機械システム工学実験Ⅲ
現代制御実験

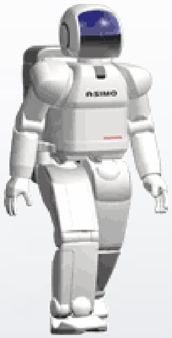
・授業（1時間程度）
・シミュレーション（1時間）
・実験（1時間-1時間半）
・課題（1時間-1時間半）

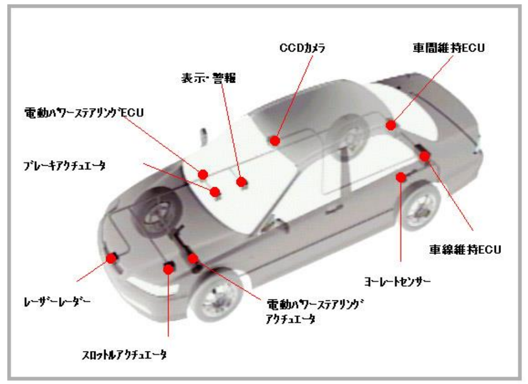
レポート提出に関して
日時：　翌週の月曜10時30分
場所：　9号館553室

質問があれば
鎌田研究室（9号館352室）まで

制御とは？

対象とする物（またはシステム）を自分の思うように操る





制御するためには何が必要か？

コントローラ（制御器）

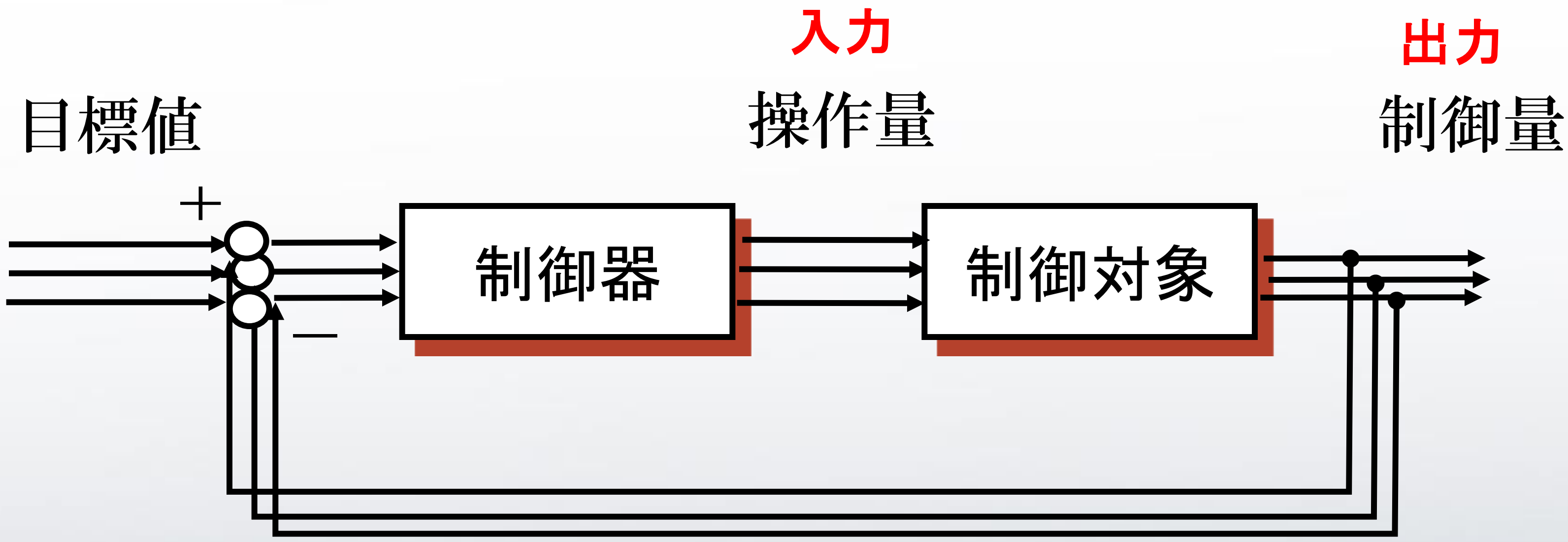
制御を行うための三つのプロセス

- 制御対象の性質・特性を把握する
- 望ましい特性（対象をどう制御したいか）を設定する
- 望ましい特性にする具体的な手段・手法を考える

具体的な制御手法として，**多入力多出力**線形システムに有効な
状態フィードバック制御について学習し，**現代制御理論**により制御設計を行う.

