

ベクトル解析

13回目講義

畠中 英里

本日の講義の流れ

- 前回の復習
- 本日の講義内容
 - ・ ストークスの定理
 - ・ 曲面の向きと境界の向き
 - ・ ストークスの定理とグリーンの定理（回転型）の関係
 - ・ ポテンシャル場とストークスの定理
 - ・ 流線・流管・渦管

前回の復習（１）

○ グリーンの定理（回転型）

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

「境界に沿う循環」（左辺）＝「内部の局所的な回転の総和」（右辺）

○ グリーンの定理（発散型）

$$\oint_C (P dy - Q dx) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

「境界を通過して外へ出る量（流束）」（左辺）＝「内部での湧き出しの総和」（右辺）

前回の復習（２）

○ ガウスの発散定理

$$\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV$$

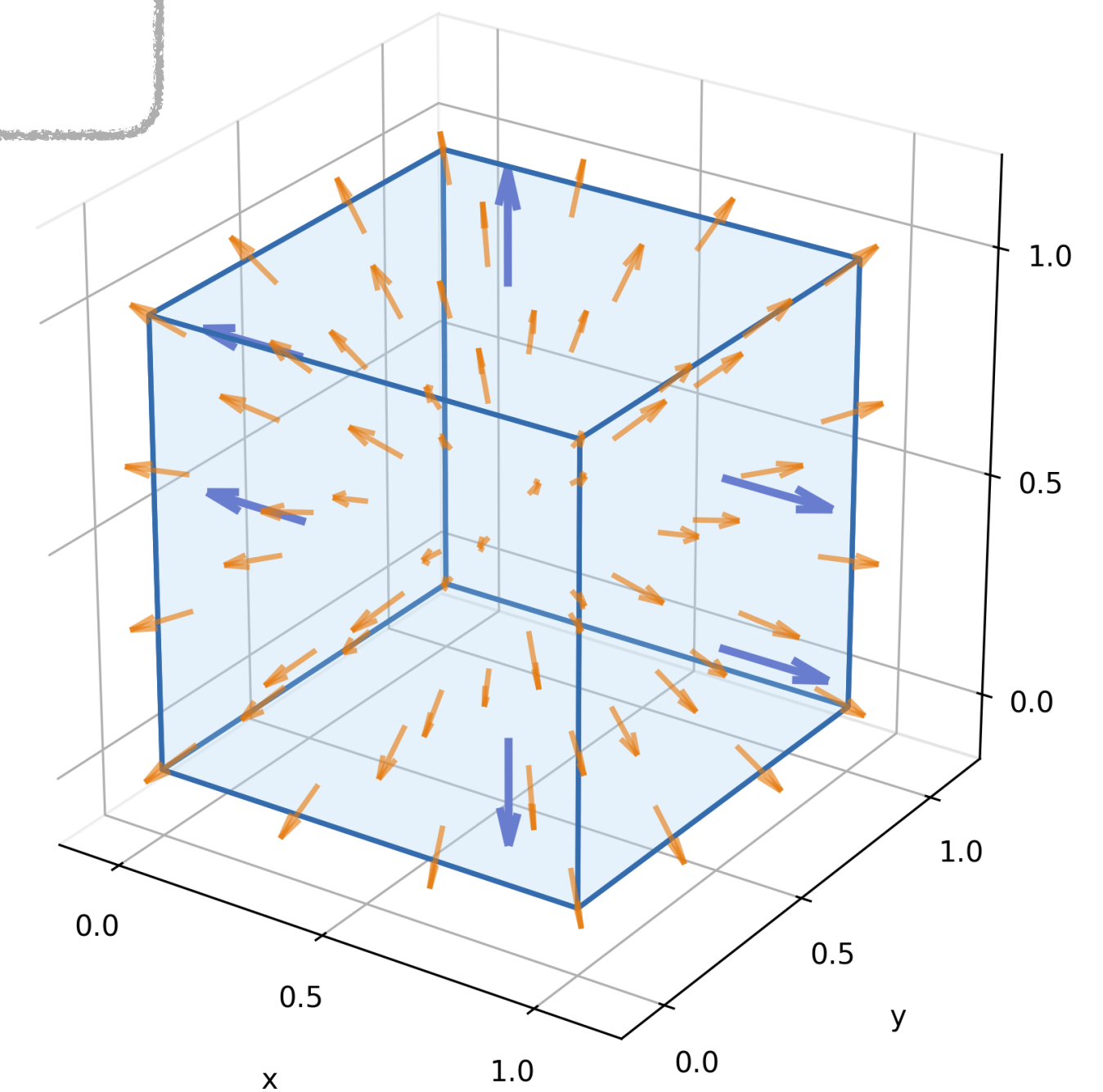
左辺は閉曲面 ∂V を通るベクトル場 $\mathbf{A}$ の流束を表す。

右辺は立体 V の各点での発散を体積にわたって

足し合わせた量である。

すなわち

「境界を通る流束」 = 「内部の発散の総和」



前回の復習 (3)

○ グリーンの定理 (発散型) は、ガウスの発散定理の 2 次元版とみなせる。

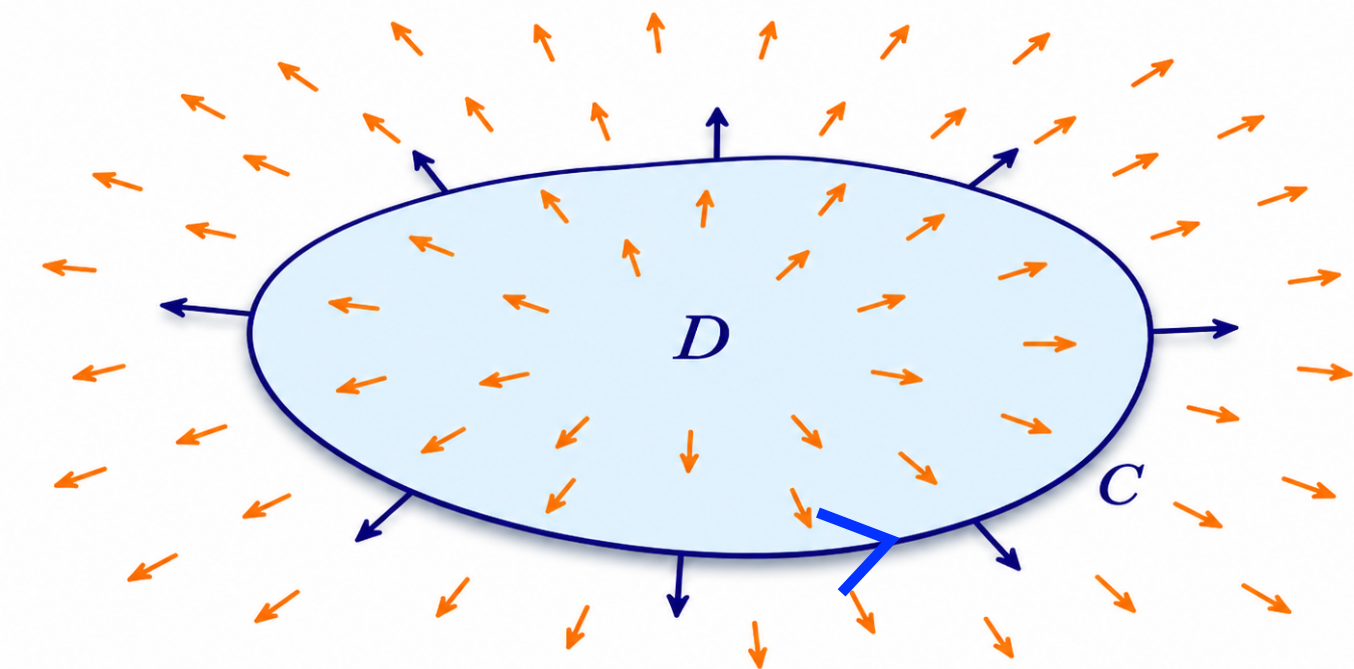
$$\text{グリーンの定理 (発散型)} : \oint_C (P dy - Q dx) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

左辺 $\oint_C (P dy - Q dx) = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds$ は流束を表し、

右辺は平面ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ を

3 次元ベクトル場 $(P(x, y), Q(x, y), 0)$ とみなしたときの

発散 $\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + 0 = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ となることより従う。



前回の復習（４）

○ ３つの基本量

$$\nabla \varphi \text{ , } \operatorname{div} A = \nabla \cdot A \text{ , } \operatorname{rot} A = \nabla \times A$$

