

(前回からの続き)

モチベーションは中学生向け実験教室の「原理・原則からの理解」にあり、内容は、2019年8月11日の記事で示した反射光強度の偏光依存である。



図 研究室居室エリアから実験室方面をのぞみ、偏光フィルム越しに写真を撮影（左と右で偏光フィルムの向きが90°異なる）。反射の案配が変わっていることがわかる（2021年9月4日撮影）。

☆ここまでの経緯

2020年1月5日の「フレネルの功績」の「おまけ」のところでMaxwell方程式から電磁波（光）の波動方程式が導かれることを示し、2020年2月9日の「おまけ」で少しだけ、電磁波（光）の特徴を導いた。その結論として

- ・電場も磁場も進行方向に対して垂直（横波）である
- ・進行方向には振動成分はない
- ・互いに直交していて、右手系（電場→磁場の方向へ回転すると右ねじの進む方向と波の進行方向が一致）

ということがわかった。

光波の伝搬を記述するのに重要なパラメータが屈折率である。真空中の電磁波の伝搬速度は $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ とかける（ μ_0 ；真空の透磁率、 ϵ_0 ；真空の誘電率）。屈折率 n は媒質中の速度(v)に対しての真空中の速度の比である（ μ ；媒質の透磁率、 ϵ ；真空の誘電率）。

$$n = c/v = \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

磁性体でない限り、 $\mu_0 = \mu$ と考えてよいので、

$$n = \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\epsilon_0}}$$

このような理解に注力している理由は、反射光の偏光依存性（偏光サングラス）の説明のためであり、とどのつまりの課題は屈折率の異なる媒体の境界で何が起こるかを理解することである。

☆境界条件からわかること

Maxwell 方程式から得られる境界条件は下記の通りである（特に微分形の Maxwell 方程式の物理的意味の理解と境界条件の導出に一山あるが、これは前提とさせて下さい。次回これをやれば、話は逆になってしまったが、今回の話は完結ということで・・・。とても長い道りになってしまった）。

- ①境界面に平行な電場成分は連続
- ②境界面に垂直な電束密度成分は連続
- ③境界面に平行な磁場成分は連続
- ④境界面に垂直な磁束密度成分は連続

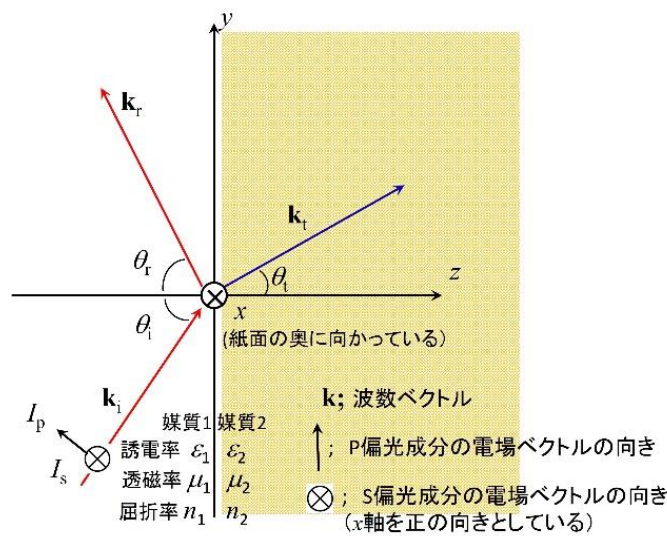


図 波数ベクトル \mathbf{k}_i の入射光が、媒質 1 と媒質 2 の界面で反射光（波数ベクトル \mathbf{k}_r ）と透過光（波数ベクトル \mathbf{k}_t ）に分解する様子の模式図

図は波数ベクトル \mathbf{k}_i (yz 面と平行) で表される入射光が媒質 1（誘電率 ϵ_1 , 透磁率 μ_1 , 屈折率 n_1 ）から媒質 2（誘電率 ϵ_2 , 透磁率 μ_2 , 屈折率 n_2 ）の界面で反射または透過している様子を示す。反射光、透過光の波数ベクトルをそれぞれ $\mathbf{k}_r, \mathbf{k}_t$ とし、 z 軸となす角度を図のように定義する（反射光と透過光が yz 平面と平行に進行していくように書いていて、その角度も定義しているが、そもそも yz 平面から外れて進行していくことも否定できない）。前回の考察から電場ベクトル、磁場ベクトルともにそれぞれの波数ベクトル（光の進行する向き）に対して直交している。