手法　　:　極配置法
制御対象:　倒立振子
応用例　:　セグウェイ

多入力多出力とは？



MIMO（Multiple-Input Multiple-OutputあるいはMulti-Input Multi-Output）は，多入力・多出力システム

状態フィードバック制御とは？

　多入力多出力システムには，状態空間（時間領域）を用いた制御系設計が有効であり，制御対象が複雑であっても行列演算で効率的に制御システムの設計をおこなうことができる．

　状態フィードバックとは，制御対象の状態量をフィードバックすることにより制御を行う手法である．状態フィードバックによる制御系設計は右のステップ（図1参照）でおこなう。

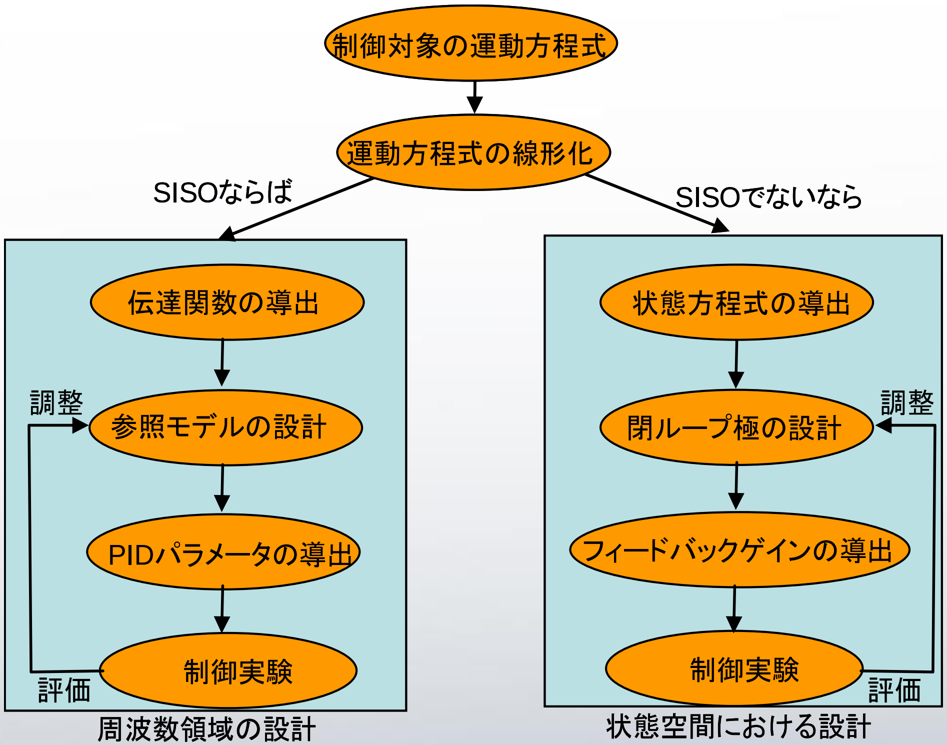


図1　PID制御と状態フィードバック制御の制御器設計のプロセス

現代制御と古典制御の比較

	古典制御	現代制御
モデル	伝達関数	状態方程式
解析内容	入出力による解析	内部状態を考慮した解析
領域	周波数領域	時間領域
入出力	一入力一出力	多入力多出力
対応システム	時不変線形システム	時変システム, 非線形システム
設計指標	試行錯誤的な設計	評価関数による設計

現代制御とは？

　状態方程式と呼ばれる一階の常微分方程式として表現された制御対象に対して，力学系を初めとする種々の数学的な成果を応用して，フィードバック系の安定性，時間応答や周波数応答などを評価して望みの挙動を達成することを目的とする理論である.

利点

状態方程式の未知変数（状態変数と呼ぶ）にベクトルを選ぶことができるため，多入出力系の表現が容易となり、複雑な系に対して制御設計が行いやすい.

極とは？

　伝達関数の分母多項式で、入出力応答を表している. これを零とする方程式を特性方程式と呼び，その解を極と呼ぶ. 極の実部の符号により安定性や収束性が、虚部によって振動特性などが判別できる。

極を求める

例題１

（１）図2の運動方程式を求めよ.
（２）伝達関数を求めよ.

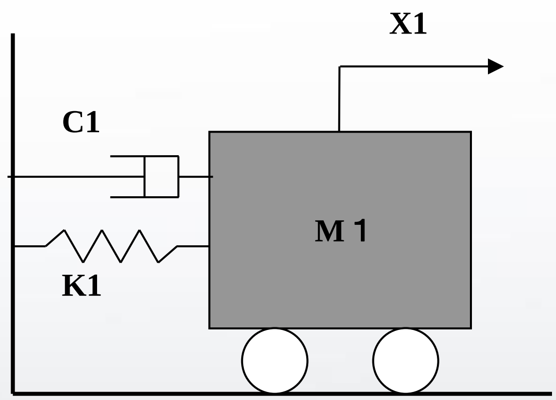


図2　１自由度振動系

$$m_1\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = 0$$

ラプラス変換すると

$$(ms^2 + cs + k)X(s) - X(0) = 0$$

$$\frac{X(s)}{X(0)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

この時の極がa, bであったとすると

$$= \frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-b)}$$

これを逆ラプラス変換すると

極を求める

$$X_1(t) = L^{-1}[\frac{A}{(s-a)} + \frac{B}{(s-b)}] = \boxed{Ae^{at}} + Be^{bt}$$