勾配 $\nabla \varphi$ は、スカラー場 φ の最大増加方向とその増加率を表すベクトル場。

発散 $\operatorname{div} A$ は、ベクトル場 A の湧き出しの強さを表すスカラー場。

回転 $\operatorname{rot} A$ は、ベクトル場 A の局所的な回転の向きと強さを表すベクトル場。

閉曲線に沿うベクトル場の線積分を循環というのであった。

今日は、回転と循環を 3 次元で結ぶ **ストークスの定理** を学習する。

今日の講義

ストークスの定理

ストークスの定理

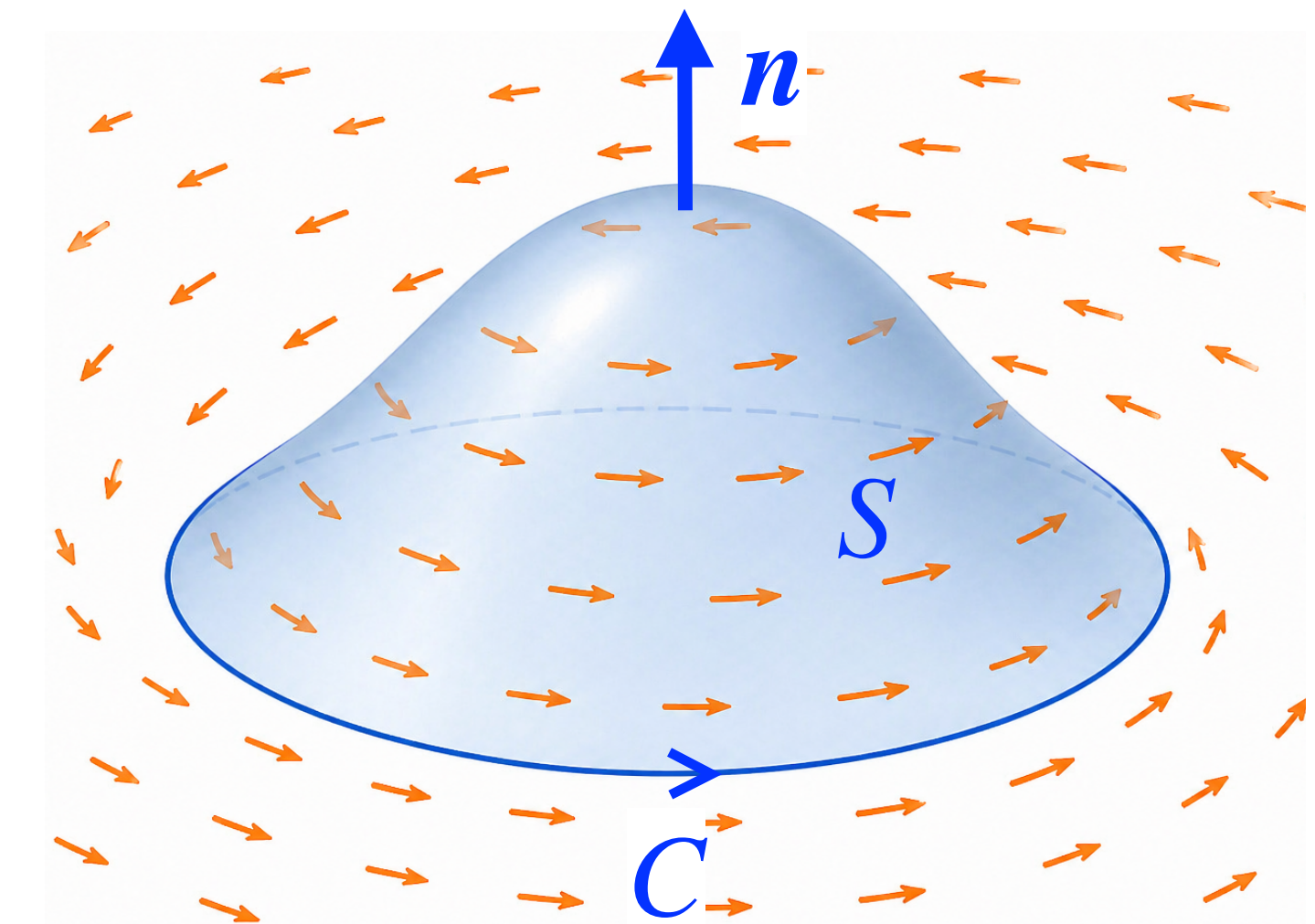
S を区分的に滑らかな向きづけられた曲面とし、 $C = \partial S$ をその境界曲線とする。

A を、 S を含む開領域上で C^1 級のベクトル場とし、

C には S の向きと右手系で対応する向きを考える。

このとき、つぎが成り立つ。

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$



これを **ストークスの定理** という。

ここで、 $dS = \mathbf{n} dS$, $\mathbf{n}$ は法単位ベクトルであり、

dS は曲面上の微小面積を表す記号であり、 S の微分ではないことに注意する。

ストークスの定理（左辺の意味）

9

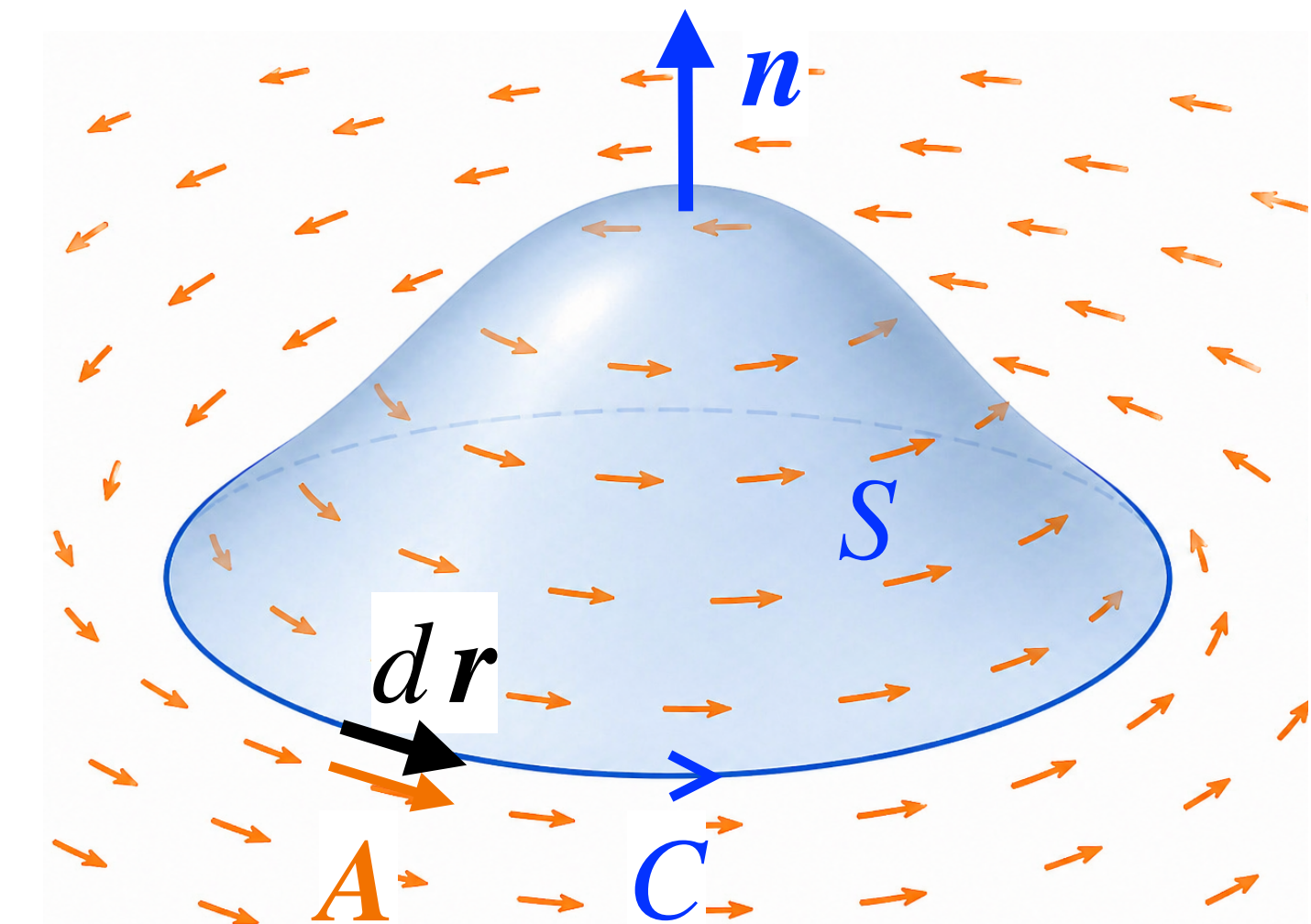
左辺

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

は、境界曲線 C に沿ってベクトル場 $\mathbf{A}$ を接線方向にみた線積分である。

したがってこれは、境界に沿ってベクトル場がどれだけ回っているかを表し、**循環**と呼ばれる。

ベクトル場が境界の向きと同じ向きに強く沿っていれば正、逆向きなら負、直交していれば 0 となる。



$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} > 0$$

ストークスの定理（右辺の意味）

右辺

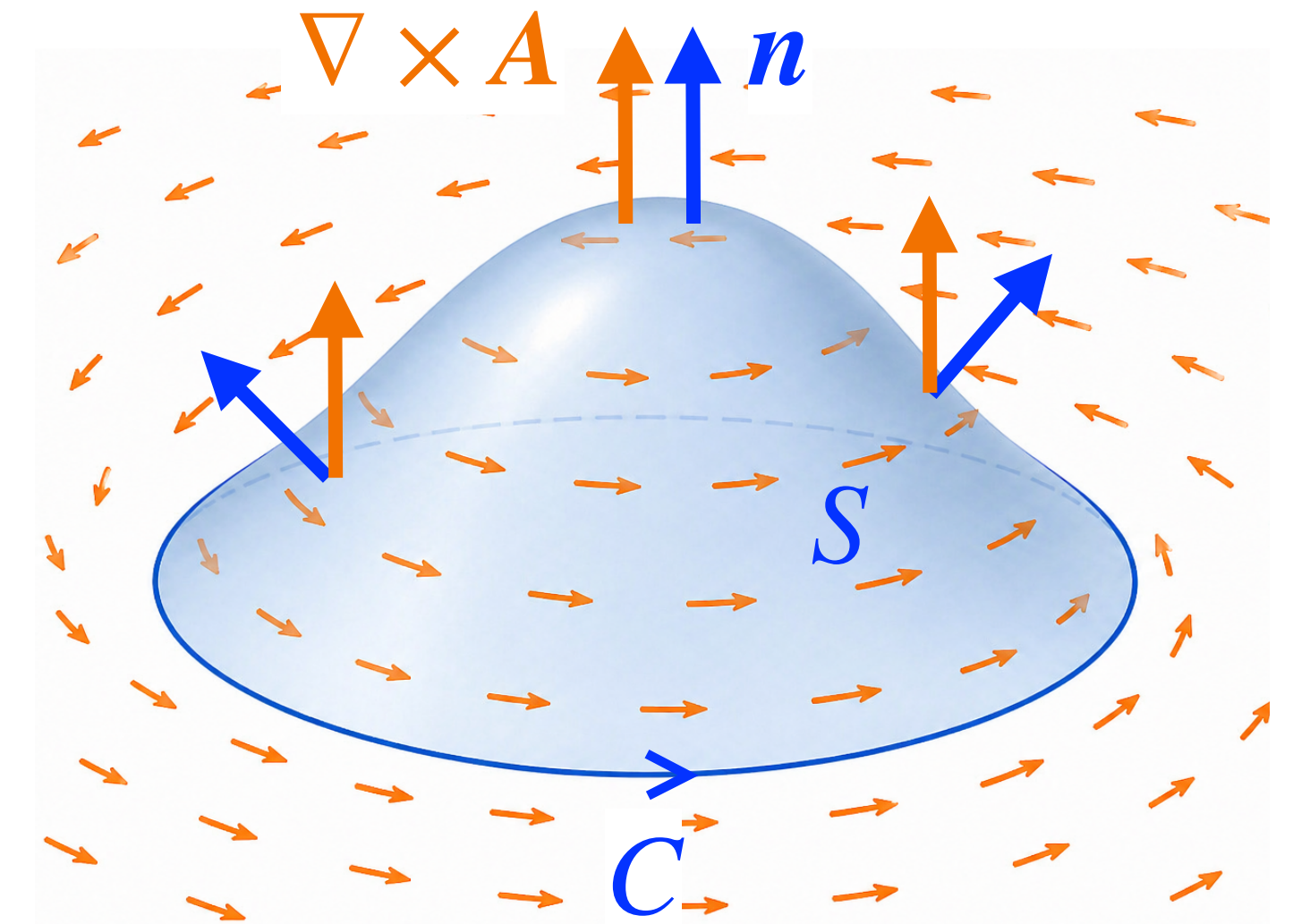
$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS$$