まず、一般的に考えてみる。入射光、反射光、透過光それぞれの電場ベクトルを $\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_r, \mathbf{E}_t$ とする。またそれぞれの光波の波数ベクトルの成分表示を $\mathbf{k}_i=(k_{ix}, k_{iy}, k_{iz}), \mathbf{k}_r=(k_{rx}, k_{ry}, k_{rz}), \mathbf{k}_t=(k_{tx}, k_{ty}, k_{tz})$ のように書く。また、それぞれの角周波数を $\omega_i, \omega_r, \omega_t$ とすると波動（電場）の方程式はそれぞれ、

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i &= (E_{ix}, E_{iy}, E_{iz})e^{i(k_{ix}x+k_{iy}y+k_{iz}z-\omega_i t)} \\ \mathbf{E}_r &= (E_{rx}, E_{ry}, E_{rz})e^{i(k_{rx}x+k_{ry}y+k_{rz}z-\omega_r t)} \\ \mathbf{E}_t &= (E_{tx}, E_{ty}, E_{tz})e^{i(k_{tx}x+k_{ty}y+k_{tz}z-\omega_t t)}\end{aligned}$$

と書ける。

ここで最初の条件 (①) を考えると、境界面 ($z=0$) で、この面に平行な成分は連続ということ、 x 成分、 y 成分が連続するということであり、入射光と反射光は境界面に対して同じ側 ($z<0$) なので合計し、透過光は反対側 ($z>0$) ということを考えて (上の式に $z=0$ を代入している)、それぞれの x 成分と y 成分はそれぞれ、

$$\begin{aligned}E_{ix}e^{i(k_{ix}x+k_{iy}y-\omega_i t)} + E_{rx}e^{i(k_{rx}x+k_{ry}y-\omega_r t)} &= E_{tx}e^{i(k_{tx}x+k_{ty}y-\omega_t t)} \\ E_{iy}e^{i(k_{ix}x+k_{iy}y-\omega_i t)} + E_{ry}e^{i(k_{rx}x+k_{ry}y-\omega_r t)} &= E_{ty}e^{i(k_{tx}x+k_{ty}y-\omega_t t)}\end{aligned}$$

となる。この 2 つの式がどんな x, y, t の場合でも成り立つための条件は

$$\begin{aligned}k_{ix} &= k_{rx} = k_{tx} \\ k_{iy} &= k_{ry} = k_{ty} \\ \omega_i &= \omega_r = \omega_t \\ E_{ix} + E_{rx} &= E_{tx} \\ E_{iy} + E_{ry} &= E_{ty}\end{aligned}$$

が必要であり、上から三番目の角周波数の条件から入射光、反射光、透過光はすべて同じ角周波数でなければならないことがわかる。直感的な理解のため、もう一度上の図を眺めてみよう。ここでは入射光を yz 面と平行になるように設定してある ($k_{ix} = 0$)。上の最初の式からわかるように

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} = 0$$

となる。すなわち、 yz 面と平行に入射した場合、反射光でも透過光でも波数ベクトルの x 成分はゼロとなるわけで、**左右に曲がったりしないこと**を意味している (図で設定したように反射光も透過光も yz 面と平行)。ここで改めて図のように反射光と透過光が z 軸となす角度を設定することができる。波数ベクトルの y 成分について考えると

$$\begin{aligned}k_{iy} &= |\mathbf{k}_i| \sin \theta_i \\ k_{ry} &= |\mathbf{k}_r| \sin \theta_r \\ k_{ty} &= |\mathbf{k}_t| \sin \theta_t\end{aligned}$$

であり、上で示したようにこれらはすべて等しい。上の 2 つから

$$|\mathbf{k}_i| \sin \theta_i = |\mathbf{k}_r| \sin \theta_r$$

であり、入射光と反射光は媒質 1 を伝播しているので、進行速度は $v = \frac{\omega}{|\mathbf{k}_i|} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}_r|}$ と等しくなる。したがって $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_r|$ と $k_{iy} = k_{ry}$ より $\sin \theta_i = \sin \theta_r \rightarrow \theta_i = \theta_r$ となるので、入射角と反射角が等しくなることがわかる (なんとなく自明のこととして扱われているが・・・)。一方、