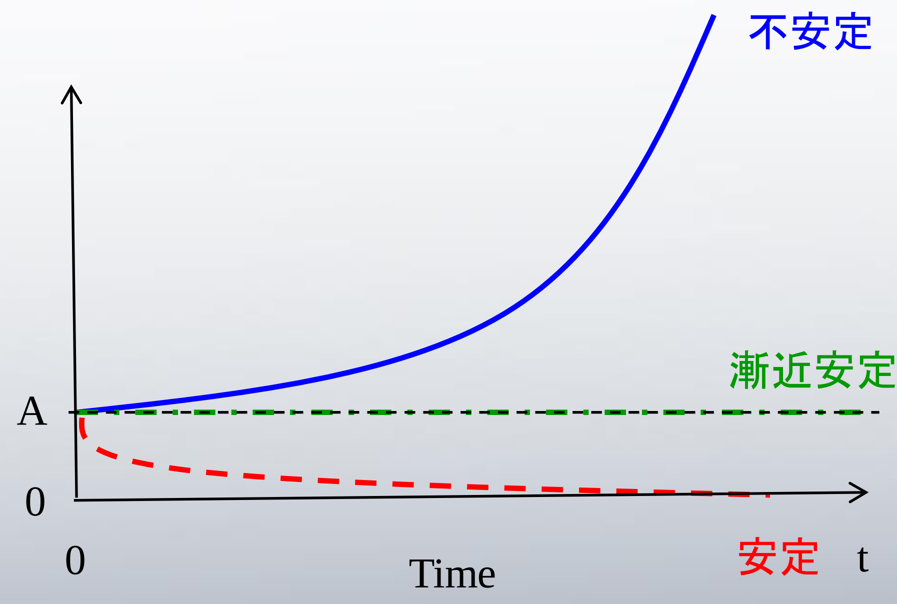
第一項のみを考える.

$$X_1(t) = Ae^{at}$$

極aが正であるとき

極aが負であるとき

極aが零であるとき



極を求める

$$ms^2 + cs + k = 0$$

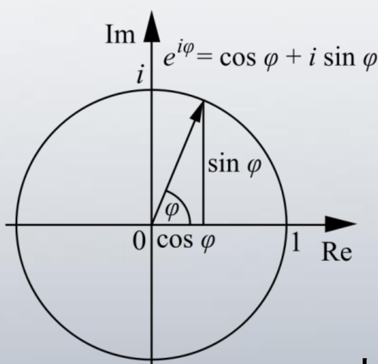
解の公式をとくと極は実数だけではない．
よって虚数の場合を考える必要がある．

$$X_1(t) = \boxed{Ae^{(\alpha + j\beta)t}} + Be^{(\alpha - j\beta)t}$$

極が$\alpha \pm j\beta$という値をとるとき，第一項のみ考えると

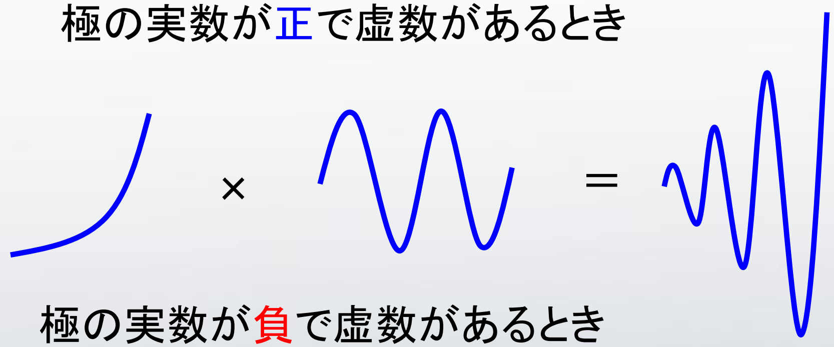
$$X_1(t) = Ae^{(\alpha + j\beta)t} = Ae^{\alpha t}e^{j\beta t}$$