は、曲面 S 上での回転ベクトル

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

の法線方向の面積分である。

すなわち、曲面上の各点におけるベクトル場 $\mathbf{A}$ の
回転の強さを、曲面の向き $\mathbf{n}$ に沿って全て足し合わせた量である。

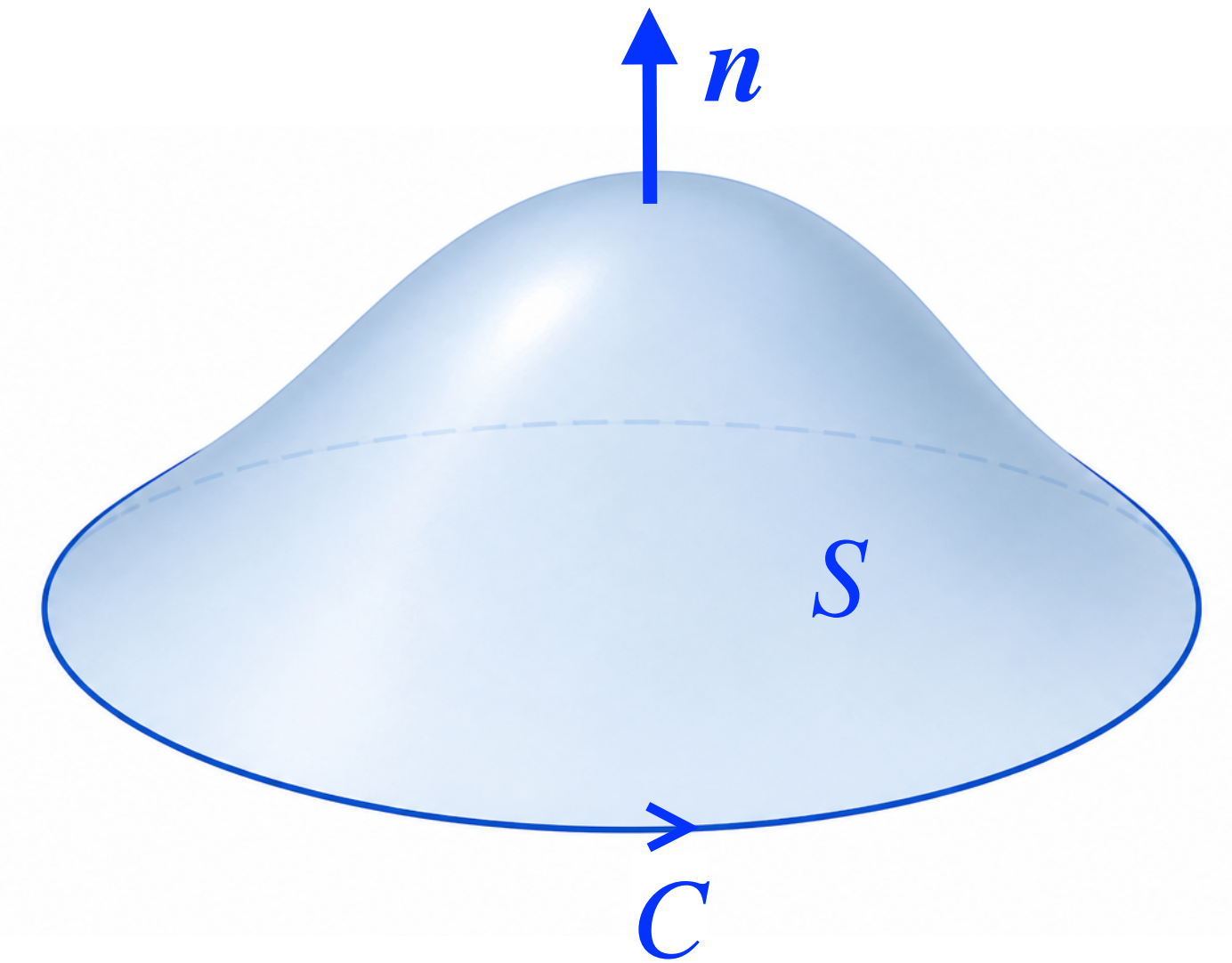


曲面の向きと境界の向き

曲面 S の向きを法単位ベクトル n の向きで決めると、境界曲線 C の向きも自動的に決まる。

右手の親指を曲面の法線方向に向けたとき、残りの指が曲がる向きが境界曲線の正の向き。

曲面の向きを逆にし、それに対して境界曲線 C の向きも逆にすると、ストークスの定理の左辺・右辺はともに符号が反転する。



$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

ストークスの定理が成り立つ理由 (1)

曲面 S をたくさんの小さな三角形に分割する。

各小三角形に対して、その境界に沿う循環はその面上の回転に対応する。

各小三角形 S_i の近くでは曲面をほぼ平面とみなせる。

S_i の面積を ΔS_i とすると、

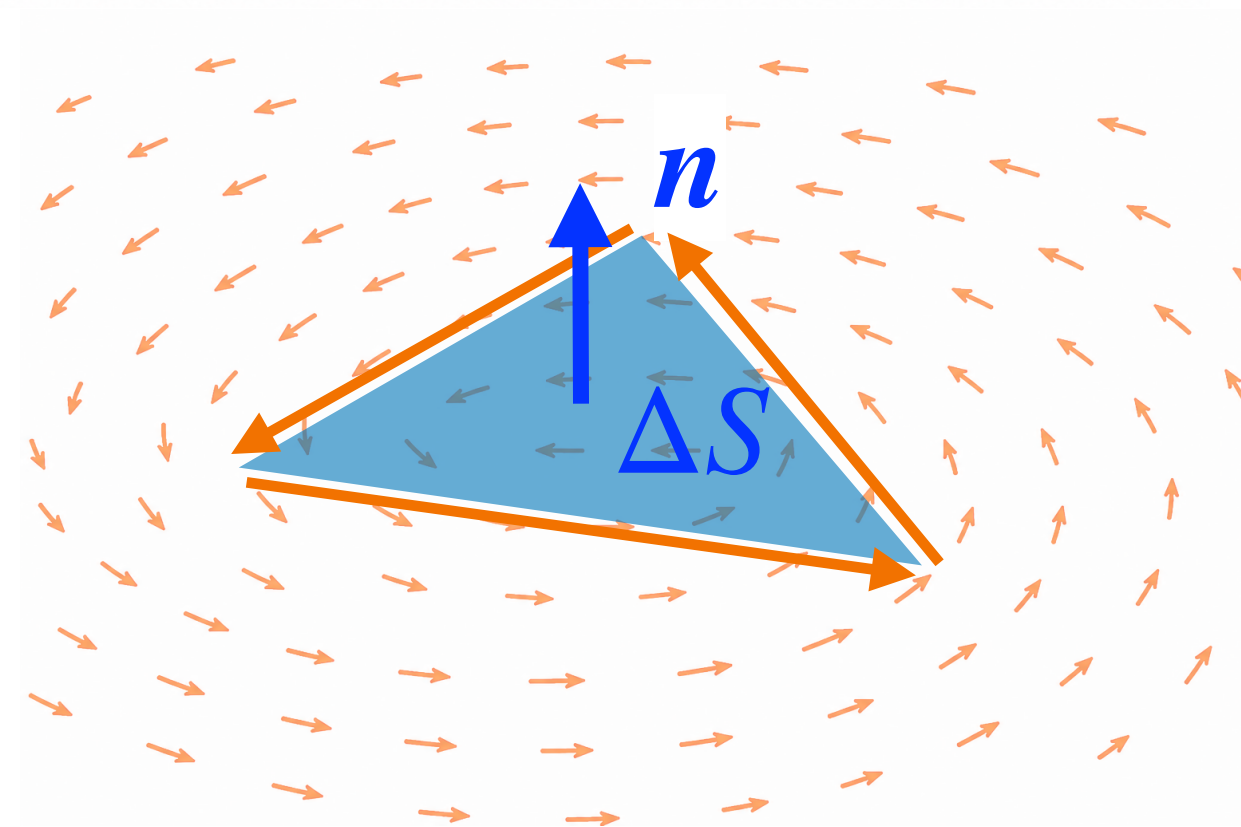
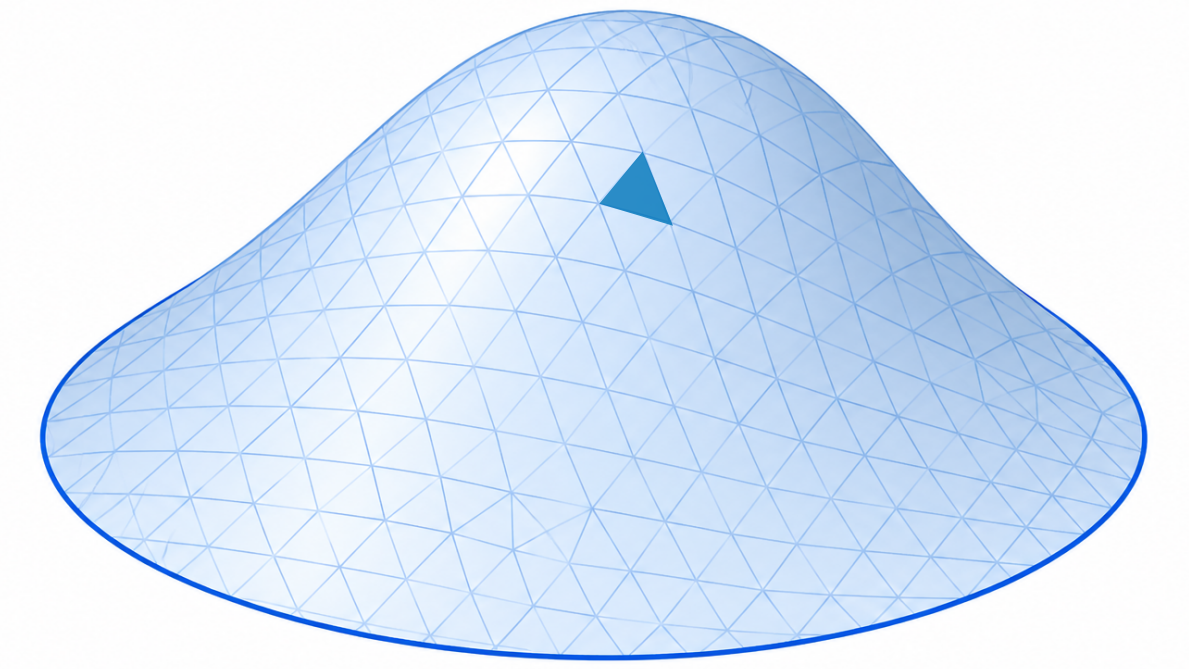
グリーンの定理 (回転型) からつぎの近似を得る。