透過光でも下記の関係が成り立つが今度は媒質が違うので、伝播速度（屈折率）が異なる（光速を c とすると $v_i = c/n_1$, $v_t = c/n_2$ ）。

$$|\mathbf{k}_i| \sin \theta_i = |\mathbf{k}_t| \sin \theta_t$$

$$v_i = \frac{\omega}{|\mathbf{k}_i|}, v_t = \frac{\omega}{|\mathbf{k}_t|}$$

ここから

$$\frac{|\mathbf{k}_t|}{|\mathbf{k}_i|} = \frac{v_i}{v_t} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}$$

が成立し、これが高等学校で習うスネルの法則の式となる。また、図からわかるように反射光の波数ベクトルの z 成分は

$$k_{rz} = -k_{iz}$$

となる。以上のことから yz 面と平行に入射した場合、波動の方程式は単純になり、かつ角振動数が同じなので時間依存は考える必要がなくなる。

$$\mathbf{E}_i = (E_{ix}, E_{iy}, E_{iz})e^{i(k_{iy}y + k_{iz}z - \omega t)}$$

$$\mathbf{E}_r = (E_{rx}, E_{ry}, E_{rz})e^{i(k_{iy}y - k_{iz}z - \omega t)}$$

$$\mathbf{E}_t = (E_{tx}, E_{ty}, E_{tz})e^{i(k_{iy}y + k_{tz}z - \omega t)}$$

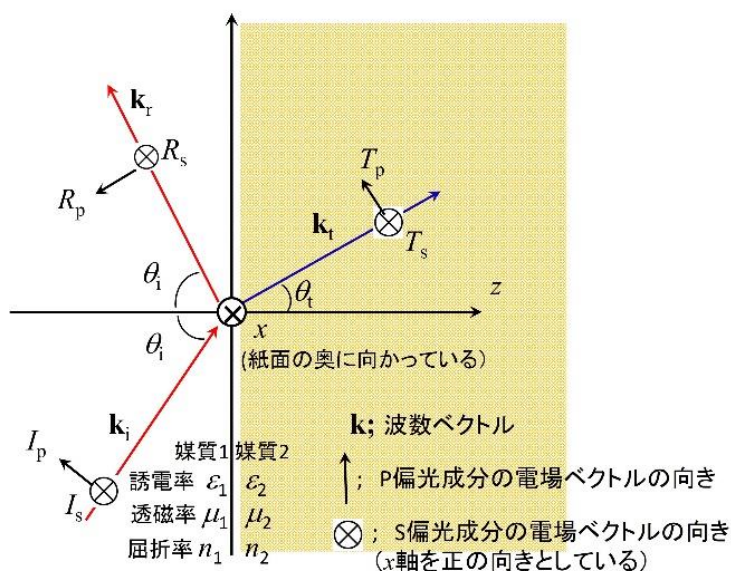


図 それぞれの光を偏光成分に分解した。反射角は入射角と等しくなる。

ここで上の図のような偏光成分（電場）を考えると
 （ココで入射面である yz 平面に対して電場が垂直に振動する成分を s 偏光、平行に振動す

る成分を p 偏光と呼ぶ)

$$\begin{aligned}(E_{ix}, E_{iy}, E_{iz}) &= (I_s, I_p \cos \theta_i, -I_p \sin \theta_i) \\ (E_{rx}, E_{ry}, E_{rz}) &= (R_s, -R_p \cos \theta_r, -R_p \sin \theta_r) \\ (E_{tx}, E_{ty}, E_{tz}) &= (T_s, T_p \cos \theta_t, -T_p \sin \theta_t)\end{aligned}$$

と書ける。したがって電場の波動ベクトルは、それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i &= (I_s, I_p \cos \theta_i, -I_p \sin \theta_i) e^{i(k_{iy}y + k_{iz}z - \omega t)} \\ \mathbf{E}_r &= (R_s, -R_p \cos \theta_r, -R_p \sin \theta_r) e^{i(k_{iy}y - k_{iz}z - \omega t)} \\ \mathbf{E}_t &= (T_s, T_p \cos \theta_t, -T_p \sin \theta_t) e^{i(k_{ty}y + k_{tz}z - \omega t)}\end{aligned}$$

波数ベクトルに関しても

$$|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_r| = k, \quad |\mathbf{k}_t| = k'$$

と大きさを決め成分表示してみると

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_i &= (0, k \sin \theta_i, k \cos \theta_i) \\ \mathbf{k}_r &= (0, k \sin \theta_r, -k \cos \theta_r) \\ \mathbf{k}_t &= (0, k' \sin \theta_t, k' \cos \theta_t)\end{aligned}$$