$$= Ae^{\alpha t}(\cos\beta t + j\sin\beta t)$$

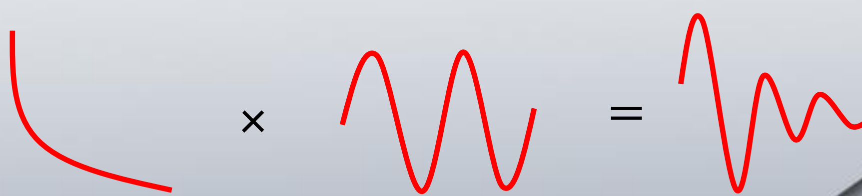


オイラーの公式

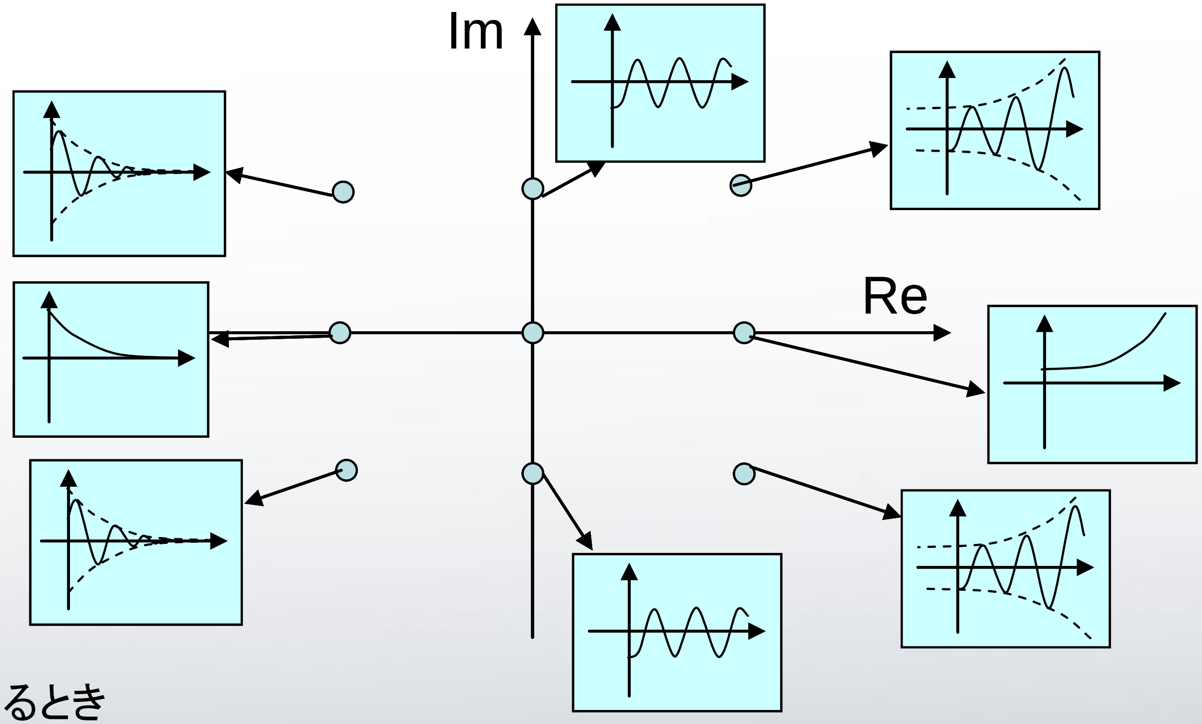
極の実数が正で虚数があるとき



極の実数が負で虚数があるとき



極と時間応答



極の実数が正で虚数があるとき

極の実数が負で虚数があるとき

極の実数が零で虚数があるとき

図３　極と時間応答

状態方程式を求める

例題2

（1）図2の運動方程式を求めよ.
（2）伝達関数を求めよ. ただし, 初期値は0とする.

$$m_1\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = F$$

$$\frac{d}{dt}\dot{x}_1 = \ddot{x}_1 = -\frac{c_1}{m_1}\dot{x}_1 - \frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{1}{m_1}F$$

$$\frac{d}{dt}x_1 = 1\times\dot{x}_1 + 0\times x_1 + 0\times F$$

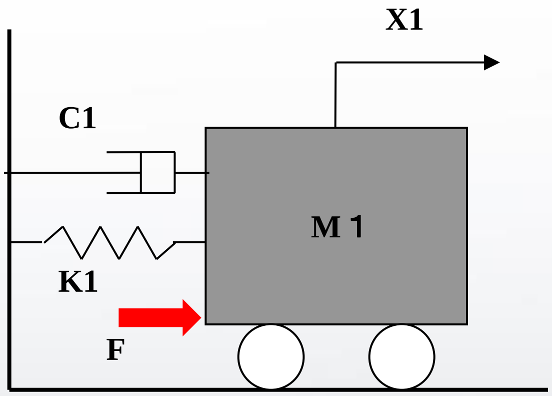


図3　１自由度振動系

これを一階の常微分方程式としてまとめると

状態方程式を求める

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dfrac{c_1}{m_1} & -\dfrac{k_1}{m_1}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ x_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{1}{m_1}\\ 0\end{bmatrix}F$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ x_1\end{bmatrix}=X, \qquad \begin{bmatrix}-\dfrac{c_1}{m_1} & -\dfrac{k_1}{m_1}\\ 1 & 0\end{bmatrix}=A, \qquad \begin{bmatrix}\dfrac{1}{m_1}\\ 0\end{bmatrix}=B, \qquad F=u$$

とおくと

$\dot{X}=AX+Bu$　なり，一階の常微分方程式（状態方程式）となる.

このときのXを状態変数と呼ぶ.