$$\int_{\partial S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \approx (\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_i) \Delta S_i$$

実際、 $\mathbf{A} = (P, Q, R)$, $d\mathbf{r} = (dx, dy, 0)$ とすれば

左辺については $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = P dx + Q dy$,

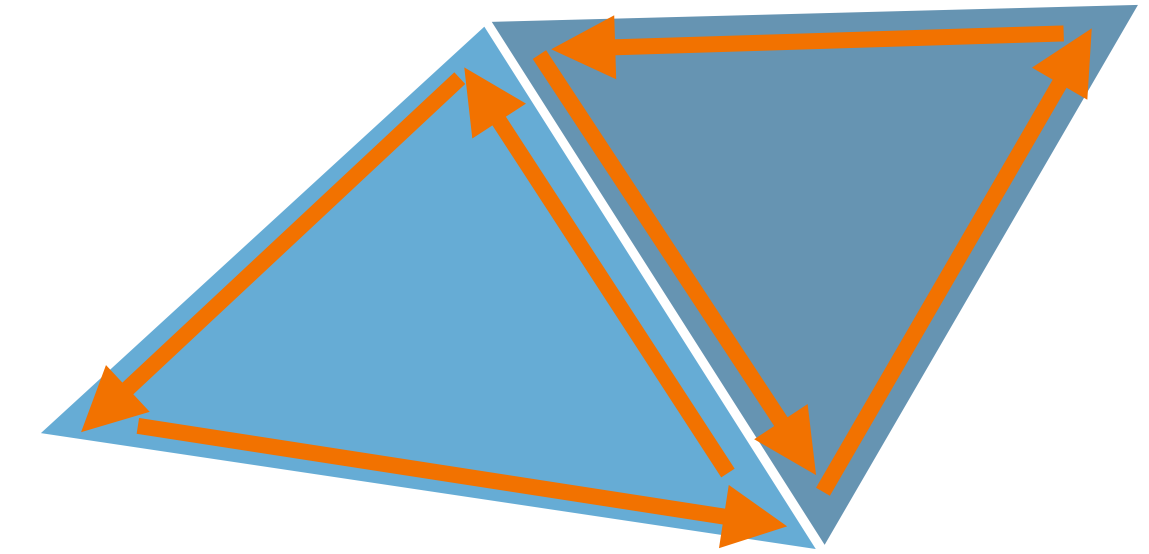
右辺については $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, $\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ となる。



ストークスの定理が成り立つ理由 (2)

13

となり合う二つの三角形は共通の辺を持つ。
その共通辺は一方では正の向き、
もう一方では逆向きに数えられるため、
内部の辺に沿う線積分は互いに打ち消しあう。



したがって、最後に残るのは
曲面全体の境界 C に沿う線積分だけとなる。

このことから、

「境界 C に沿う循環」 = 「曲面 S 上の回転の総和」

というストークスの定理の形が直感的に理解できる。

グリーンの定理（回転型） との関係

曲面 S を xy 平面内の領域 D とし、法単位ベクトルを $n = (0, 0, 1)$ とする。

3次元ベクトル場 $A(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ を考えると

$$\text{rot } A = \nabla \times A = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

となることより

$$\text{rot } A \cdot n = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

このときストークスの定理は $\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ となる。

すなわち、グリーンの定理（回転型）は、ストークスの定理の2次元版とみなせる。

ストークスの定理の計算例（１）

ベクトル場 $A = (-y, x, 0)$ を考える。

曲面 $S: x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ (xy 平面上の単位円板)

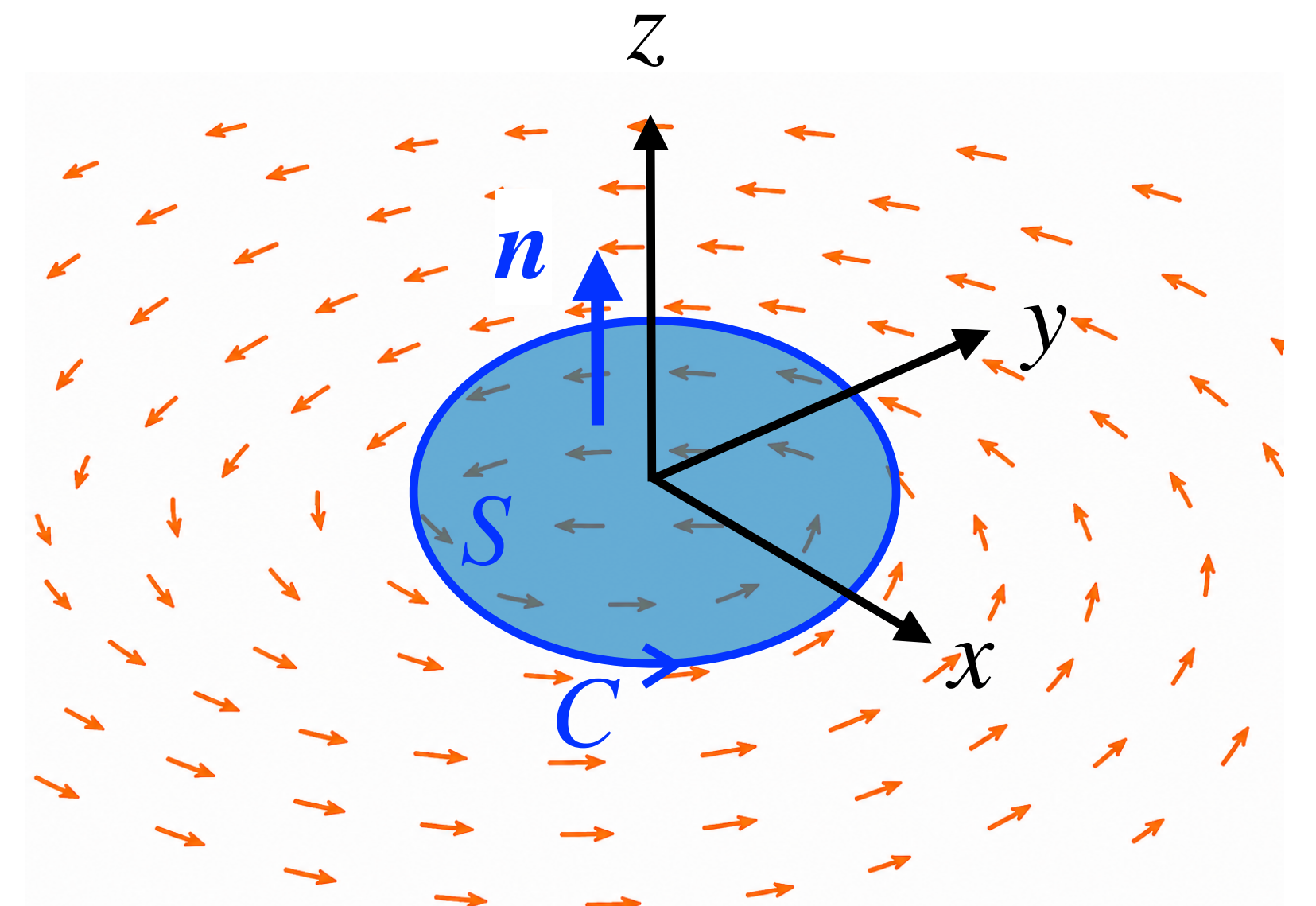
とし、 S の向きとして法単位ベクトルを $n = (0, 0, 1)$ とする。

このとき S の境界 C は xy 平面上の単位円周であり、

右手系により反時計回りに向き付けられている。

ストークスの定理が成り立つことを確かめよう。

$$\oint_C A \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } A) \cdot d\mathbf{S}$$



ストークスの定理の計算例 (2)

左辺の値を求める。

境界曲線 C を

$$C : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0), 0 \leq t \leq 2\pi$$

