情報理論
第 8 回 中間試験の解説& 相互情報量

堀田 政二
工学部 情報工学科

中間試験の解説，問 1

計算の過程もなるべく書くこと．また単位も書くこと
問 1:ジョーカーを除いた 52 枚のトランプがあり，そこから 1 枚のカードを引くとする．引いたカードの色を表す確率変数を C，引いたカードの数を表す確率変数を X とする．この時，以下の問いに答えよ．ただし，回答は $\log_2$ 表記のままで良い．

- X **の期待値 (平均) (2 点)**→ $\sum_{i=1}^{13} \frac{4}{52} \times i = 7$
- **引いたカードがスペード (黒) のキング（13）となる確率 $P(C=\text{黒}, X=13)$ はいくらか (2 点)．また，引いたカードがスペードのキングであることを知った時の自己情報量はいくらか (2 点)**
- $P(C=\text{黒}, X=13) \to P(\text{スペード}, X=13)$ **の間違い．** $P(\text{スペード}, X=13) = 1/52$**，自己情報量は** $\log_2 52\texttt{bit}$

(2)

中間試験の解説，問 1

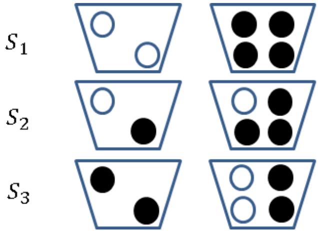
引いたカードの色が黒であることを知っているという条件のもとで，そのカードがキング（13）である確率 $P(X=13|C=\text{黒})$ はいくらか (2 点)．また，この条件のもとで，引いたカードがスペードのキングであることを知った時の自己情報量はいくらか (2 点)．

- $P(X=13|C=\text{黒}) = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$
- $P(X=13, \text{スペード}\ |C=\text{黒}) = \frac{1}{26}$ なので自己情報量は $\log_2 26\mathtt{bit}$

(3)

中身の見えない二つの壺 A，B がある．壺 A の中には 2 個，壺 B には 4 個の玉を入れることができ，現在，二つの壺には玉が満杯に詰まっているとする．さらに，二つの壺に入っている玉の種類は黒玉●が 4 個，白玉○が 2 個であるということがわかっている．この二つの壺から 1 個ずつ球を取り出し，交換して相手の壺へ戻すという動作の系列について以下の問いに答えよ．

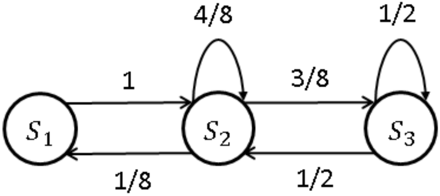
- 壺 A の中身の取りうる状態，壺 B の中身の取りうる状態を●と○を用いて全て図示せよ (3 点)．



(4)

この試行は単純マルコフ過程である．遷移確率行列 (6 点) と状態遷移図 (6 点) を描け．

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{4}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



中間試験の解説，問 3

以下のエルゴード的単純マルコフ連鎖について答えよ．

•

- 遷移確率行列 P を書け (2 点)．

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

- 初期分布が $\pi(0) = (0, 1)$ のとき，状態確率分布 $\pi(1)$ を求めよ (3 点)．

$$\boldsymbol{\pi}(1) = \boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{P} = (0.2, 0.8)$$

中間試験の解説，問3

- **定常分布を求めよ (5 点).**

求めたい分布を $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ **とすると**

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha} P$$

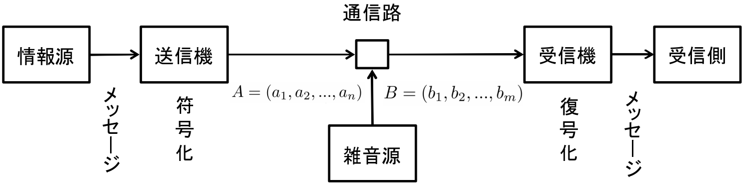
を $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ **の条件のもと，解けばよい．実際に解くと**

$$\alpha_1 = \frac{2}{3}, \alpha_2 = \frac{1}{3}$$

- **この単純マルコフ連鎖を情報源とみなした場合，情報源のエントロピーを求めよ．ただし** $\mathcal{H}(0.1) = \mathcal{H}(0.9) \sim 0.469$**，** $\mathcal{H}(0.2) = \mathcal{H}(0.8) \sim 0.722$ **を用いて良い (5 点).**

$$\alpha_1 \times \mathcal{H}(0.1) + \alpha_2 \times \mathcal{H}(0.2) \sim 0.553\text{bit}$$

