情報理論
第 2 回 確率論の基礎

堀田 政二
工学部 情報工学科

集合

- 集合 (set) とは，数学的に規定できるものの集まり
  例：1 から 8 までの自然数の集合を A とする

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

- 対象の一つ一つを集合の元，または要素 (element) と呼ぶ
  A の要素は 1,2,3,4,5,6,7,8
- a が A の要素であることを $a \in A$，要素でないことを $a \notin A$ と書く

$$3 \in A, 9 \notin A$$

- 集合 $B = \{3, 4, 5\}$ の要素は全て A の要素．このとき B は A の部分集合 (subset) であるといい，下記のように表す

$$B \subset A, \quad A \supset B$$

(2)

真部分集合と空集合

- A 自身も A の部分集合である

$$A \subset A$$

- A の部分集合 B が A と一致する可能性がある場合は $B \subseteq A$ と書く
- B が A の部分集合であり，A の要素ではあるが B の要素ではないものが A に含まれるとき，B を A の真部分集合 (proper subset) と呼ぶ
  例：$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad B = \{1, 3, 5\}$
- 要素を含まない集合を空集合 (empty set) と呼び，通常 $\emptyset$ で表す

集合の和，積，差

- 集合 A，B に対して，A または B に属する要素からなる集合を和集合 (sum) と呼ぶ

$$A \cup B$$

- A および B に属する要素からなる集合を積集合 (product) と呼ぶ

$$A \cap B$$

- A に属して B に属さない要素からなる集合を差集合 (difference set) と呼ぶ

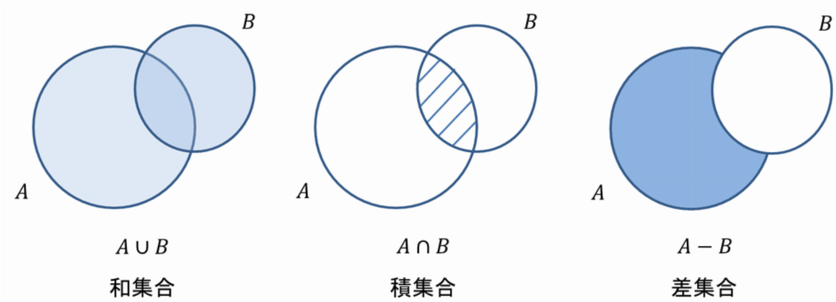
$$A - B$$

例：$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ B = \{1, 3, 5\}$ の時，それぞれの集合は下記の通り

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ A \cap B = \{1, 3, 5\},\ A - B = \{2, 4, 6\}$

(4)

ベン図 (Venn Diagram)



試行，試行列，標本空間

- サイコロ投げのように，結果が確率的であるような行為を試行 (trail) という
- サイコロを投げ続けるような行為を試行列，または確率過程 (stochastic process) という
- 試行，試行列の可能な結果の集合を標本空間 (sample space) といい，Ω で表す
  例 1：サイコロを一回投げた場合の標本空間

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

  例 2：コインを投げて表が出たら 1，裏が出たら 0 と表すことにする．コインを 2 回投げて，表が続けて出たことを $(1, 1)$ のように表すことにすると，この場合の標本空間は次のようになる

$$\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

事象

- 標本空間の部分集合を事象 (event) という
- 例：サイコロを 1 回だけ振り，出た目が i $(i = 1, ..., 6)$ である事象を Ω_i と書く
- 標本空間 $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5, \Omega_6\}$
- 偶数の目が出る事象 $\{\Omega_2, \Omega_4, \Omega_6\}$
- 5 以上の目が出る事象 $\{\Omega_5, \Omega_6\}$
- 要素が 1 個の事象を単純事象と呼ぶ
- e.g., 6 の目が出る事象 $\{\Omega_6\}$