と媒介変数表示する。このとき

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0), \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

となることより、

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = dt$$

したがって左辺はつぎのように求まる。

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

ストークスの定理の計算例 (3)

つぎに右辺の値を求めよう。 x と y を媒介変数とし、

$$S : \mathbf{r}(x, y) = (x, y, 0), D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = (1, 0, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (0, 1, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (0, 0, 1), \quad \text{これは } \mathbf{n} = (0, 0, 1) \text{ と一致。}$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = (0, 0, 2) \text{ より右辺の面積分は}$$

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (0, 0, 2) \cdot (0, 0, 1) dx dy = \iint_D 2 dx dy = 2\pi$$

以上よりストークスの左辺・右辺の値が一致することが確かめられた。

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = 2\pi$$

ストークスの定理の計算例（４）

ベクトル場 A と境界曲線 C は同じで、異なる曲面 S' について考えてみよう。

同じベクトル場 $A = (-y, x, 0)$ に対し、

曲面 $S' : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ （単位球面の上半分）

としてみよう。 S' の向きは外向きとする。

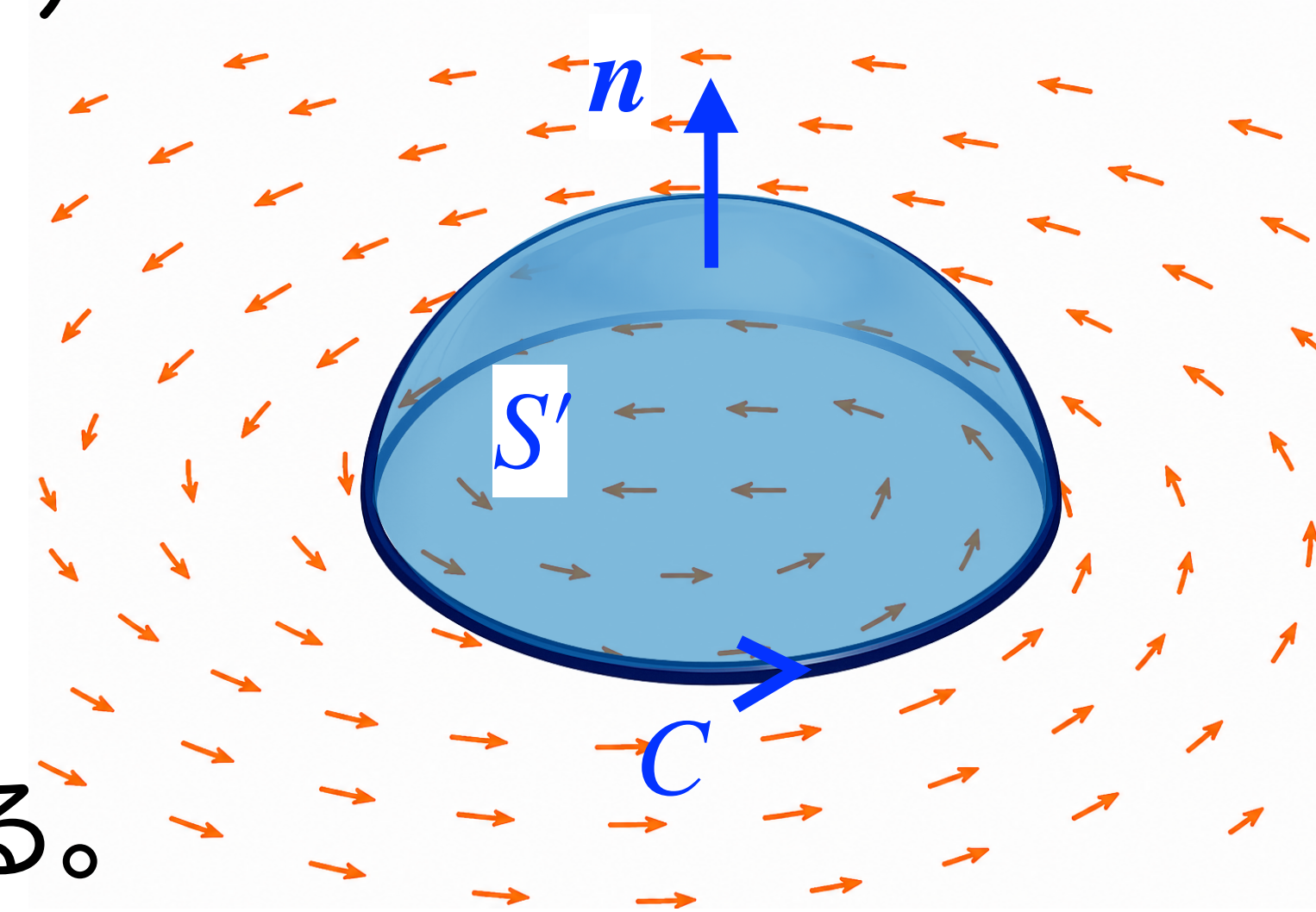
この曲面の境界 C は、前の例と同じ単位円周

$$x^2 + y^2 = 1, z = 0$$

であり、 C の向きも反時計回りで S' と右手系で対応する。

したがって、ストークスの定理の左辺は前の例と同じ値となる。

$$\oint_C A \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$$



ストークスの定理の計算例 (5)

右辺の値を求めよう。ベクトル場 $A = (-y, x, 0)$ は前の例と同じであるから

$$\text{rot } A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = (0, 0, 2)$$

x と y を媒介変数とすれば、今回の曲面 S' はつぎのように媒介変数表示を持つ。

$$S' : \mathbf{r}(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2} \right), D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

この媒介表示は $x^2 + y^2 < 1$ で用い、境界 $x^2 + y^2 = 1$ は極限として扱う。

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \left(1, 0, -\frac{x}{z} \right), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left(0, 1, -\frac{y}{z} \right), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \right)$$

これは S' (上半球面) の外向きと一致する。

$$\iint_{S'} (\text{rot } A) \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (\text{rot } A) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D (0, 0, 2) \cdot \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \right) dx dy = \iint_D 2 dx dy = 2\pi$$

ストークスの定理の計算例（6）

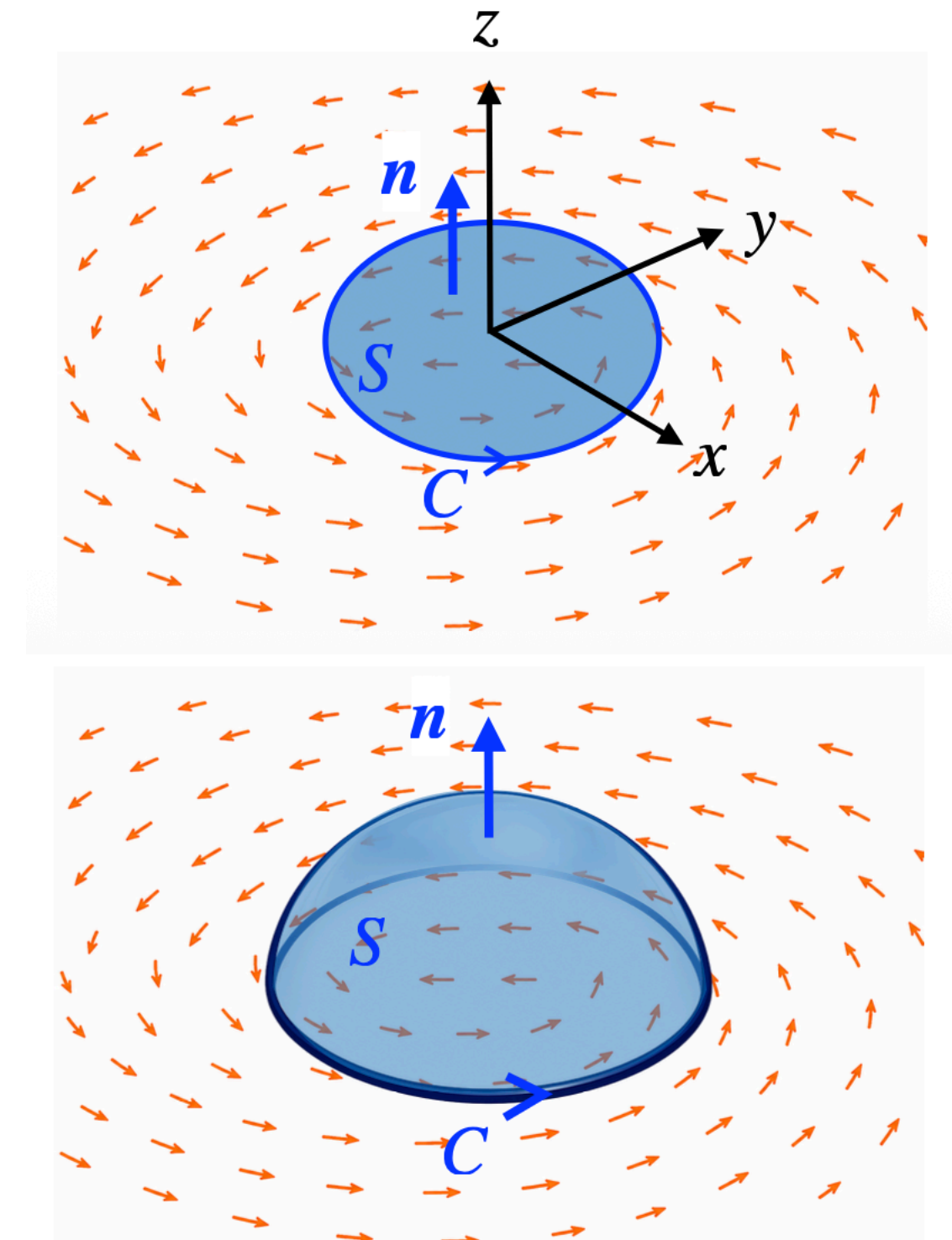
したがって、この場合もストークスの定理が成り立つことがわかる。

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S'} (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = 2\pi$$