電場 \mathbf{E} と磁束密度 \mathbf{B} の大きさの間には、

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|/v$$

が成り立ち、互いに直交していて、右手系（電場→磁場の方向へ回転すると右ねじの進む方向と波の進行方向が一致）であるので、一般的に磁束密度をあらわすベクトルは下記のように書ける。

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{1}{v} \frac{\mathbf{k}}{k} \times \mathbf{E} = \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{\omega} (k_y E_z - k_z E_y, k_z E_x - k_x E_z, k_x E_y - k_y E_x) e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)}\end{aligned}$$

ここでは波数ベクトルの x 成分はゼロとしているので、

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\omega} (k_y E_z - k_z E_y, k_z E_x, -k_y E_x) e^{i(k_y y + k_z z - \omega t)}$$

入射光に関してベクトルを書いてみると

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_i &= \frac{1}{\omega} (-k \sin \theta_i I_p \sin \theta_i - k \cos \theta_i I_p \cos \theta_i, k \cos \theta_i I_s, -k \sin \theta_i I_s) e^{i(k_{iy}y + k_{iz}z - \omega t)} \\ &= \frac{1}{\omega} (-k I_p, k I_s \cos \theta_i, -k I_s \sin \theta_i) e^{i(k_{iy}y + k_{iz}z - \omega t)}\end{aligned}$$

同様に、反射光と透過光についても書くと

$$\mathbf{B}_r = \frac{1}{\omega} (-k \sin \theta_i R_p \sin \theta_i - k \cos \theta_i R_p \cos \theta_i, -k \cos \theta_i R_s, -k \sin \theta_i R_s) e^{i(k_{iy}y - k_{iz}z - \omega t)}$$

$$= \frac{1}{\omega} (-k R_p, -k R_s \cos \theta_i, -k R_s \sin \theta_i) e^{i(k_{iy}y - k_{iz}z - \omega t)}$$

$$\mathbf{B}_t = \frac{1}{\omega} (-k' \sin \theta_t T_p \sin \theta_t - k' \cos \theta_t T_p \cos \theta_t, k' \cos \theta_t T_s, -k' \sin \theta_t T_s) e^{i(k_{ty}y + k_{tz}z - \omega t)}$$

$$= \frac{1}{\omega} (-k' T_p, k' T_s \cos \theta_t, -k' T_s \sin \theta_t) e^{i(k_{ty}y + k_{tz}z - \omega t)}$$

こうして、電場、磁場に関して図の偏光成分を用いてベクトル表記ができたので、境界条件についてさらに考えてみる。

①境界面に平行な電場成分(この場合、 x と y 成分)は連続 (ω は共通で、 $z=0$ のとき)

$$E_{ix} + E_{rx} = E_{tx}$$

$$E_{iy} + E_{ry} = E_{ty}$$

この関係から、

$$I_s + R_s = T_s \quad (1)$$

$$I_p \cos \theta_i - R_p \cos \theta_i = T_p \cos \theta_t \quad (2)$$

②境界面に垂直な電束密度成分 (この場合は z 成分) は連続 (ω は共通で、 $z=0$ のとき)

$$\varepsilon_1 (I_p \sin \theta_i + R_p \sin \theta_i) = \varepsilon_2 T_p \sin \theta_t \quad (3)$$

③境界面に平行な磁場成分(この場合、 x と y 成分)は連続

磁場成分は、 \mathbf{B}/μ で与えられるので

$$\frac{1}{\mu_1} (k I_p + k R_p) = \frac{1}{\mu_2} k' T_p \quad (4)$$

$$\frac{1}{\mu_1} (k I_s \cos \theta_i - k R_s \cos \theta_i) = \frac{1}{\mu_1} k' T_s \cos \theta_t \quad (5)$$

④境界面に垂直な磁束密度成分は連続

$$k I_s \sin \theta_i + k R_s \sin \theta_i = k' T_s \sin \theta_t \quad (6)$$

まず、(1)から(6)までの式を眺めてみると、s 偏光の成分のみを含んだ方程式が 3 つで、p 偏光のみを含んだものも 3 つである。それぞれ独立であって s 偏光を入射すると、反射光も透過光も s 偏光で、p 偏光でも事態は同じである。反射率、透過率を考えると、それぞれの偏光を独立に考えればよいことを意味している。

