材料力学演習問題（ 2007–01–B ）

配布：2007/04/13（金）　締切：4/20　提出［　　　］

クラス　　番号　　氏 名　　得点

注意： この用紙を表紙として，解答にはレポート用紙を用いること．（配点：問 1,2 各 10 点，問 3,4　各 40 点）

問題 1 ： 応力とひずみ

直径 25mm の軟鋼丸棒が 0.32×10^{-3} の引張りひずみを受けている．この丸棒に加わっている引張り応力と引張り荷重はいくらか．ただし縦弾性係数 $E = 210\text{GPa}$ とする．　[p010_03]

解答例

【Step 1.　材料の特性を考える 】

生じている引張ひずみが 0.32×10^{-3} であるから，フック則から加わっている応力 σ は

$$\sigma = E\varepsilon = 210 \times 10^3 \times 0.32 \times 10^{-3} = 67.2\text{MPa}$$

で与えられる (縦弾性係数［ヤング率］と応力の単位に注意)．

【Step 2.　力学的関係を考える 】

この場合の引張り荷重 F は，丸棒の断面積 $A = \frac{\pi d^2}{4}$ から

$$F = \sigma \cdot A = \sigma \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 67.2 \times \frac{25^2 \pi}{4} = 3.30 \times 10^4\text{N} = 3.30 \times 10^1\text{kN}$$

採点基準

- 引張応力，引張荷重それぞれ 5 点，計 10 点
- 単位がないもの　→　2 点マイナス
- 計算ミス　→　零点

問題 2 ： 許容応力，安全率，降伏応力，引張強さ

降伏応力 $\sigma_Y = 200\mathrm{MPa}$ ，σ_B=350MPa の軟鋼の丸棒（直径 15mm）がある．この軟鋼丸棒に加えることのできる引張り荷重はいくらか．安全率 S=10 とし，基準強さとして降伏応力，引張強さを採用した場合について，それぞれ計算せよ． [p010_04]

解答例

【Step 1. 材料の特性を考える 】

降伏応力を基準強さとした場合に，加えることのできる最大の応力（**許容応力**）σ_a は

$$\sigma_a = \frac{\sigma_Y}{S} = \frac{200}{10} = 20\mathrm{MPa}$$

で与えられる．

【Step 2. 力学的関係を考える 】

この場合の引張り荷重 F_a は，丸棒の断面積 $A = \frac{\pi d^2}{4}$ から

$$F_a = \sigma_a \times A = \frac{\sigma_Y}{S} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{200}{10} \cdot 15^2 \pi 4 = 3.53 \times 10^3 \mathrm{N} = 3.53\mathrm{kN}$$

【Step 3. 引張強さを基準とした場合 】

上と同様にして，加えることのできる引張り荷重 F_a' は

$$F_a' = \sigma_a \times A = \frac{\sigma_B}{S} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{350}{10} \cdot \frac{15^2 \pi}{4} = 6.19 \times 10^3 \mathrm{N} = 6.19\mathrm{kN}$$

採点基準

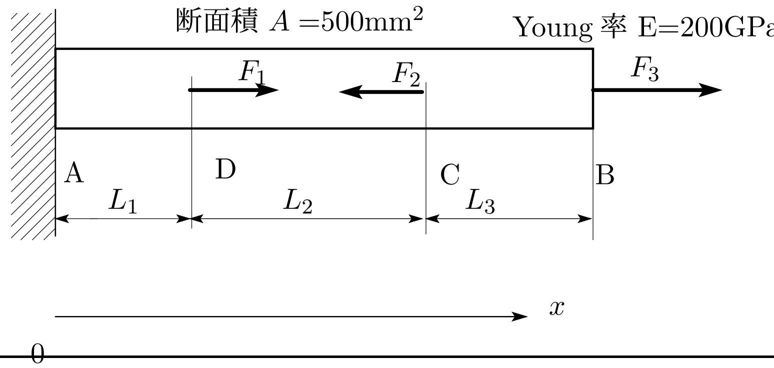
- 基準強さを

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{降伏応力としたとき} \quad \rightarrow \quad 5\text{点} \\ \text{引張強さとしたとき} \quad \rightarrow \quad 5\text{点} \end{array} \right\} \quad \text{計 10 点}$$

- 不等号が入っているもの → マイナス 2 点
- 単位の間違い → マイナス 2 点
- 最後の数値が間違っていても，許容応力が合っていれば，それぞれプラス 2 点

