は最大となる**

$$C = (1-u)\mathcal{H}(1/2) = 1 - u \text{ bit/記号}$$



時間単位の通信路容量の計算

雑音が無い二元通信路の場合:

- **情報源記号**: a_1, a_2，**生起確率**: p_1, p_2，**伝送時間**: t_1, t_2

雑音が無いので，伝送情報量 $I(A;B)$ **は** $H(A)$ **に等しい**

$$I(A;B) = -p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2$$

伝送時間 τ **は**

$$\tau = p_1 t_1 + p_2 t_2$$

したがって伝送速度 R **は**

$$R = I(A;B)/\tau = (-p_1 \log_2 p_1 - p_2 \log_2 p_2)/(p_1 t_1 + p_2 t_2)$$

この R **の最大値は** p_1 **で微分して** $dR/dp_1 = 0$ **を解けばよい．これより** $(\log_2 p_1)/t_1 = (\log_2 p_2)/t_2$ **が得られることから**
$C' = \max R = -(\log_2 p_1)/t_1 = -(\log_2 p_2)/t_2$ bit/sec

時間単位の通信路容量の計算例

雑音が無い二元通信路の場合で，送信記号の伝送時間が $t_1 = 0.1$ 秒，$t_2 = 0.2$ 秒のとき，時間単位の通信路容量 C' はいくらか

- **生起確率が p_1, p_2 なので，** $-(\log_2 p_1)/0.1 = -(\log_2 p_2)/0.2$ **より，** $2\log_2 p_1 = 2\log_2 p_2$**．ゆえに** $p_1^2 = p_2$
- **ところで** $p_1 + p_2 = 1$ **より，** $p_1^2 + p_1 - 1 = 0$**．ゆえに** $p_1 = (-1+\sqrt{5})/2 \sim 0.618$
- **したがって，求めたい通信路容量は** $C' = -(\log_2 p_1)/t_1 = -(\log_2 0.618)/0.1 \sim 6.943$ bit/sec

問題

- 【9.1】二元消失通信路の伝送情報量が次になることを証明せよ:

$$I(A;B) = (1-u)\mathcal{H}(p)\ \text{bit/記号}$$

ただし p は，記号 0 の生起確率，u は判定不能率とする．
- 【9.2】0 と 1 が，それぞれ確率 $3/4$，$1/4$ で発生する二元対称通信路において，誤り率 $\epsilon = 1/8$ のときの伝送情報量を求めよ．
- 【9.3】0 と 1 が等確率で発生する二元消失通信路において，判定不能率 $u = 1/8$ のときの伝送情報量を求めよ．
- 【9.4】二元対称通信路において，誤り率 $\epsilon = 1/10$ のときの記号単位の通信路容量 C を求めよ．