反射率、透過率を考えているわけで、それぞれの 3 つの方程式が一次独立ならば、それぞれのベクトル成分が定数として求められるが、それはいかにも変で、そうはなっていないはずである (入射光強度が決まってしまう)。s 偏光関連の (1) 式と(6)式に注目する。スネルの法則

$$|\mathbf{k}_i| \sin \theta_i = |\mathbf{k}_t| \sin \theta_t$$

$$k \sin \theta_i = k' \sin \theta_t$$

より、(6)式は(1)式は同一となる。したがって、s 偏光に関しては(1)と(5)式を考えればよい。p 偏光関連では(3)と(4)式に注目する。(3)式は下記のように変形できる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(I_p \sin \theta_i + R_p \sin \theta_i) &= \varepsilon_2 T_p \sin \theta_t \\ \rightarrow \varepsilon_1(I_p + R_p) &= \varepsilon_2 T_p \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} \\ \rightarrow \varepsilon_1(I_p + R_p) &= \varepsilon_2 T_p \frac{v_t}{v_i} \\ \rightarrow v_i \varepsilon_1(I_p + R_p) &= v_t \varepsilon_2 T_p\end{aligned}$$

ここで $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ なので

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}} \varepsilon_1(I_p + R_p) = \frac{1}{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}} \varepsilon_2 T_p \rightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(I_p + R_p) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} T_p$$

一方、(4)式は

$$\frac{1}{\mu_1}(kI_p + kR_p) = \frac{1}{\mu_2} k' T_p \rightarrow \frac{k}{\mu_1}(I_p + R_p) = \frac{k'}{\mu_2} T_p$$

ここで

$$\frac{|\mathbf{k}_t|}{|\mathbf{k}_i|} = \frac{k'}{k} = \frac{v_i}{v_t} = \frac{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}$$

であるので

$$\frac{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}{\mu_1}(I_p + R_p) = \frac{\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}}{\mu_2} T_p \rightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(I_p + R_p) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} T_p$$

と変形できるので、(3)式と同一であることがわかる。

☆フレネルの式

したがって以下の検討は s 偏光に関しては

$$I_s + R_s = T_s$$

$$\frac{1}{\mu_1}(kI_s \cos \theta_i - kR_s \cos \theta_i) = \frac{1}{\mu_1} k' T_s \cos \theta_t$$

p 偏光に関しては

$$I_p \cos \theta_i - R_p \cos \theta_i = T_p \cos \theta_t$$

$$\frac{1}{\mu_1}(kI_p + kR_p) = \frac{1}{\mu_2} k' T_p$$

を利用して行う。それぞれ 3 つの未知数と 2 つの独立な方程式なので、入射波の振幅に対する反射波および透過波の振幅の比を反射係数、透過係数（エネルギーで議論する反射率、透過率とは違う）（それぞれ R/I と T/I ）を求めることができる。s 偏光に関しては(1)(5)を

連立して、

$$\frac{R_s}{I_s} = \frac{\frac{k}{\mu_1} \cos \theta_i - \frac{k'}{\mu_2} \cos \theta_t}{\frac{k}{\mu_1} \cos \theta_i + \frac{k'}{\mu_2} \cos \theta_t} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t}$$

$$\frac{T_s}{I_s} = \frac{\frac{2k}{\mu_1} \cos \theta_i}{\frac{k}{\mu_1} \cos \theta_i + \frac{k'}{\mu_2} \cos \theta_t} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t}$$

と求めることができる。同様に p 偏光に関しては(2)(4)を連立して

$$\frac{R_p}{I_p} = \frac{\frac{k'}{\mu_2} \cos \theta_i - \frac{k}{\mu_1} \cos \theta_t}{\frac{k'}{\mu_2} \cos \theta_i + \frac{k}{\mu_1} \cos \theta_t} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_t}$$

$$\frac{T_p}{I_p} = \frac{\frac{2k}{\mu_1} \cos \theta_i}{\frac{k'}{\mu_2} \cos \theta_i + \frac{k}{\mu_1} \cos \theta_t} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_t + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_i}$$

と求めることができる。

誘電率とか透磁率とか言っても、実際にイメージはわからないので、もう少し実測的な屈折率でこれらの式を表そう。

$$n = c/v = \sqrt{\varepsilon\mu} / \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \rightarrow n_1 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1} / \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \quad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2} / \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} = \frac{n_1}{\mu_1} \times \sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} = \frac{n_2}{\mu_2} \times \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

$$\frac{R_s}{I_s} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t} = \frac{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i - \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_t}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_t} \quad (7)$$

$$\frac{T_s}{I_s} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t} = \frac{2\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_t} \quad (8)$$

$$\frac{R_p}{I_p} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_t} = \frac{\frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_i - \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_t}{\frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_i + \frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_t} \quad (9)$$

$$\frac{T_p}{I_p} = \frac{2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_t} = \frac{2\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_i}{\frac{n_1}{\mu_1} \cos \theta_t + \frac{n_2}{\mu_2} \cos \theta_i} \quad (10)$$