状態方程式から極を求める

$$\dot{X} = AX$$

例題1の運動方程式から極を求めた時と同様に，ラプラス変換を行う.

$$sX(s) - X(0) = AX(s)$$

$$(sI - A)X(s) = X(0)$$

Iは単位行列

$$\frac{X(s)}{X(0)} = (sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

分母は特性方程式，分子は余因子行列

これらより，極は

$$\det(sI - A) = |sI - A| = \prod_{i=1}^{n}(s - \alpha_i) = 0$$

例題1を代入すると

$$\det(sI - A) = \left| s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{c_1}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s + \frac{c_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 + \frac{c_1}{m_1}s + \frac{k_1}{m_1} = 0$$

状態フィードバック制御

状態方程式における入力 を状態フィードバックによって設計することで，閉ループ系の性質を大きく変えることが可能である.
例題2の様に，入力Fを有する状態方程式は以下のように与えられる.

$$\dot{X} = AX + Bu$$

状態フィードバック制御とは制御入力を

$$u = -KX$$

として，状態ベクトルに対してゲインを割り当てる定数行列 を用いる制御である.
このKは状態フィードバックゲインとよばれており、状態変数と同じ数フィードバックゲインが存在する. このような制御をおこなうことで，閉ループシステムは以下のようにおきかわる.

$$\dot{X} = (A - BK)X$$

状態フィードバック制御と極配置法

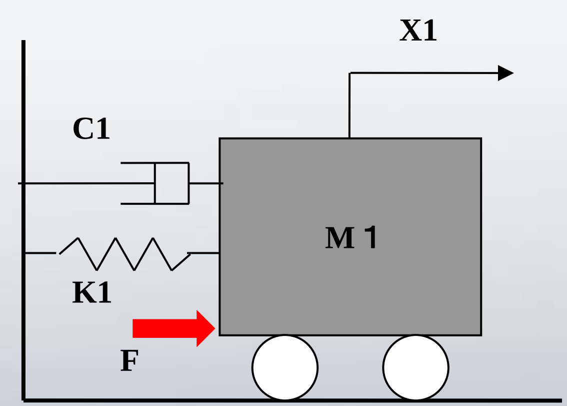
このとき、特性方程式

$$\det(sI-(A-BK)) = |sI-(A-BK)| = 0$$

と置き換えられる.

例題2について極配置法による制御設計を行ってみる

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ x_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dfrac{c_1}{m_1} & -\dfrac{k_1}{m_1}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ x_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dfrac{1}{m_1}\\ 0\end{bmatrix}F$$



ここで各パラメータとして，$m_1 = 1$，$C_1 = 1$，$K_1 = 1$

さらに　$F = -KX$　とおくと

極配置法

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ x_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}F$$

$$F=-[k_1 \quad k_2]\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ x_1\end{bmatrix}$$

代入すると

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ x_1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}[k_1 \quad k_2]\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ x_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1-k_1 & -1-k_2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ x_1\end{bmatrix}$$

この特性方程式は

極配置法

$$|sI-A| = \begin{vmatrix} s+1+k_1 & 1+k_2 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2+(1+k_1)s+(1+k_2)=0$$

これは，k1，k2を調整することにより，任意の極を設定することができる.

$$\begin{aligned} s^2+(1+k_1)s+(1+k_2) &= (s+\beta_1)(s+\beta_2) \\ &= s^2+(\beta_1+\beta_2)s+\beta_1\beta_2 \end{aligned}$$

$$\beta_1+\beta_2 = 1+k_1$$

$$\beta_1\beta_2 = 1+k_2$$

または，任意の極を設定すればフィードバックゲインが求められるといえる.

システムの可制御性

　制御対象と入力の性質により，任意の閉ループ極を配置するフィードバックゲインが算出できない場合がある．すなわち「制御対象を自由に作り変えられない」状況である．このような状況下で，極配置法によってフィードバックゲインを設計することは時間の無駄である．このような無駄をなくすために，極配置法が可能であるか否か（可制御であるか不可制御であるか）を判定することが必要である．

与えられたシステムが可制御（controllable）であるかどうかは、
可制御性行列(controllability matrix)

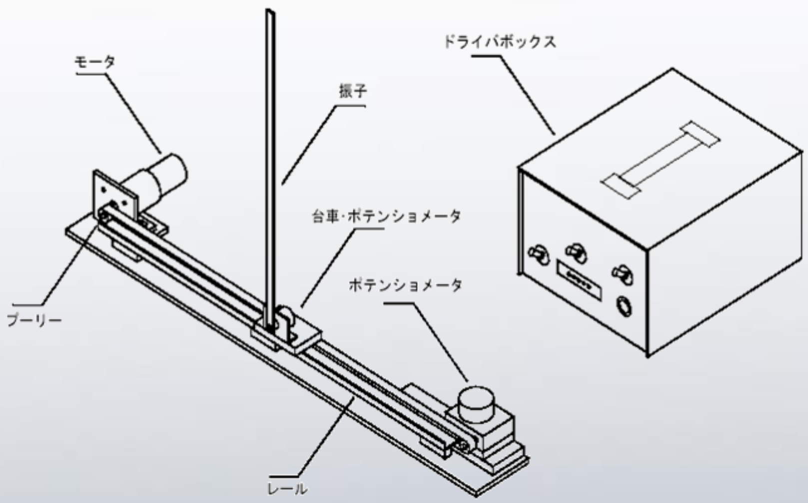
$$T = [B, AB, A^2 B \cdots, A^{n-1} B]$$