通信系の工学モデル



- 通信路を通して受信側に送信できる情報量 (伝送情報量) を求めたい
- A をそのまま受信すれば曖昧さは 0
- 実際には雑音により誤りが発生するため正確にメッセージを伝えることができない
- すなわち，通信路を介すことで曖昧さが生じてしまう

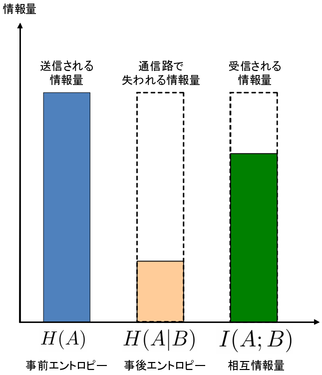
相互情報量 (mutual information)

事象系 A と事象系 B の相互情報量

送信信号の情報が受信信号にどれだけ含まれるか

$$I(A;B) = H(A) - H(A|B)$$

- $H(A)$: **事前エントロピー，** $H(A|B)$: **事後エントロピー**



相互情報量の定義式

$$
\begin{aligned}
I(A;B) &= H(A) - H(A|B) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} p(a_i)\log_2 p(a_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(a_i,b_j)\log_2 p(a_i|b_j) \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\{\sum_{j=1}^{m} p(a_i,b_j)\}\log_2 p(a_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(a_i,b_j)\log_2 \frac{p(a_i,b_j)}{p(b_j)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(a_i,b_j)\log_2 \frac{1}{p(a_i)} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(a_i,b_j)\log_2 \frac{p(a_i,b_j)}{p(b_j)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(a_i,b_j)\log_2 \frac{p(a_i,b_j)}{p(a_i)p(b_j)}
\end{aligned}
$$

- **事後エントロピーによる事前エントロピーの減少分**
- B **を知ることにより** A **に関するあいまいさの減少分**

相互情報量の例

【例】

- A: X 君が試験に合格するかどうかという事象
- B: X 君が熱心に勉強したかどうかという事象

B を知る前は A のあいまいさは大きく，X 君が合格するかどうかは予測困難だが，B を知った後ではあいまいさはかなり減少するだろう

この例を相互情報量で書くと

$$I(\text{合格}; \text{勉強})$$

相互情報量の性質

相互情報量には以下の性質が成り立つ:

- $I(A;B) = I(B;A)$ **(対称性)**

これより

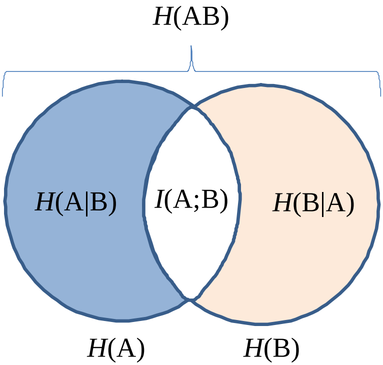
$$\begin{aligned} I(A;B) &= H(A) - H(A|B) \\ &= H(B) - H(B|A) = H(A) + H(B) - H(AB) \end{aligned}$$

となることがわかる．したがって，これらから

- $H(A) = H(A|B) + I(A;B)$
- $H(B) = H(B|A) + I(A;B)$
- $H(AB) = H(A) + H(B) - I(A;B)$
- $H(AB) = H(A) + H(B|A) = H(B) + H(A|B)$

相互情報量 $I(A;B)$ **は** A **と** B **に関して対称で，** A **と** B **の相互に，共通に含まれる情報量**

各種エントロピーと相互情報量との関係



この図は覚えてしまおう

相互情報量の上下限

相互情報量に関する不等式

$$0 \leq I(A;B) \leq H(A)$$

【下限】

- 左側の不等式．等号が成り立つのは A と B が独立のとき
- 【X 君の合格に関する例】B: 来年の夏は冷夏であるという事象
- B を知っても X 君の合格に関するあいまいさは減少しない

【上限】

- 右側の不等式．等号が成り立つのは $H(A|B) = 0$，すなわち B を知った後の A に関するエントロピーが 0 となる
- 【X 君の合格に関する例】B: 出席すれば自動的に合格できる試験に出席するかどうか
- B を知れば X 君の合格に関するあいまいさは 0 になる