電磁波のうち光の領域では、ほとんどの媒質で透磁率は真空中に等しい ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) ので、

$$\frac{R_s}{I_s} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (11)$$

$$\frac{T_s}{I_s} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (12)$$

$$\frac{R_p}{I_p} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \quad (13)$$

$$\frac{T_p}{I_p} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \quad (14)$$

次にスネルの法則

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}$$

より、これらの式から屈折率を消し去るために

$$n_1 = \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} n_2$$

を各式に代入する。(11)式より

$$\frac{R_s}{I_s} = \frac{\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} n_2 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} n_2 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{\sin \theta_t \cos \theta_i - \sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin \theta_t \cos \theta_i + \sin \theta_i \cos \theta_t} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad (15)$$

(12)式より

$$\frac{T_s}{I_s} = \frac{2\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} n_2 \cos \theta_i}{\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} n_2 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{2\cos \theta_i \sin \theta_t}{\cos \theta_i \sin \theta_t + \sin \theta_i \cos \theta_t} = \frac{2\cos \theta_i \sin \theta_t}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad (16)$$

(13)式より

$$\begin{aligned} \frac{R_p}{I_p} &= \frac{n_2 \cos \theta_i - \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} n_2 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} n_2 \cos \theta_t} = \frac{\sin \theta_i \cos \theta_i - \sin \theta_t \cos \theta_t}{\sin \theta_i \cos \theta_i + \sin \theta_t \cos \theta_t} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sin 2\theta_i - \frac{1}{2} \sin 2\theta_t}{\frac{1}{2} \sin 2\theta_i + \frac{1}{2} \sin 2\theta_t} = \frac{\cos(\theta_i + \theta_t) \sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \end{aligned} \quad (17)$$

注) 三角関数の下の和積の公式 (反対の積和もときどきでてくる) を使う。

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

(14)式から

$$\frac{T_p}{I_p} = \frac{2 \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} n_2 \cos \theta_i}{\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} n_2 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin \theta_t \cos \theta_t + \sin \theta_i \cos \theta_i} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \quad (18)$$

ここで示した(15)~(18)式をフレネルの式という。

反射係数

$$\frac{R_s}{I_s} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

$$\frac{R_p}{I_p} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}$$

に関して

$$n = \frac{n_2}{n_1}$$

と定義すると

$$\frac{R_s}{I_s} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$\frac{R_p}{I_p} = \frac{n^2 \cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{n^2 \cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}$$

となり、2019年8月11日に書いた式を示すことができた (非常に長い道のり……。しかも、前回の記事の最後のところ間違いがありました。訂正済。)

さて、空気と水の界面に空気側 ($n_1=1.000, n_2=1.333$) から入射した場合と水側 ($n_1=1.333, n_2=1.000$) から入射した場合の反射係数を入射角に関してプロットしてみる。

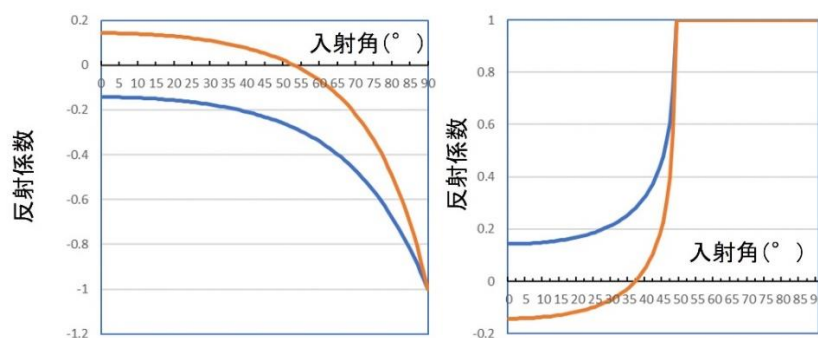


図. 反射係数の偏光依存 (青 : s 偏光、橙 : p 偏光)、左 (空気→水)、右 (水→空気)

☆ここからわかること

通常、私たちは空気中に存在しているので、左の場合が想定でき、p 偏光の反射率は 53° くらいでゼロになる。そのときの入射角をブリュースター角という。一方、屈折率の大きい方から入射する右の図を見ると 48° くらいで両偏光ともに反射率が 1 となり入射光は界面を通過できなくなる。この角度がいわゆる臨界角であり、全反射の条件となる（赤外の ATR、光導波路、光ファイバーなどで登場する）。

