前回、Maxwell 方程式から波動方程式を導出？したが、x 軸方向に進行する電磁波について具体的に考えてみる。電荷密度、電流密度ともにゼロの真空中の Maxwell 方程式は(1)から(4)である。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{4}$$

x 方向に進行する電磁波の電場と磁場は x と t だけの関数であるとして、y、z には依存しない（$E(x,\ t)$、$B(x,\ t)$）。(1)(2)式よりそれぞれ、

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0,\ \ \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

となる。(3)式より

$$\nabla \times E = \mathrm{rot}\, E = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial y}, \right)$$

$$= \left(-\frac{\partial B_x}{\partial t}, -\frac{\partial B_y}{\partial t}, -\frac{\partial B_z}{\partial t} \right)$$

したがって

$$0 = \frac{\partial B_x}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \tag{6}$$

(4)式より

$$\nabla \times B = \mathrm{rot}\, B = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial y}, \right)$$

$$= \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \left(\frac{\partial B_x}{\partial t}, \frac{\partial B_y}{\partial t}, \frac{\partial B_z}{\partial t} \right)$$

したがって

$$0 = \frac{\partial B_x}{\partial t}, \qquad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{7}$$

(5)式、(6)(7)の最初の式より

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0,\ \ \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

となることがわかり、x 方向の電場、磁場ともに x にも t にも依存しないことがわかる（＝定数でゼロとできる）。

y と z については以下の通りとなる。(6)の真ん中の式と(7)の右の式から B または E を消去すると下記の式が導かれる。

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}$$

同様に(6)の右の式と(7)の真ん中の式から

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$

が得られ、ともに x 軸方向に進行し、yz 方向に振動する波動を表す。

次にこれらの波動方程式の解だが、y 方向の電場を$E_y(x,\ t)$として下記のように置く。

$$E_y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

（f と g は任意の関数で、$f(x - vt)$の波形は、速さ v で正方向に進行する波を表し、$g(x + vt)$ は負の方向に進行する波を表す）。$x - vt = \xi, x + vt = \eta$とすると

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = f' + g'$$

(6)の右式より

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -(f' + g')$$

となり、B_zも f と g の線形で表される。

$$B_z = af(x - vt) + bg(x + vt)$$

これを時間で微分すると

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = a\frac{\partial f}{\partial t} + b\frac{\partial g}{\partial t} = a\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + b\frac{\partial g}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = -avf' + bvg'$$

したがって

$$a = \frac{1}{v} \quad b = -\frac{1}{v}$$

とおくと、

$$B_z = \frac{1}{v}f(x - vt) - \frac{1}{v}\,g(x + vt)$$

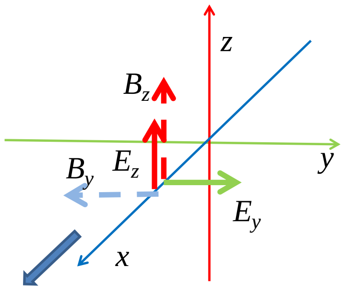
となる。同様に

$$E_z(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

とすると

$$B_y = -\frac{1}{v}f(x - vt) + \frac{1}{v}\,g(x + vt)$$

となることがわかる。



以上のことから

・電場も磁場も進行方向に対して垂直（横波）である

・進行方向には振動成分はない

・互いに直交していて、右手系（電場→磁場の方向へ回転すると右ねじの進む方向と波の進行方向が一致）

（次回に続く）