Q. 偶数桁（2n 桁）の回文数はなぜ 11 の倍数となるのか？

A. 偶数桁（2n 桁）の回文数を M とすると一般に

$$M = a_1a_2a_3a_4 \cdots a_{n-1}a_na_na_{n-1} \cdots a_4a_3a_2a_1$$

とおける。ただし、$n \geq 1,\ 1 \leq k \leq n,\ 0 \leq a_k \leq 9,\ a_1 \neq 0$

$$\begin{aligned}M &= a_1 \times 10^{2n-1} + a_2 \times 10^{2n-2} + \cdots + a_{n-1} \times 10^{n+1} + a_n \times 10^n \\ &+ a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \cdots + a_2 \times 10^1 + a_1 \times 10^0 \\ &= a_1 \times (10^{2n-1} + 1) + a_2 \times 10 \times (10^{2n-3} + 1) + \cdots \\ &+ a_{n-1} \times 10^{n-2}(10^3 + 1) + a_n \times 10^{n-1}(10^1 + 1) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \times 10^{k-1} \times (10^{2n-2k+1} + 1)\end{aligned}$$

ここで $n - k = L$とすると、$0 \leq L \leq n - 1$で $10^{2n-2k+1} + 1 = 10^{2L+1} + 1$であり、この$10^{2L+1} + 1$について考える。

$$\begin{aligned}10^{2L+1} &= (11 - 1)^{2L+1} = \sum_{s=0}^{2L+1} {}_{2L+1}\mathrm{C}_s \times 11^{2L+1-s} \times (-1)^s \\ &= {}_{2L+1}\mathrm{C}_0 \times 11^{2L+1} + {}_{2L+1}\mathrm{C}_1 \times 11^{2L} \times (-1)^1 + {}_{2L+1}\mathrm{C}_2 \times 11^{2L-1} \times (-1)^2 + \\ &\cdots + {}_{2L+1}\mathrm{C}_{2L} \times 11^1 \times (-1)^{2L} + {}_{2L+1}\mathrm{C}_{2L+1} \times 11^0 \times (-1)^{2L+1}\end{aligned}$$

ここで最終項を除いた和

$$\begin{aligned}&{}_{2L+1}\mathrm{C}_0 \times 11^{2L+1} + {}_{2L+1}\mathrm{C}_1 \times 11^{2L} \times (-1)^1 + {}_{2L+1}\mathrm{C}_2 \times 11^{2L-1} \times (-1)^2 + \\ &\cdots + {}_{2L+1}\mathrm{C}_{2L} \times 11^1 \times (-1)^{2L}\end{aligned}$$

は 11 の倍数で、最終項$(-1)^{2L+1} = -1$となる($\because 2L + 1$は奇数)。したがって

$$\begin{aligned}10^{2L+1} + 1 &= {}_{2L+1}\mathrm{C}_0 \times 11^{2L+1} + {}_{2L+1}\mathrm{C}_1 \times 11^{2L} \times (-1)^1 + {}_{2L+1}\mathrm{C}_2 \times 11^{2L-1} \times (-1)^2 + \\ &\cdots + {}_{2L+1}\mathrm{C}_{2L} \times 11^1 \times (-1)^{2L}\end{aligned}$$

とかけるので、これは 11 の倍数となる。

したがって、$M = \sum_{k=1}^{n} a_k \times 10^{k-1} \times (10^{2n-2k+1} + 1)$は$10^{2L+1} + 1$の線形結合であるので、11 の倍数となる。（答）