事象に関する演算

二つの事象 A と B が与えられたとする

- 事象の和 $A \cup B$: A と B の少なくとも一方が生じる事象
- 事象の積 $A \cap B$: A と B が同時に起きる事象
- A の余事象 $\bar{A}$: A が起こらない事象
- 排反な事象: A と B に共通事象が無い，すなわち $A \cap B = \emptyset$ となるとき A と B は互いに排反 (互いに素) という
- 例：サイコロを 1 回だけ振り，出た目が i $(i = 1, ..., 6)$ である事象を Ω_i と書く
- A を偶数の目がでる事象，B を奇数の目が出る事象とする
- $A = \{\Omega_2, \Omega_4, \Omega_6\}$，$B = \{\Omega_1, \Omega_3, \Omega_5\}$，$A \cap B = \emptyset$

順列 (permutation)

n 個の異なるものから任意に r 個を取り出し，順番に一列に並べる方法は

$$ {}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1),\ n \geq r $$

通りある．階乗の記号 ! を使って書けば

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

となる．ただし $0! = 1$ と定義する．

- **重複順列**: **n 個の異なるものから，繰り返しを許して r 個とって一列に並べる方法で，n^r 通りある**
- **1，2，3 の数字を使って 4 桁の自然数を作る方法は全部で $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 通り**

組合せ (combination)

n 個の異なるものから任意に r 個を取り出す方法は

$$ {}_nC_r = {}_nP_r/r! = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)/r!,\ \ n \geq r $$

通りある．階乗の記号 ! を使って書けば

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

となる．次のように書く習慣もある:

$$ \binom{n}{r} $$

- 例: 5 個の球が入った袋から，3 個の球を取り出す方法は ${}_5C_3 = 10$ 通り

確率 (probability)

n 個の事象からなる標本空間

$$\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n\}$$

の各事象が生じる程度が同様に確からしいとする．ある事象 A は Ω の中の m 個 $(m \leq n)$ の要素からなるとすると，事象 A の起きる確率 (生起確率) は

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

としてあらわされる．余事象の生起確率は

$$P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - P(A)$$

例：A がサイコロを一つ投げたとき，目が偶数となる事象だとすると

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

確率の公理

排反な n 個の事象からなる標本空間

$$\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n\}$$

の各事象の生起確率が

$$P(\Omega_1), P(\Omega_2), ..., P(\Omega_n)$$

として与えられた場合，その総和は

$$\sum_{i=1}^{n} P(\Omega_i) = 1$$

を満たす．この定理と，以下の二つの性質を合わせて確率の公理と呼ぶ

- 任意の事象 A に対して $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1,\ P(\emptyset) = 0$

確率変数と確率分布

- 標本空間 Ω の中で定義される変数を X とし，この X がある具体的な値 x をとる確率が既知であるとする場合，$X = x$ となる事象の確率を $P(X = x)$，あるいは $p(x)$ で表す
- このような変数 X を確率変数 (random variable) と呼ぶ
- X の取りうる値が有限個，あるいは可算無限個の場合 $\rightarrow$ 離散的確率変数
- X の取りうる値が連続で無限個の場合 $\rightarrow$ 連続的確率変数
- $p(x)$ を確率分布 (probability distribution) とよぶ

例：X をニつのサイコロを振った場合の和とした場合

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

期待値，分散，標準偏差

確率変数 X の期待値，分散，標準偏差は以下で与えられる

- **期待値** (expectation): $E(X) = \mu = \sum_{x=1}^{n} xp(x)$
- **分散** (variance): $V(X) = \sigma^2 = \sum_{x=1}^{n} (x-\mu)^2 p(x)$
- **標準偏差** (standard deviation): $\sigma = \sqrt{V(X)}$

加法定理と乗法定理

- 事象 A，B が排反事象の時，A，B いずれかが生じる確率は $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- 事象 A，B が排反事象でないとき，A，B いずれかが生じる確率は $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ なる関係が成り立つとき，事象 A は B に独立 (independent) であるという