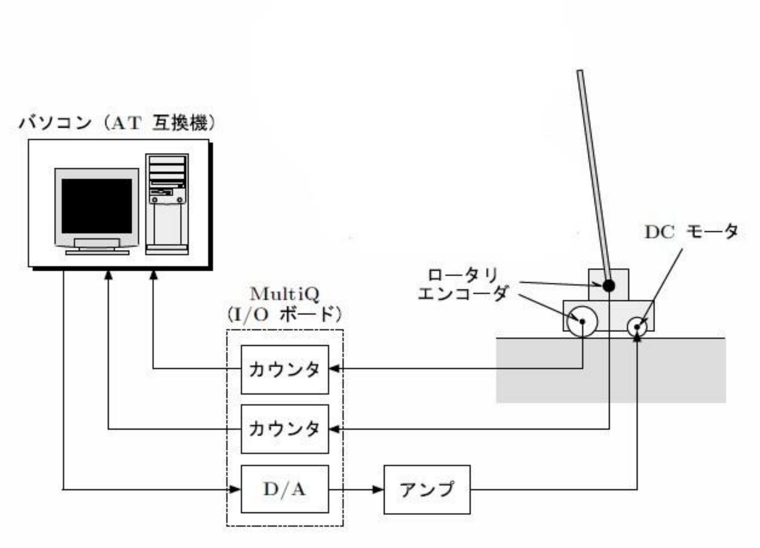
のランクが状態数 と同じ が成り立つ場合である．
また，A，Bは状態方程式の行列であり，nは状態数を表している．

$$\dot{X} = AX + Bu$$

実験

倒立振子実験装置では，ロータリエンコーダで検出された振子の角度，台車の位置を基にコントローラ(PC) でアクチュエータ(DC モータ) に加える電圧を計算し，台車を左右に動かすことによって，振子が倒れないように制御する.





倒立振子実験装置

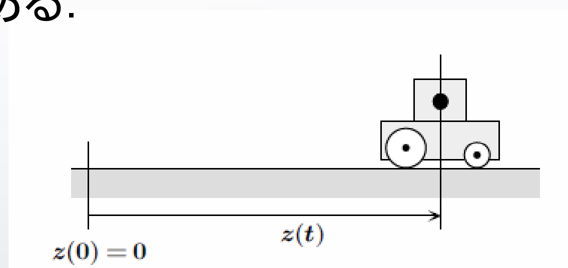
実験装置の準備

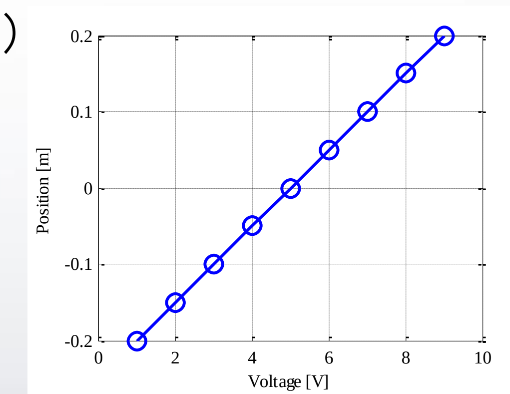
台車の位置と振子の角度をロータリーエンコーダで計測するためには，

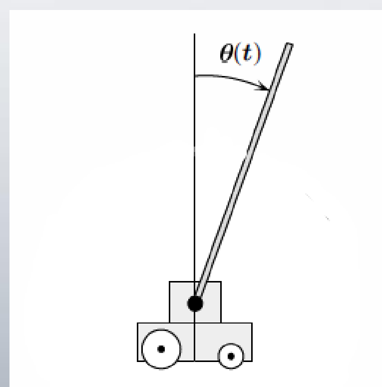
・振子の角度とロータリエンコーダの関係（－40度～40度）

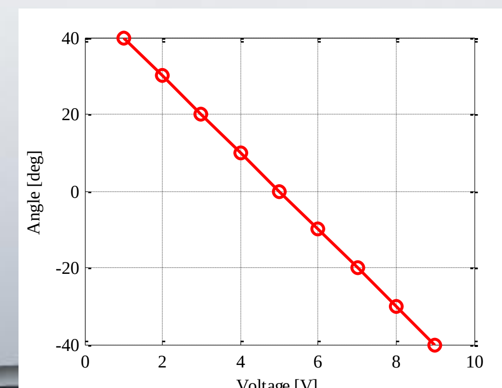
・台車の位置とロータリエンコーダの関係（-0．2m～0．2m）

を知る必要がある.









実験する制御器の設計

実験装置の極は，s = -240 , 0 , -6 , 6

制御目的を決め，その制御が行えるように制御器を設計せよ.

はじめに制御目的を決め，フィードバックゲインを求めシミュレーションを行う.
次に，シミュレーション結果より制御効果の確認（目的どおりになったか　etc.）を行う.
そして，設計した制御器を用いて実験を行う.