問題 3 ： 複数の荷重が加わる場合

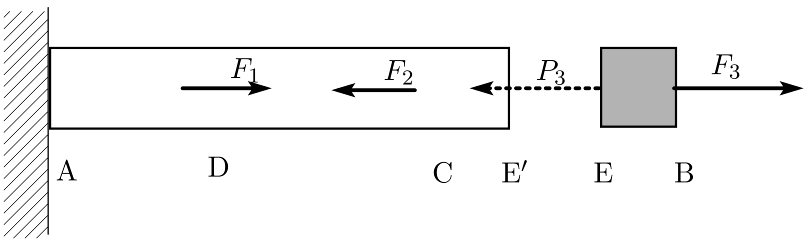
図の真直棒において，D，C，B の各点にそれぞれ F_1, F_2, F_3 の外力が図の向きに加わるとき，AD，DC，CB 間に生じる応力はいくらか．また D，C，B 点の変位をそれぞれ求めよ（図の座標軸の方向を正とせよ）．ただし，$L_1 = 100$mm，$L_2 = 100$mm，$L_3 = 200$mm，$F_1 = 10$kN，$F_2 = 20$kN，$F_3 = 50$kN として解答せよ． [p010_02]



解答例

【Step 1. 力学的関係を考える 】

CB 間の応力 CB 間の任意の位置 E で棒を仮想的に切断して考える（自由物体線図）．EB の部分が静止しているためには，断面 E に図のように力（内力）P_3 が加わって，EB 部分に働く力が釣り合っていなければならない．

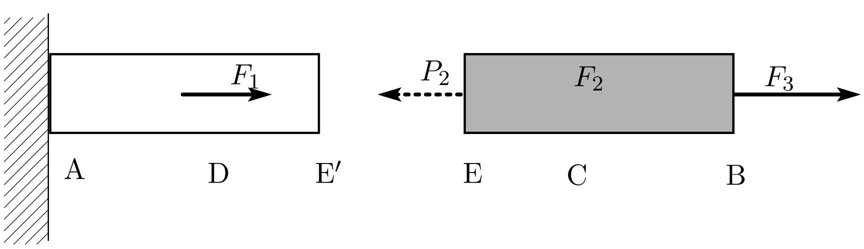


EB 部分に働く力の釣り合いから $P_3 = F_3 = 50$ kN である．CB 間のどこの断面でも内力 P_3 は一定であるから，CB 間の応力 σ_{CB} は

$$\sigma_{CB} = \frac{P_3}{A} = \frac{50 \times 1000}{500} = 100 \text{ MPa}$$

となる．

DC 間の応力 つぎに，DC 間の任意の位置 E で棒を仮想的に切断して考える．EB の部分が静止しているためには，断面 E に図のように力（内力）P_2 が加わって，EB 部分に働く力が釣り合っていなければならない．



EB 部分に働く力の釣り合いから

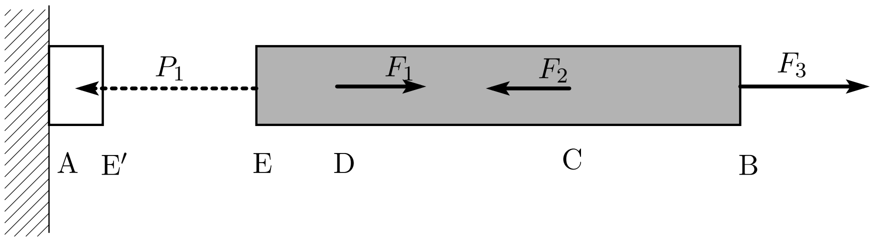
$$P_2 + F_2 = F_3$$

つまり $P_2 = F_3 - F_2 = 50 - 20 = 30$ kN である．DC 間のどこの断面でも内力 P_2 は一定であるから，DC 間の応力 σ_{DC} は

$$\sigma_{DC} = \frac{P_2}{A} = \frac{30 \times 1000}{500} = 60 \text{ MPa}$$

となる．

AD 間の応力　同様に，AD 間の任意の位置 E で棒を仮想的に切断する．EB の部分が静止しているためには，断面 E に図のように力（内力）P_1 が加わって，EB 部分に働く力が釣り合っていなければならない．