ベクトル場 $\mathbf{A}$ を固定し、ストークスの定理を適用できる範囲では、 C を境界とし、 C と右手系で向きが対応する曲面 S の選び方によらず、

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

は同じ値となる。



ポテンシャル場と回転

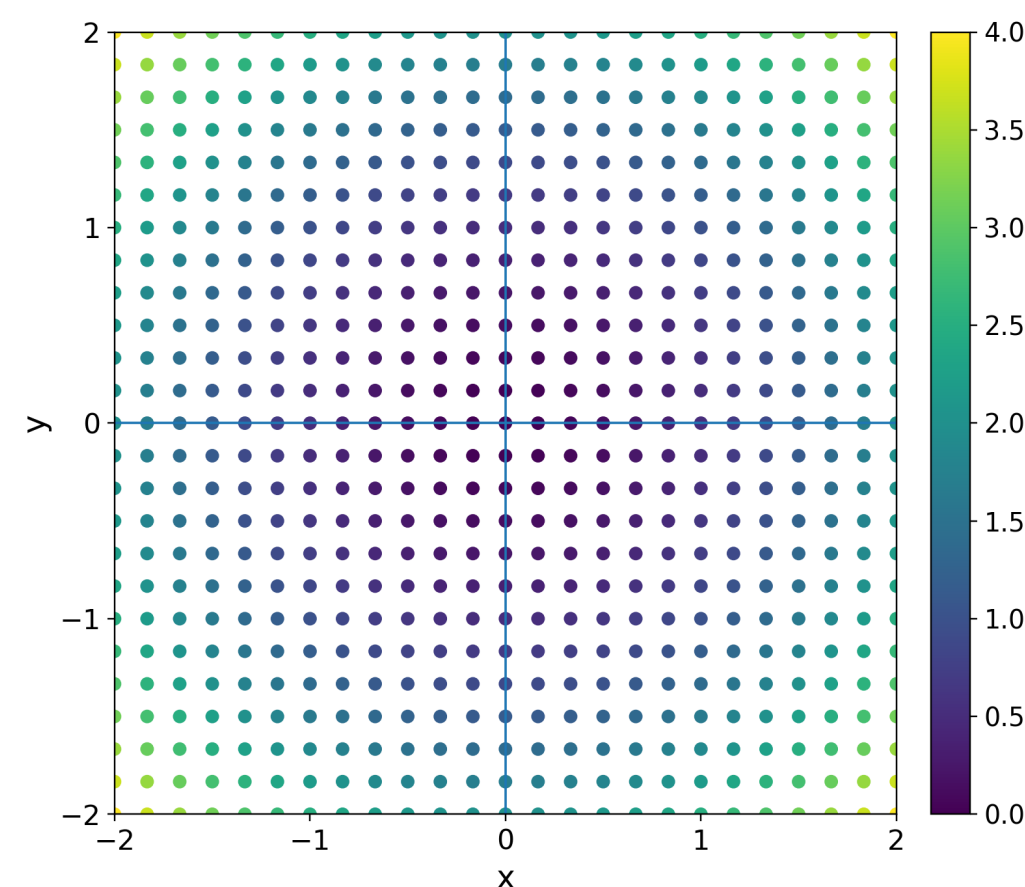
ベクトル場 $A = (A_x, A_y, A_z)$ に対し、 C^2 級のスカラー場 φ があって、

$A = -\nabla\varphi$ となるとき、 φ を A のポテンシャルというのであった。

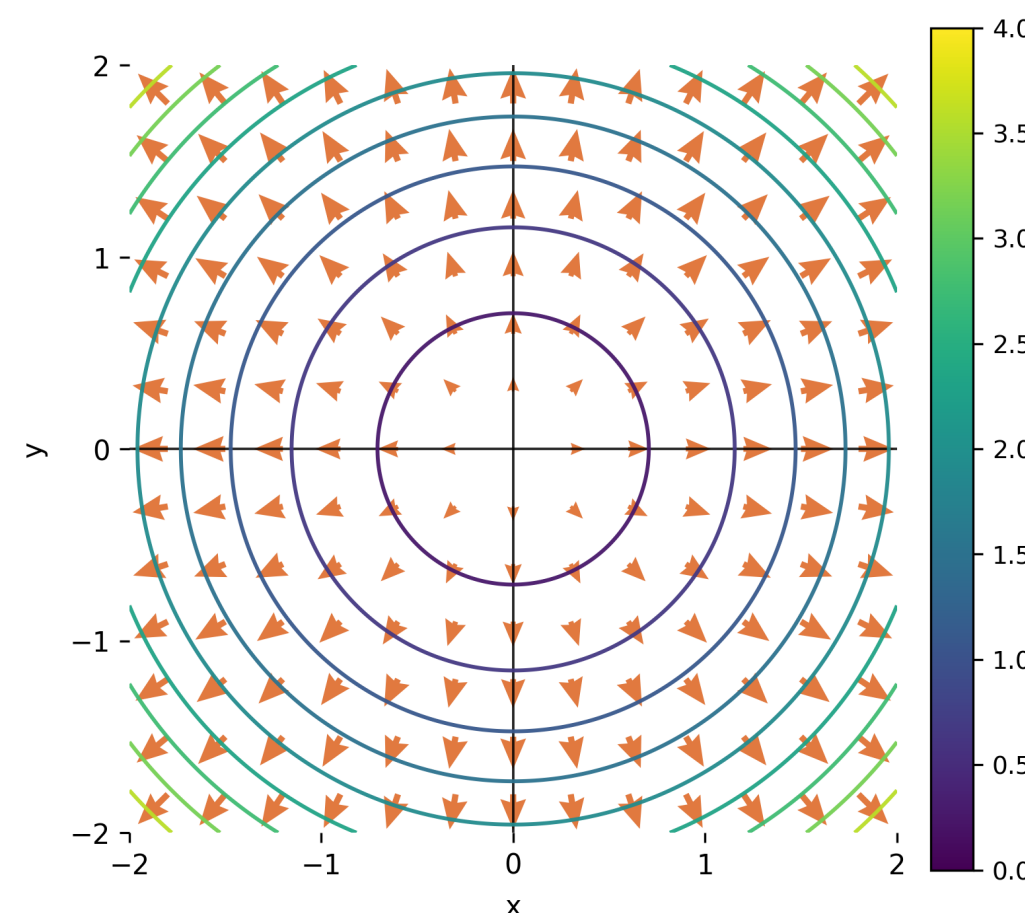
また、ポテンシャルをもつベクトル場をポテンシャル場、保存力場という。

このとき $\text{rot } A = \nabla \times (-\nabla\varphi) = -\nabla \times (\nabla\varphi) = \mathbf{0}$ が成り立つ。

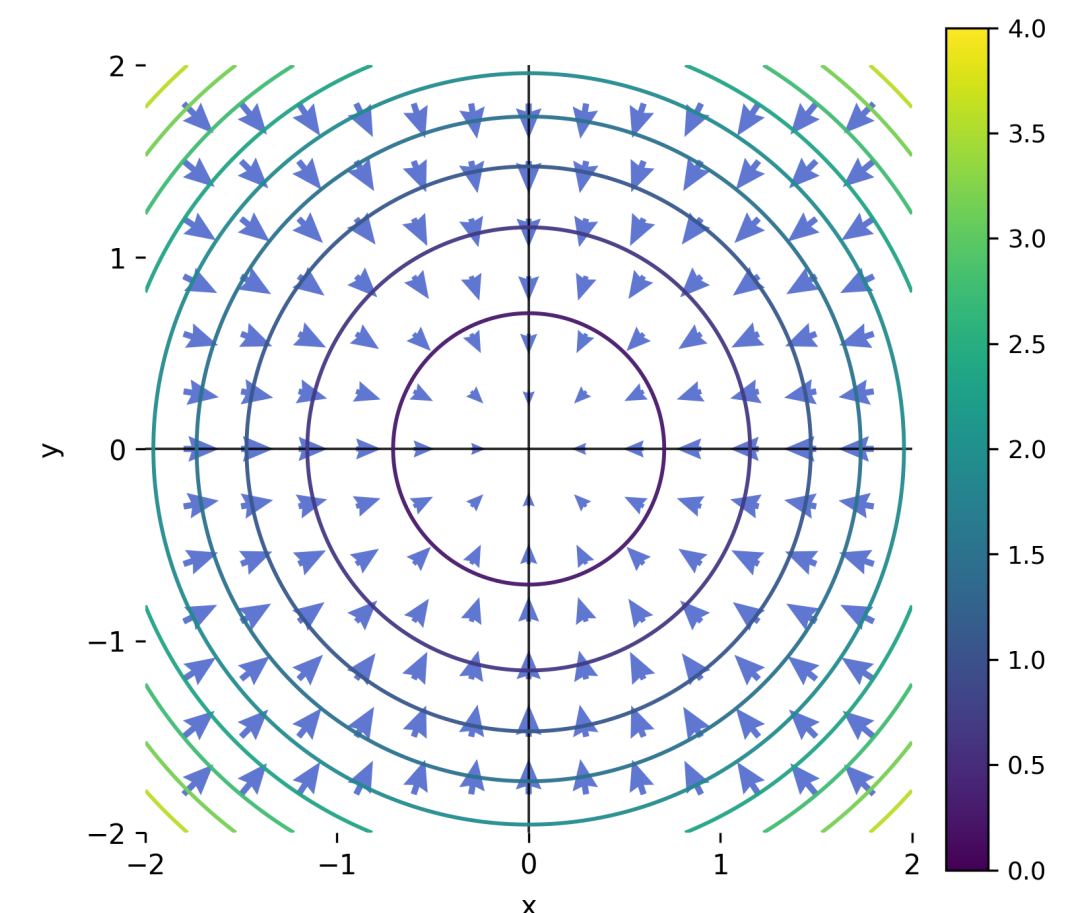
すなわち、ポテンシャル場には局所的な回転がない。



スカラー場 $\varphi = 1/2(x^2 + y^2)$



ベクトル場 $\nabla\varphi$



ポテンシャル場 $A = -\nabla\varphi$

ポテンシャル場とストークスの定理

A がポテンシャル場で、 $C = \partial S$ となる曲面 S にストークスの定理を適用できるとき、

$$\oint_C A \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } A) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