制御器は，
・PID制御（古典制御）
・極配置法（現代制御）

PIDで1パターン，極配置法で3パターンのシミュレーションと実験を行う.
ただし、
・極は複素共役（虚部0はOK）
・極は絶対値が10以下
・振動させない応答の場合は　実部＞虚部
・振動的な応答を発生させる場合は，実部＜虚部

状態量とPIDゲインの対応

状態量	PIDゲイン
台車の位置	台車Pゲイン
台車の速度	台車Dゲイン
振子の角度	振子Pゲイン
振子の角速度	振子Dゲイン

レポート（最大8ページまで，wordファイルと印刷したものを提出）

１．目的

２．課題2

３．シミュレーションと実験結果のグラフ（単位はm, deg）

センサのデータはv, m, rad, sでグラフを作成

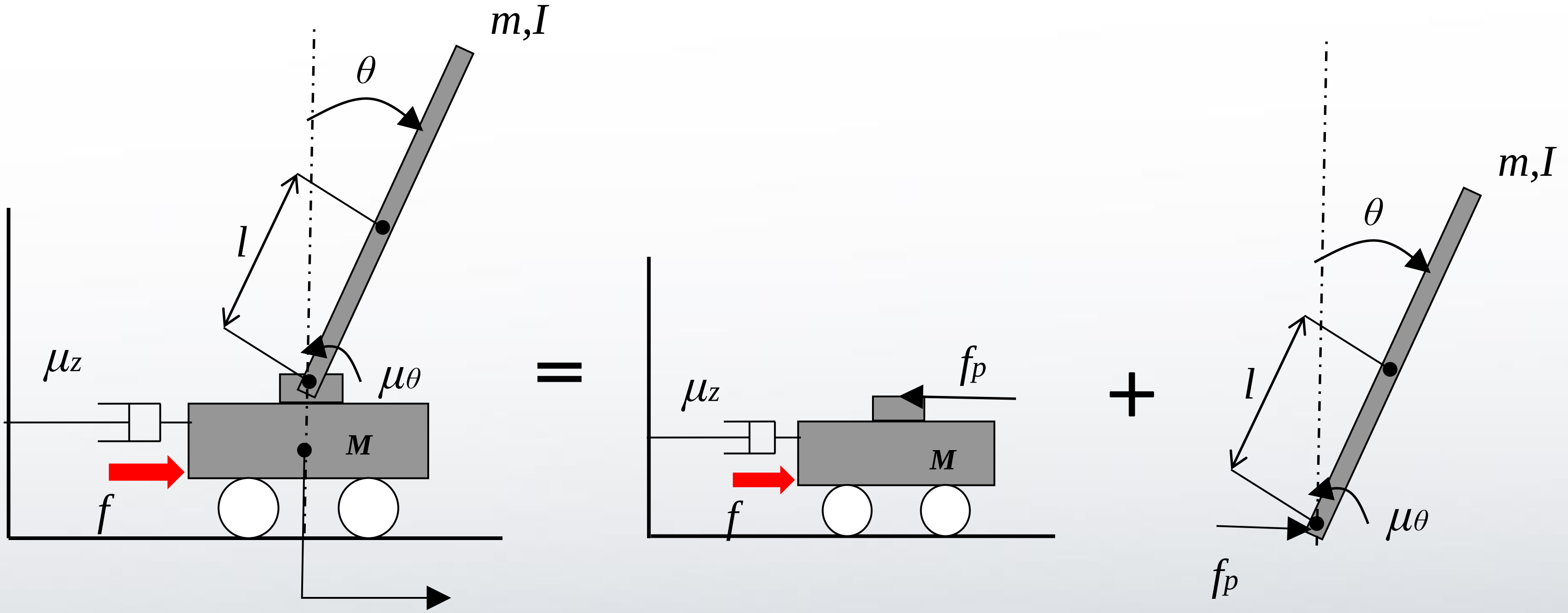
４．制御設計の目的，考察

５．参考文献

注意点

1. 図（グラフ）が指示したフォーマットでなければ，再提出
2. レポートは考察を分かりやすく伝えるものである．（理解しやすい文章にする．）
3. 実験結果や考察は、定性的ではなく定量的に行う．
   （機械力学、制御工学で学習した指標、例：周期、減衰比　etc、）
4. 考察は考えて察したことであり，感想や結果の説明ではありません．
   よって，考察内容が基準に達していない場合（感想・結果の説明）は再提出．
5. 考察でのみレポートの評価を行う．

課題2ヒント



倒立振子を振子と台車に分けて，運動方程式を考える.
又は，ラグランジェの方程式より導くことができる.