EB 部分に働く力の釣り合いから

$$P_1 + F_2 = F_3 + F_1$$

つまり $P_1 = F_3 - F_2 + F_1 = 50 - 20 + 10 = 40$ kN である．AD 間のどこの断面でも内力 P_1 は一定であるから，AD 間の応力 σ_{AD} は

$$\sigma_{AD} = \frac{P_1}{A} = \frac{40 \times 1000}{500} = 80 \text{ MPa}$$

となる．

【Step 2.　材料の性質を考える 】

AD，DC，CB 間の応力が求まったので，それぞれの領域のひずみ ε_{AD} ，ε_{DC} ，ε_{CB} はフック則から以下のように求めることができる．

CB 間のひずみ　$\varepsilon_{CB} = \dfrac{\sigma_{CB}}{E} = \dfrac{100}{200 \times 1000} = 5 \times 10^{-4}$

DC 間のひずみ　$\varepsilon_{DC} = \dfrac{\sigma_{DC}}{E} = \dfrac{60}{200 \times 1000} = 3 \times 10^{-4}$

AD 間のひずみ　$\varepsilon_{AD} = \dfrac{\sigma_{AD}}{E} = \dfrac{80}{200 \times 1000} = 4 \times 10^{-4}$

【Step 3.　幾何学的関係を考える 】

それぞれの領域の伸び ΔL_{AD} ，ΔL_{DC} ，ΔL_{CB} は，ひずみの定義（伸びとひずみの関係）から以下のように求まる．

CB 間の伸び　$\Delta L_{CB} = \varepsilon_{CB} \cdot L_3 = 5 \times 10^{-4} \times 200 = 0.1\text{mm}$

DC 間の伸び　$\Delta L_{DC} = \varepsilon_{DC} \cdot L_2 = 3 \times 10^{-4} \times 100 = 0.03\text{mm}$

AD 間の伸び　$\Delta L_{AD} = \varepsilon_{AD} \cdot L_1 = 4 \times 10^{-4} \times 100 = 0.04\text{mm}$

従って各点の変位として

点 D の変位　$u_D = \Delta L_{AD} = 0.04\text{mm}$

点 C の変位　$u_C = \Delta L_{AD} + \Delta L_{DC} = 0.04 + 0.03 = 0.07\text{mm}$

点 B の変位　$u_B = \Delta L_{AD} + \Delta L_{DC} + \Delta L_{CB} = 0.04 + 0.03 + 0.1 = 0.17\text{mm}$

を得る．

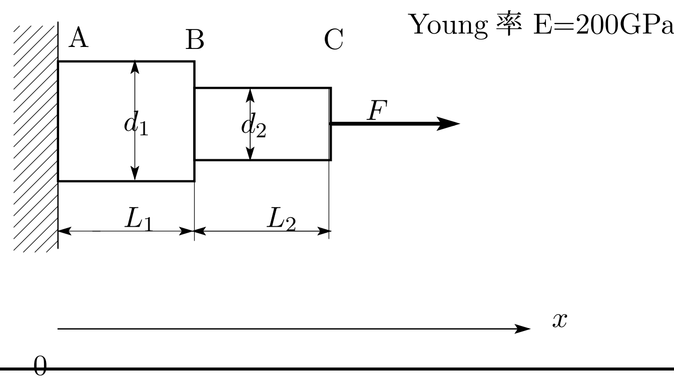
採点基準

- σ_{AD}，σ_{DC}，σ_{CB} がそれぞれ 5 点
- ΔL_{AD}，ΔL_{DC}，ΔL_{CB} がそれぞれ 4 点
- u_D，u_C がそれぞれ 4 点，u_B が 5 点，合計 40 点
- 単位が間違っているもの　→　マイナス 2 点

問題 4 ： 段付き棒

図のような円形断面の段付き棒がある．C 点に外力 F が図の向きに加わるとき，AB，BC 間に生じる応力を求めよ．また B，C 点の変位をそれぞれ求めよ（図の座標軸の方向を正とせよ）．ただし，$L_1 = 100$mm，$L_2 = 100$mm，$d_1 = 50$mm，$d_2 = 25$mm， $F = 20$kN として解答せよ．