となるため、任意の閉曲線 C について

$$\oint_C A \cdot d\mathbf{r} = 0$$

が成り立つ。

また、9回目講義21ページで $\int_C A \cdot d\mathbf{r} = -\varphi(\text{終点}) + \varphi(\text{始点})$ となることを学んだ。閉曲線では始点と終点が一致するため、この公式からも $\oint_C A \cdot d\mathbf{r} = 0$ が分かる。

積分定理まとめ (1)

○ グリーンの定理 (回転型)

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

「境界に沿う循環」 (左辺) = 「内部の局所的な回転の総和」 (右辺)

○ グリーンの定理 (発散型)

$$\oint_C (P dy - Q dx) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

「境界を通過して外へ出る量 (流束)」 (左辺) = 「内部での湧き出しの総和」 (右辺)

積分定理まとめ (2)

○ ガウスの発散定理

$$\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV$$

「境界を通る流束」 = 「内部の発散の総和」

○ ストークスの定理

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$$

「境界曲線に沿う循環」 = 「曲面上の回転の総和」

流線

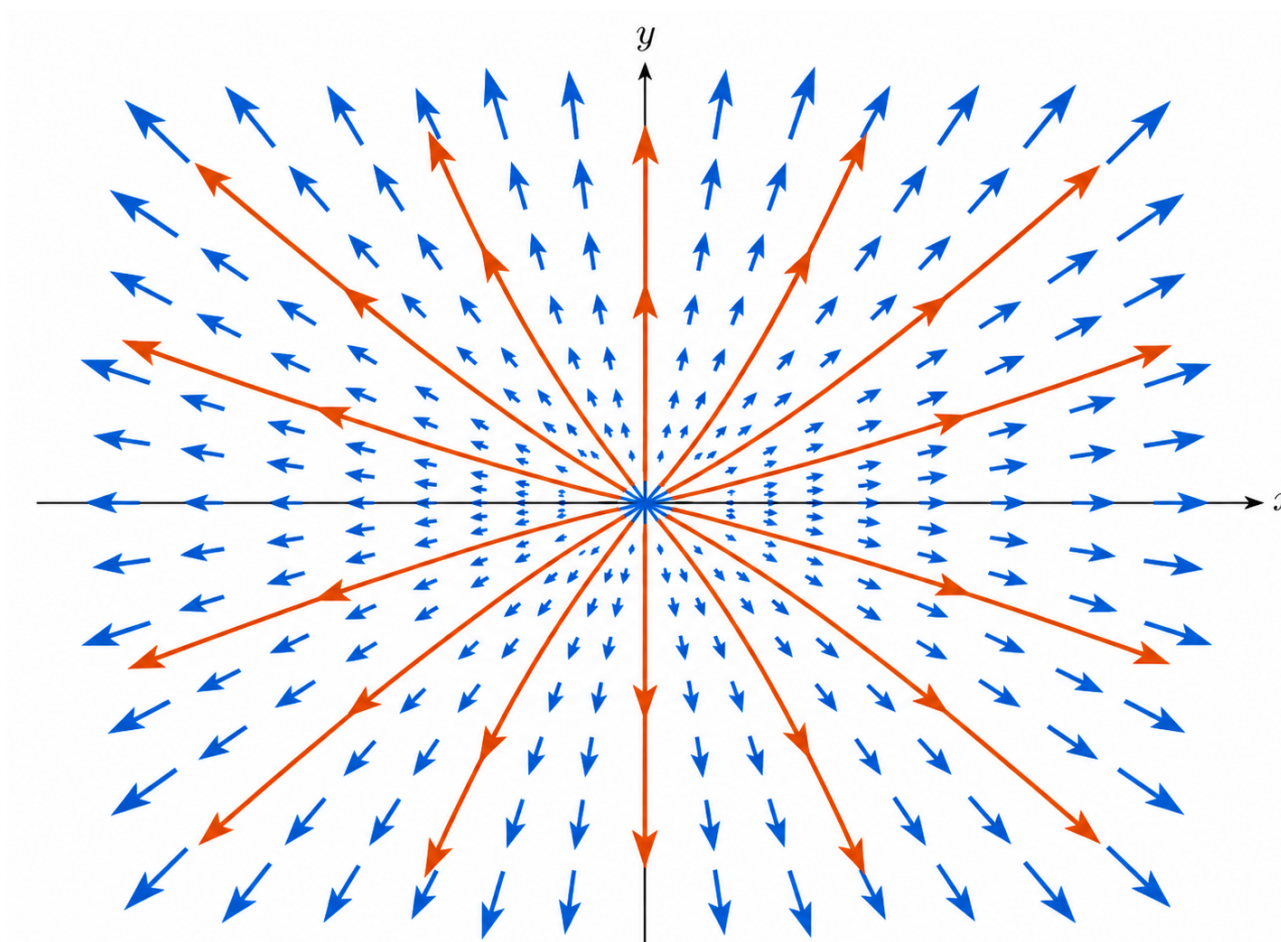
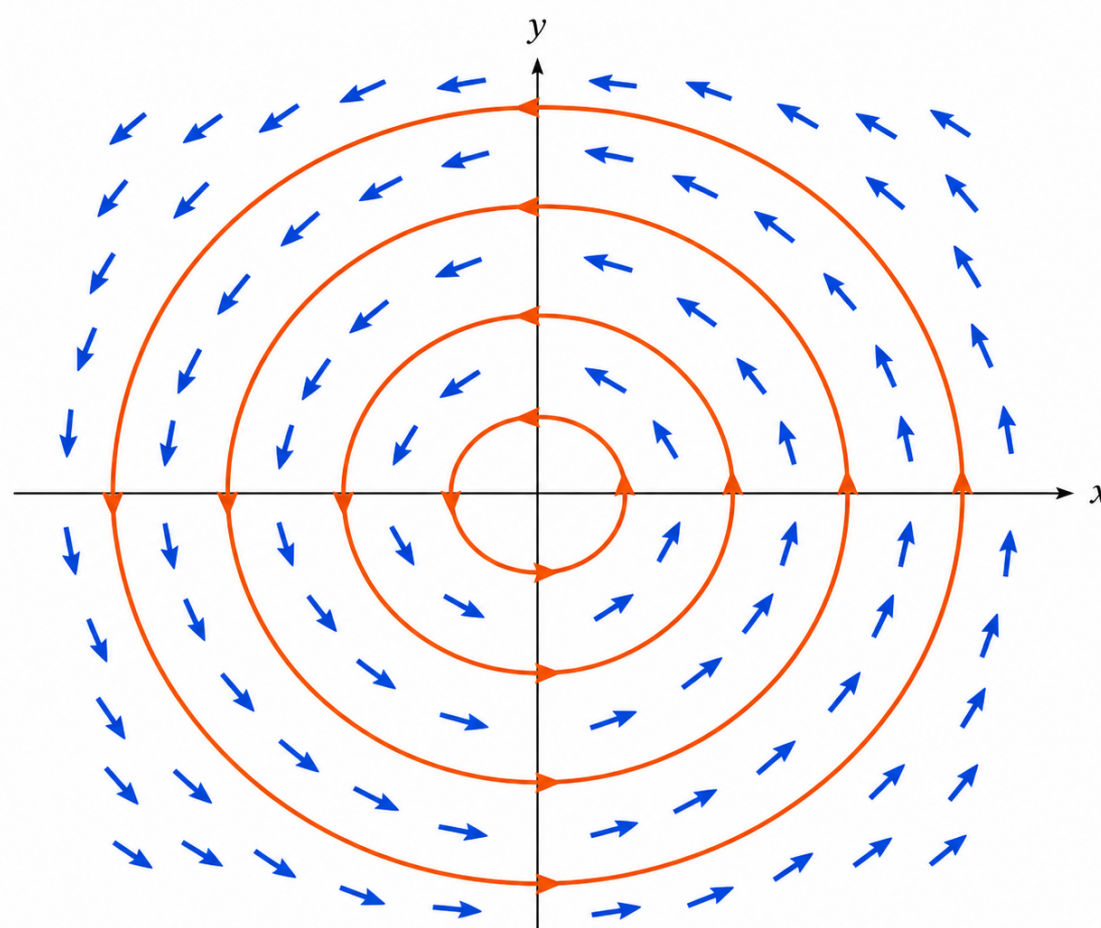
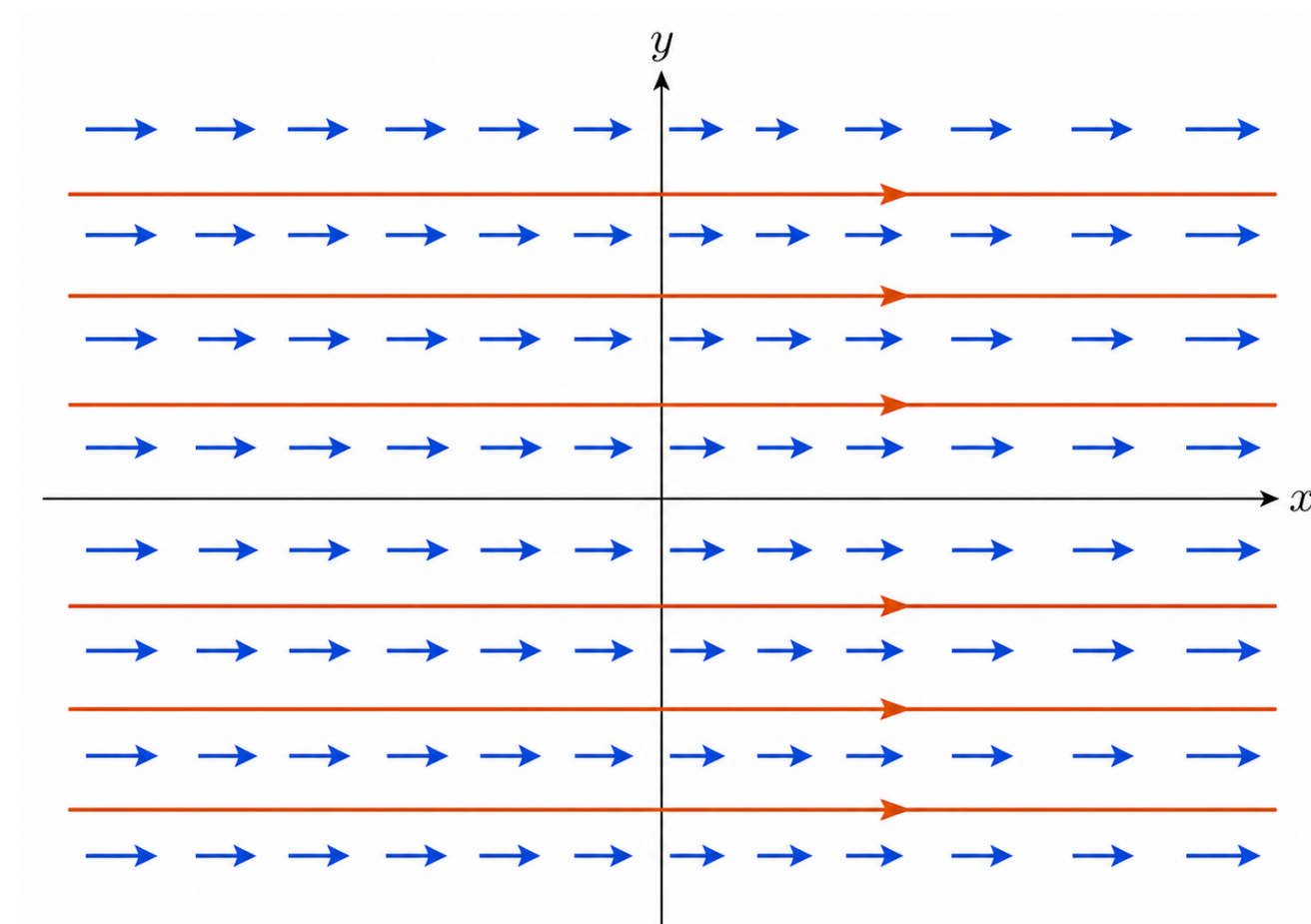
ベクトル場 A の中で、各点で A の向きに進む曲線を **流線** という。