課題2ヒント

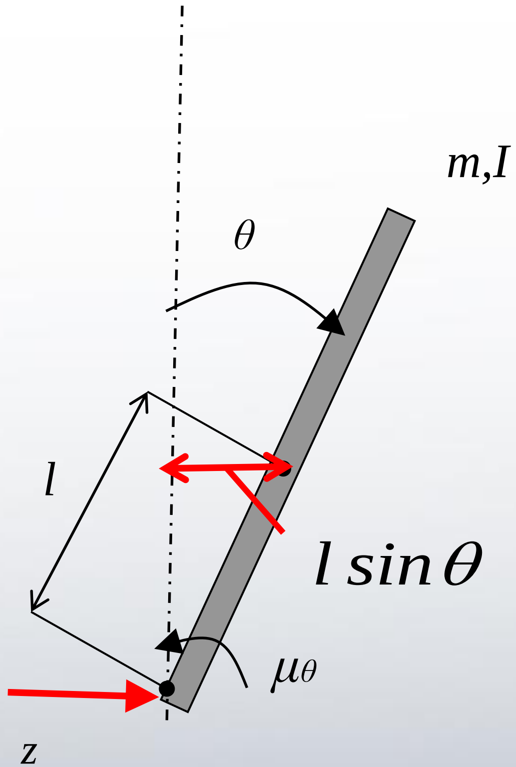
ラグランジェの方程式より求める場合には,
散逸エネルギを考慮する必要がある.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}+\underbrace{\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}}_{\text{散逸関数}}=Q_i$$

散逸エネルギDは,

$$D=\frac{1}{2}\mu_z\dot{z}^2+\frac{1}{2}\mu_\theta\dot{\theta}_1{}^2+\frac{1}{2}\mu_\theta\dot{\theta}_2{}^2$$

課題2ヒント



振子の重心座標は

$$z + l\sin\theta$$

振子の傾き角が微少だとすると,
$\sin\theta \approx \theta$ と近似できる.

$$z + l\theta$$

よって，振子の慣性力は

$$f_p = m(\ddot{z} + l\ddot{\theta})$$

課題2ヒント

台車の併進方向の式は

$$M\ddot{z} = -\mu_z \dot{z} + f - f_p$$

振り子支点に作用する力f_pは以下の式を満たす.

$$f_p = m(\ddot{z} + l\ddot{\theta})$$

代入して整理すると

$$(M+m)\ddot{z} + ml\ddot{\theta} + \mu_z \dot{z} = f$$

振子が回転することによる影響が台車にほとんど及ばないと考えると

$$(M+m)\ddot{z} + \mu_z \dot{z} = f = u$$

作用・反作用

振子の重心周りの回転運動に関する式は

$$I\ddot{\theta} = mgl\sin\theta - f_p l\cos\theta - \mu_\theta \dot{\theta}$$

振り子支点に作用する力f_pは以下の式を満たす.

$$f_p = m(\ddot{z} + l\ddot{\theta})$$

θが微少であると仮定して，線形化し整理すると

$$(I+ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{z} - mgl\theta + \mu_\theta \dot{\theta} = 0$$

課題2ヒント

台車と振子の式を行列でまとめると

$$\begin{bmatrix} M+m & 0 \\ ml & I+ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mu_z & 0 \\ 0 & \mu_\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -mgl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ \theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

ここで　$X=\begin{bmatrix} z & \theta \end{bmatrix}^T$　とおくと

$$\overset{M}{\begin{bmatrix} M+m & 0 \\ ml & I+ml^2 \end{bmatrix}}\ddot{X}+\overset{C}{\begin{bmatrix} \mu_z & 0 \\ 0 & \mu_\theta \end{bmatrix}}\dot{X}+\overset{K}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -mgl \end{bmatrix}}X=\overset{F}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}u$$

$M\ddot{X}+C\dot{X}+KX=Fu$　となり，これより状態方程式がもとまる

ただし，M，C，K，Fは行列なので，Mの逆行列を求める必要がある．

課題2ヒント

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = Fu$$

$$\frac{d}{dt} X = \dot{X}$$

これより,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \dot{X} \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M^{-1}C & -M^{-1}K \\ I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{X} \\ X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{-1}F \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

となり，状態方程式がもとまる．ただし $X = \begin{bmatrix} z & \theta \end{bmatrix}^T$

であるので，状態量は $x = \begin{bmatrix} \dot{X} & X \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{z} & \dot{\theta} & z & \theta \end{bmatrix}^T$

余因子法による逆行列

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} +|A_{11}| & -|A_{21}| & +|A_{31}| \\ -|A_{12}| & +|A_{22}| & -|A_{32}| \\ +|A_{13}| & -|A_{23}| & +|A_{33}| \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

ノイズ除去方法

・デジタルフィルタ

無限インパルス応答（IIR）フィルタと有限インパルス応答（FIR）フィルタがある．オフラインではFFTによるフィルタも使用できる．

・ローパスフィルタ

遮断周波数（カットオフ周波数）より低い周波数の成分はほとんど減衰させず、遮断周波数より高い周波数の成分を逓減させるフィルタである。ハイカットフィルタ等と呼ぶ場合もある。

・移動平均法

時系列データ（一般的には時系列に限らず系列データ）を平滑化する手法であり，有限インパルス応答に対するローパスフィルタの一種。

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s = \omega_n \left\{ \zeta \pm \sqrt{1 - \zeta^2} \right\}$$