また、s 偏光についてみると空気から水に入射（左）させる場合、反射係数の符号は負であり、水から空気の場合（右）、常に正の値をとっていることがわかる。負になるということは、入射光と反射光の x 成分の符号が逆になっているということであり、波動としての位相が 180° ずれていること（位相が反転）を意味している。

ここで例として示した空気から水のように屈折率の低い方から高い方へと入射させた場合には常に位相が反転していて、屈折率の高い方から低い方へと入射した場合には位相は反転しない。これも太古の昔だが高校の物理で出てきて、ニュートン環の明暗を議論するとき、下側の（屈折率の大きい）ガラス面からの反射するとき位相が反転することを習った。当然、釈然としないものはあったが・・・。p 偏光の場合はやや事態は複雑になり、反射係数がゼロになるところを境に位相の保持と反転が切り替わる。

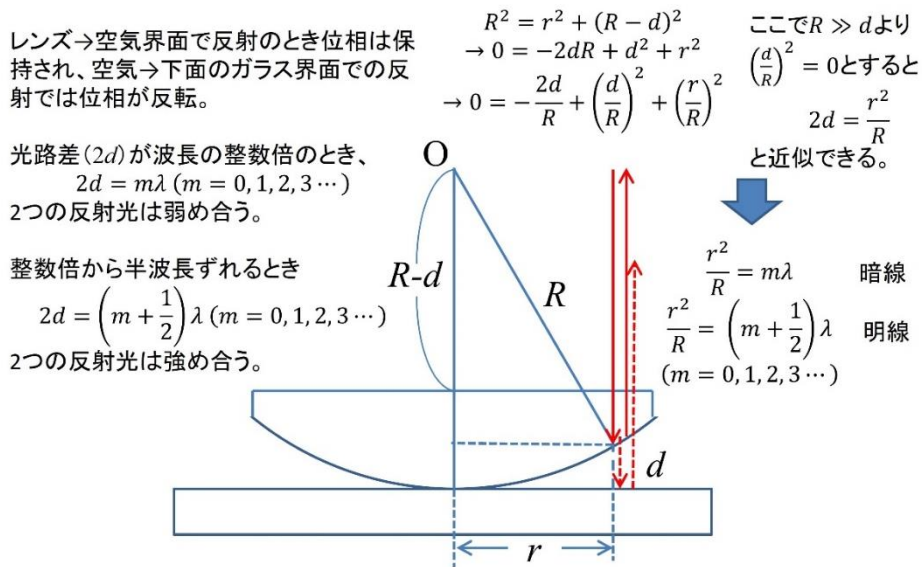
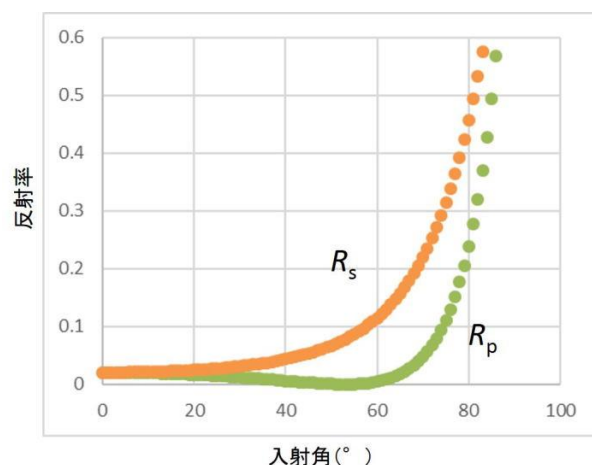


図. ニュートン環で習ったこと

さて 2019 年 8 月 11 日に示した図は次のようなものであるが、上の左側の図と比べてもちょっと違っていることがわかる



入射角と反射率の関係($n=1.333$ のとき)

図. エネルギー反射率

この図は、エネルギーで比べたときの反射率であり、今回示した「反射係数」は振幅を比較したものである。相互にどのような関係があるのだろうか。

電磁波の反射および屈折現象における保存量は、振幅の比（反射係数と透過係数） R/I および T/I の和ではなく、反射波および透過波のエネルギーの和になることに注意しないといけない。電磁波のエネルギーは、弦の振動や音波と違って媒質の運動エネルギーを含まないので、一筋縄ではいかない。単位時間に単位面積を通過する電磁波のエネルギー（エネルギー密度）は下の Poynting ベクトルの大ききで表されることは了解いただくとして話を進める。