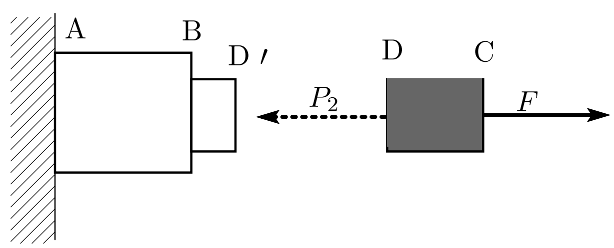
[p010_05]



解答例

【Step 1. 力学的関係を考える】

BC 間の応力　BC 間の任意の位置 D で棒を仮想的に切断して考える（自由物体線図）．DC の部分が静止しているためには，断面 D に図のように力（内力）P_2 が加わって，DC 部分に働く力が釣り合っていなければならない．

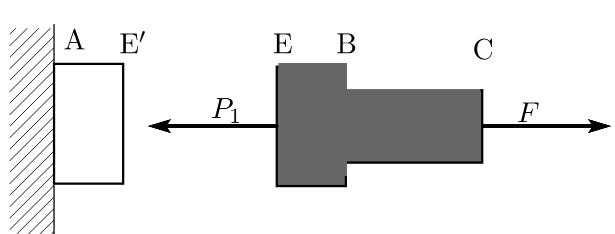


DC 部分に働く力の釣り合いから $P_2 = F = 20$ kN である．DC 間のどこの断面でも内力 P_2 と断面積 A_2 は一定であるので，この部分の応力 σ_{DC} も一定であり

$$\sigma_{DC} = \frac{P_2}{A_2} = \frac{P_2 \cdot 4}{\pi d_2^2} = \frac{20 \times 1000 \times 4}{25^2 \pi} = 4.07 \times 10^1 \text{ MPa}$$

となる（厳密には，段になっている点 B の近傍では，**応力集中**が生じており，応力は一定ではないが，ここでは無視できるものと考える）．

AB 間の応力　同様に AB 間の任意の位置 E で棒を仮想的に切断して考える．EC の部分が静止しているためには，断面 E に図のように力（内力）P_1 が加わって，EC 部分に働く力が釣り合っていなければならない．



EC 部分に働く力の釣り合いから $P_1 = F = 20$ kN である．BC 間で切断したときと同様に，AB 間のどこの断面でも応力 σ_{AB} は一定であり

$$\sigma_{AB} = \frac{P_1}{A_1} == \frac{P_1 \cdot 4}{\pi d_1^2} = \frac{20 \times 1000 \times 4}{50^2 \pi} = 1.02 \times 10^1 \text{ MPa}$$

となる．

【Step 2.　材料の性質を考える 】

AB，BC 間の応力が求まったので，それぞれの領域のひずみ ε_{AB} ，ε_{BC} はフック則から以下のように求めることができる．

AB 間のひずみ　$\varepsilon_{AB} = \dfrac{\sigma_{AB}}{E} = \dfrac{1.02 \times 10^1}{200 \times 1000} = 5.09 \times 10^{-5}$

BC 間のひずみ　$\varepsilon_{BC} = \dfrac{\sigma_{BC}}{E} = \dfrac{4.07 \times 10^1}{200 \times 1000} = 2.04 \times 10^{-4}$

【Step 3.　幾何学的関係を考える 】

それぞれの領域の伸び ΔL_{AB} ，ΔL_{BC} は，ひずみの定義（伸びとひずみの関係）から以下のように求まる．

AB 間の伸び　$\Delta L_{AB} = \varepsilon_{AB} \cdot L_1 = 5.09 \times 10^{-5} \times 100 = 5.09 \times 10^{-3}\text{mm}$

BC 間の伸び　$\Delta L_{BC} = \varepsilon_{BC} \cdot L_2 = 2.04 \times 10^{-4} \times 100 = 2.04 \times 10^{-2}\text{mm}$

従って各点の変位として

点 B の変位　$u_B = \Delta L_{AB} = 5.09 \times 10^{-3} = 0.00509\text{mm}$

点 C の変位　$u_C = \Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} = 5.09 \times 10^{-3} + 2.04 \times 10^{-2} = 2.55 \times 10^{-2}\text{mm}$

を得る．

採点基準

- σ_{DC}，σ_{AB} がそれぞれ 10 点
- ΔL_{AB}，ΔL_{BC}，u_B，u_C がそれぞれ 5 点，合計 40 点
- 単位が間違っているもの，ないものはマイナス 2 点
- 応力を算出する際，荷重を kN のまま答えを出しているもの　→　2 点ずつ