(14)

相互情報量とエントロピー関数 (1/4)

ある都市の天気に関する事象系を $A=\{a_1, a_2\}$ とする．ここで

$$a_1\text{: 雨が降る，} a_2\text{: 雨が降らない}$$

であり，それぞれの生起確率は等確率 $p(a_1)=p(a_2)=1/2$ であるとする

天気予報を聞く前の事前エントロピー

$$H(A) = -1/2\log_2(1/2) - 1/2\log_2(1/2) = 1 \text{ bit}$$

一方，天気予報に関する事象系を $B=\{b_1, b_2\}$ とする．ここで

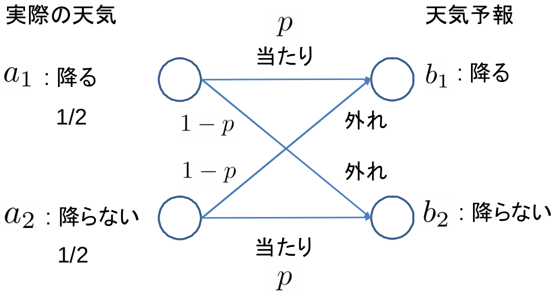
$$b_1\text{: 雨が降るという予報，} b_2\text{: 雨が降らないという予報}$$

天気予報の的中率を p とすると，予報がはずれる確率は $1-p$

$$p(a_i|b_j) = \begin{cases} p \ (i = j) \\ 1 - p \ (i \neq j) \end{cases}$$

天気予報での雨の降る確率 $p(b_1)$，降らない確率 $p(b_2)$ は

- $p(b_1) = p(a_1) \times p + p(a_2) \times (1-p) = p/2 + (1-p)/2 = 1/2$
- $p(b_2) = p(a_1) \times (1-p) + p(a_2) \times p = (1-p)/2 + p/2 = 1/2$



相互情報量とエントロピー関数 (3/4)

$$p(a_i, b_j) = \begin{cases} p(a_i|b_j)p(b_j) = p/2 \ (i = j) \\ (1-p)/2 \ (i \neq j) \end{cases}$$

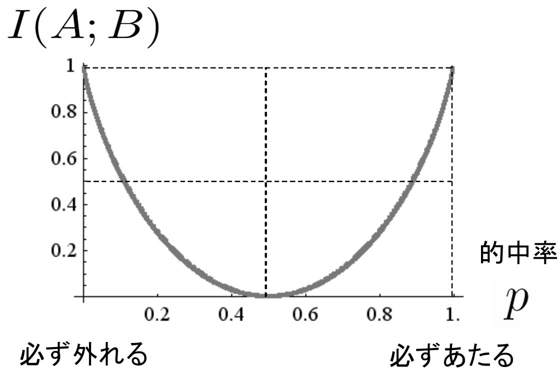
事後エントロピー

$$\begin{aligned} H(A|B) &= -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} p(a_i, b_j)\log_2 p(a_i|b_j) \\ &= -\frac{1}{2}p\log_2 p - \frac{1}{2}(1-p)\log_2(1-p) \\ &- \frac{1}{2}(1-p)\log_2(1-p) - \frac{1}{2}p\log_2 p \\ &= -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) \\ &= \mathcal{H}(p) \end{aligned} \tag{1}$$

したがって，相互情報量は

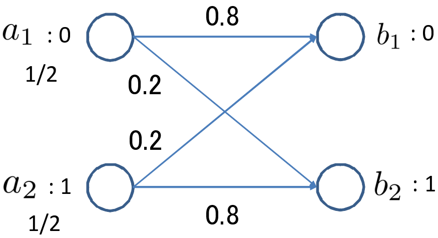
$$I(A;B) = H(A) - H(A|B) = 1 - \mathcal{H}(p)$$

相互情報量とエントロピー関数 (4/4)



問題

- 【8.1】次の図で表される二元対称通信路の相互情報量を求めよ:



- 【8.2】プロ野球のある球団 X の優勝する確率は $1/3$ である．ある解説者は球団 X が優勝すると良く予想するが，それが当たる確率は $2/5$ である．一方，優勝しないと予想した場合の的中率は $4/5$ である．この解説者から球団 X の成績について得られる相互情報量を求めよ．