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rightarrow |\mathbf{S}| = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \frac{1}{\mu} |\mathbf{E} \times \mathbf{B}|$$

ここで以下の関係より

$$|\mathbf{B}| = \frac{|\mathbf{E}|}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu} |\mathbf{E}| \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{E}$$

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|^2$$

となる。空気から水のように媒質が変わるとき（透過の場合）は、誘電率、透磁率の変化も考慮しないとイケないことがわかるが、空気から空気の反射光の場合にはエネルギー密度の比は電場の振幅の2乗の比を取ればよい。というわけで、エネルギー反射率は、

$$\frac{R_s^2}{I_s^2} = \left(\frac{R_s}{I_s}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t}\right)^2$$

$$\frac{R_p^2}{I_p^2} = \left(\frac{R_p}{I_p}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_t}\right)^2$$

と書ける。

ちなみにエネルギー透過率はどう考えればよいのだろうか？

Poynting ベクトルの大きさは、単位時間に単位面積を通過する電磁波のエネルギーである。

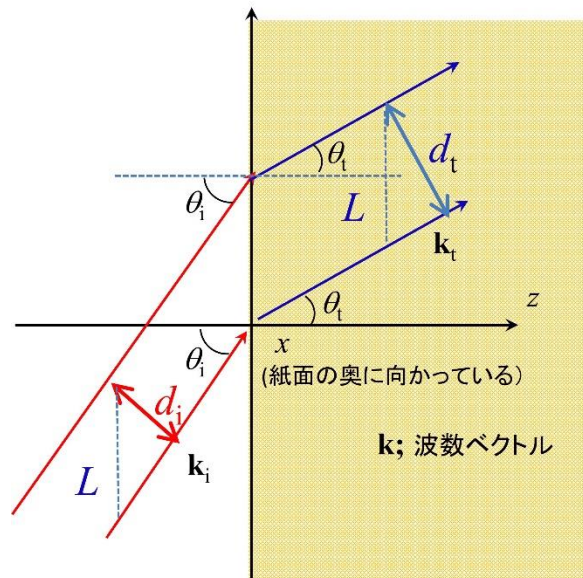


図. 光が透過・屈折するときの光束幅

反射光の場合、入射角と反射角は等しくなることは示せたので、上図で書いた光束の幅は等しくなる。透過光の場合、界面での幅 L を照射するような入射光の光束の幅は

$$d_i = L \cos \theta_i$$

であり、そこからの透過光の幅は

$$d_t = L \cos \theta_t = \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \times d_i$$

となり、同じ値を取らない(上図では広がっている)。というわけでエネルギー透過率は媒質の変化(誘電率と透磁率の変化に伴う、エネルギー密度の変化)と対象としている体積の変

化の両方を考慮しなければならない（透磁率を残した式を用いる）。

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} T_s^2 \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} I_s^2 \cos \theta_i} = \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_t} \right)^2 \times \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \times \frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}} = \frac{4 \cos \theta_i \cos \theta_t \times \sqrt{\varepsilon_1} \sqrt{\varepsilon_2}}{\left(\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_t \right)^2}$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} T_p^2 \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} I_p^2 \cos \theta_i} = \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_i}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_i} \right)^2 \times \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i} \times \frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}} = \frac{4 \cos \theta_i \cos \theta_t \times \sqrt{\varepsilon_1} \sqrt{\varepsilon_2}}{\left(\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_i \right)^2}$$

となる。ここで

$$\frac{R_s^2}{I_s^2} + \frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} T_s^2 \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} I_s^2 \cos \theta_i} = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_i - \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_t} \right)^2 + \frac{4 \cos \theta_i \cos \theta_t \times \sqrt{\varepsilon_1} \sqrt{\varepsilon_2}}{\left(\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_t \right)^2} = 1$$

$$\frac{R_p^2}{I_p^2} + \frac{\sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} T_p^2 \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} I_p^2 \cos \theta_i} = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_i - \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_t}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_i} \right)^2 + \frac{4 \cos \theta_i \cos \theta_t \times \sqrt{\varepsilon_1} \sqrt{\varepsilon_2}}{\left(\sqrt{\varepsilon_1} \cos \theta_t + \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta_i \right)^2} = 1$$

とエネルギーが保存されていることがわかる。

（次回、おそらく最終回に続く）