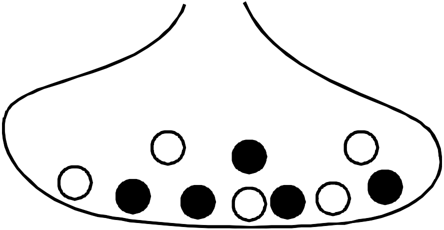
条件付き確率と結合確率

- 独立でない二つの事象を A と B とする
- 条件付き確率 (conditional probability)
  B が起こったという条件下で A が起こる確率 $\rightarrow P(A|B)$
- 結合確率 (joint probability)
  A と B がともに起こる確率
  $\rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B)$

(16)

例

中の見えない壺の中に，5 個ずつ白と黒の玉がある．これを続けて 2 個取り出す (復元抽出ではない)．このとき 2 個とも白の玉である確率はいくらか？

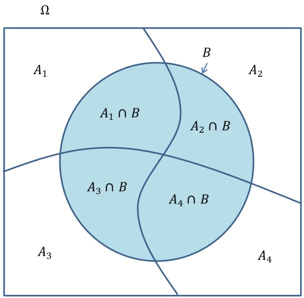


$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 5/10 \times 4/9 = 2/9$$

(17)

全確率の定理

- n 個の互いに排反な事象 $A_i\ (i = 1, ..., n)$ と事象 B があるとする．ここで A_i と B は排反ではない $A_i \cap B \neq \emptyset$ とする
- このとき $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$



ベイズの定理 (Bayes' theorem)

- **ある事象** B **と，その事象が起こる原因となる** n **個の排反事象** A_1, A_2, ..., A_n **を考える**
- $P(A_i)$ **を事前確率** (a priori probability) **と呼ぶ**
- $P(A_i|B)$ **は** B **という条件下での** A_i **の条件付き確率で，事後確率** (a posteriori probability) **と呼ぶ**
- **事前確率と事後確率の関係は**

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

ベイズの定理の例題

三つの壺 A_1**，**A_2**，**A_3 **があり，その中に黒と白の玉が，それぞれ** $3:1$**，**$1:1$**，**$1:2$ **の割合で入っている．ランダムに選んだ壺から玉を** 1 **個取り出したところ，色が黒であった．玉が壺** A_1**，**A_2**，**A_3 **から取り出された確率を求めよ．**

- **第** i **番目の壺を選ぶ事象を** A_i $(i = 1, 2, 3)$**，黒い玉が選ばれる事象を** B **とする**
- **各壺は等確率で選ばれるとすると，事前確率は** $P(A_i) = 1/3$
- **各壺で黒い玉が選ばれる確率は** $P(B|A_1) = 3/4$**，**$P(B|A_2) = 1/2$**，**$P(B|A_3) = 1/3$
- **したがって，求めたい確率は**

$$P(A_1|B) = 9/19,\ P(A_2|B) = 6/19,\ P(A_3|B) = 4/19$$

問題 (1/2)

- 【2.1】 2 つの硬貨を投げたとき，表がちょうど 1 枚である確率を求めよ．
- 【2.2】 あるクラスは男子 30 人，女子 20 人からなる．そのうち，自宅通学のは男子 15 人，女子 10 人である．クラスの中から任意に一人選び出したとき，その人が男子である事象を M，自宅通学である事象を J としたとき，次の確率を求めよ．

$$(1)\ P(M \cap J),\ (2)\ P(J|M)$$

- 【2.3】 中の見えない壺に同じ形状の黒石が 6 個，白石が 4 個入っている．この壺から同時に 4 つの石を取り出したとき，黒石，白石がそれぞれ 2 個となる確率を求めよ．

問題 (2/2)

- 【2.4】 1000 本のクジの中に，1 等 1 万円が 10 本，2 等千円が 40 本，3 等 500 円が 200 本含まれ，他のすべてはハズレとする．この中から 1 本クジを引いた時の期待値 (金額) を求めよ．
- 【2.5】 二個の壺 A_1，A_2 があり，それぞれ 6 個の黒と白の玉が入っている．黒と白の割合は A_1 では $3:3$，A_2 では $1:5$ である．どちらかの壺から玉を一つ取り出したところ，玉の色は黒であった．玉が取り出された壺が A_1 である確率を求めよ．