すなわち、曲線 $r(t)$ が流線であるとは、

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{r}(t))$$

が成り立つことである。

流線は、ベクトル場の流れを視覚的に理解するために用いられる。



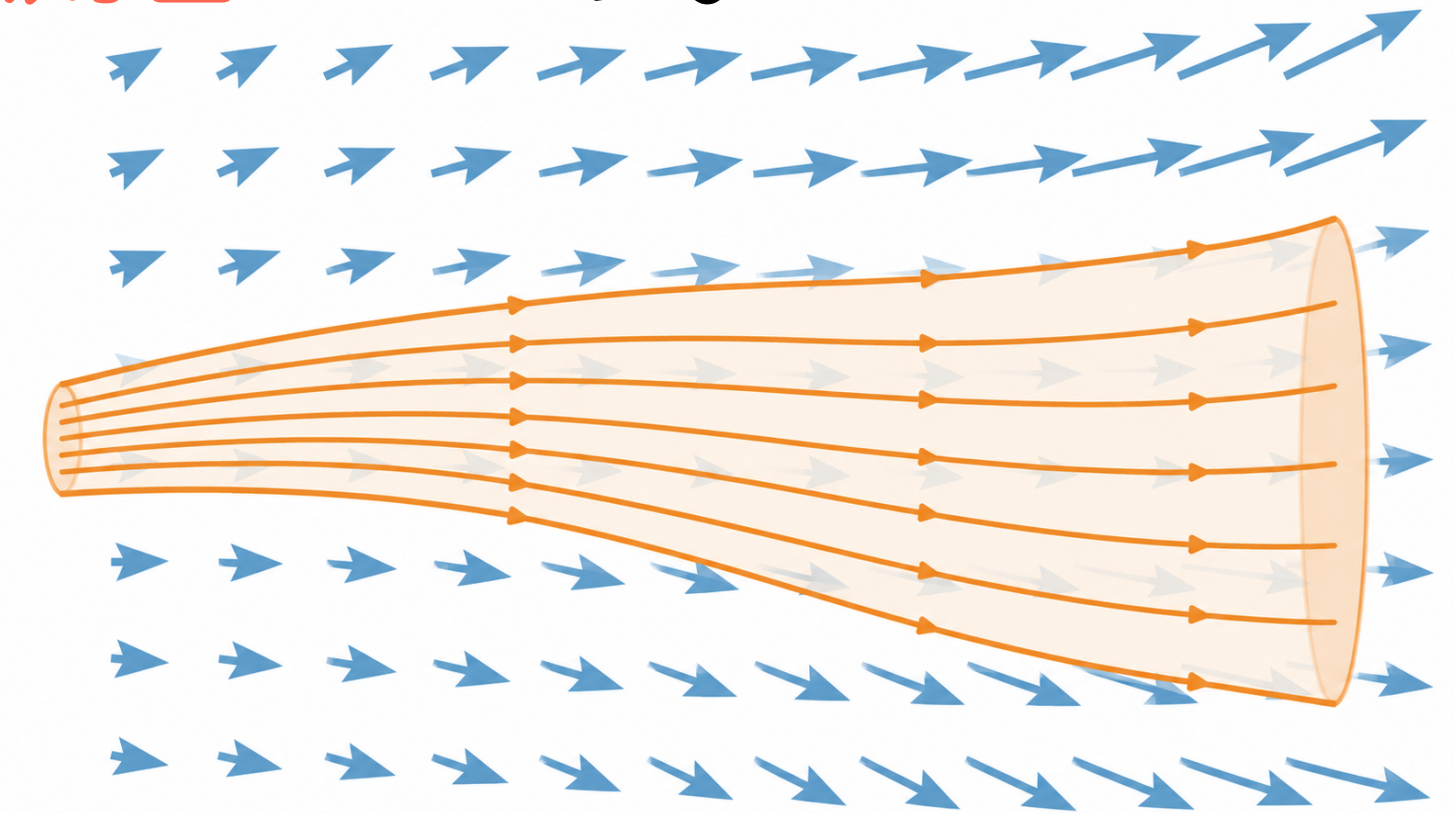
流管

ベクトル場 A の流線を束ねて作った管のような曲面を **流管** という。

流管の側面では、ベクトル場 A は側面に接している。

したがって、側面の外向き法単位ベクトル n に対して

$A \cdot n = 0$ となり、側面を横切る流束はない。



流管を通る流れは、 入口と出口の断面のみを通過して出入りする。

もし、 $\operatorname{div} A = 0$ すなわち A の発散が 0 ならば、ガウスの発散定理より

$$\iint_{\partial V} A \cdot dS = \iiint_V \operatorname{div} A \, dV = \iiint_V 0 \, dV = 0 \quad (\partial V = \text{断面 } S_1 \cup \text{断面 } S_2 \cup \text{側面})$$

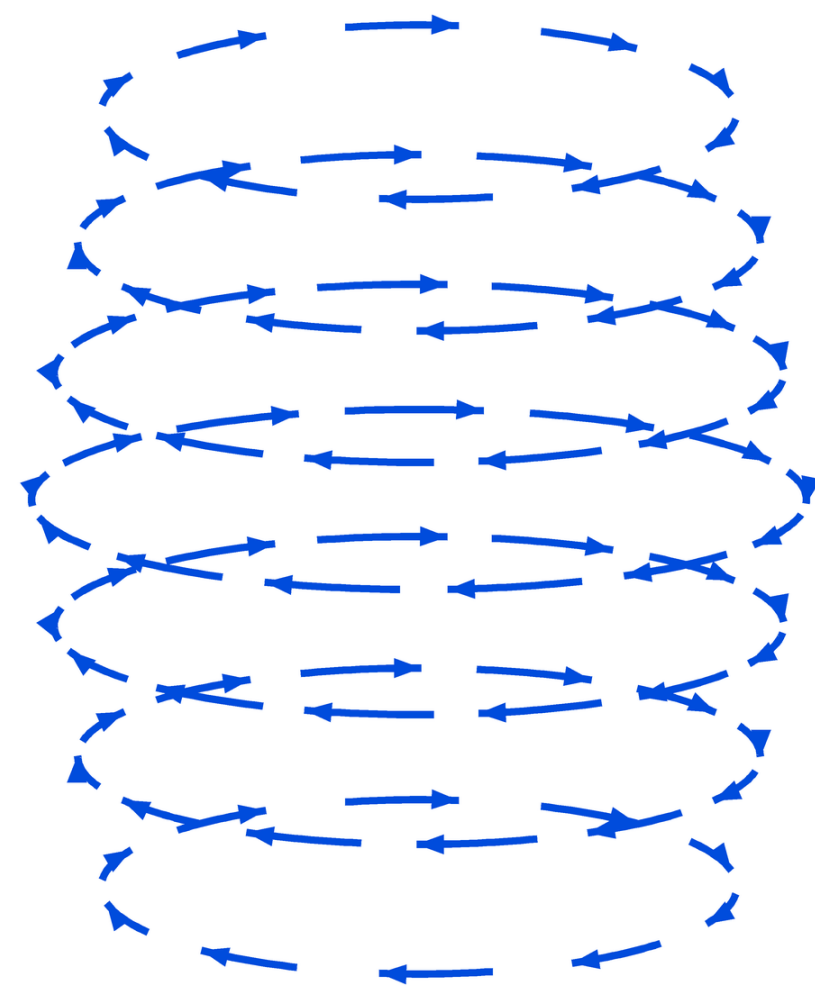
すなわち $\operatorname{div} A = 0$ の流管の一方の断面 S_1 から入る量と、もう一方の断面 S_2 から出る量は等しく、向きが反対となるため、互いに打ち消しあって 0 となる。

ベクトル場 A に対して、新たなベクトル場

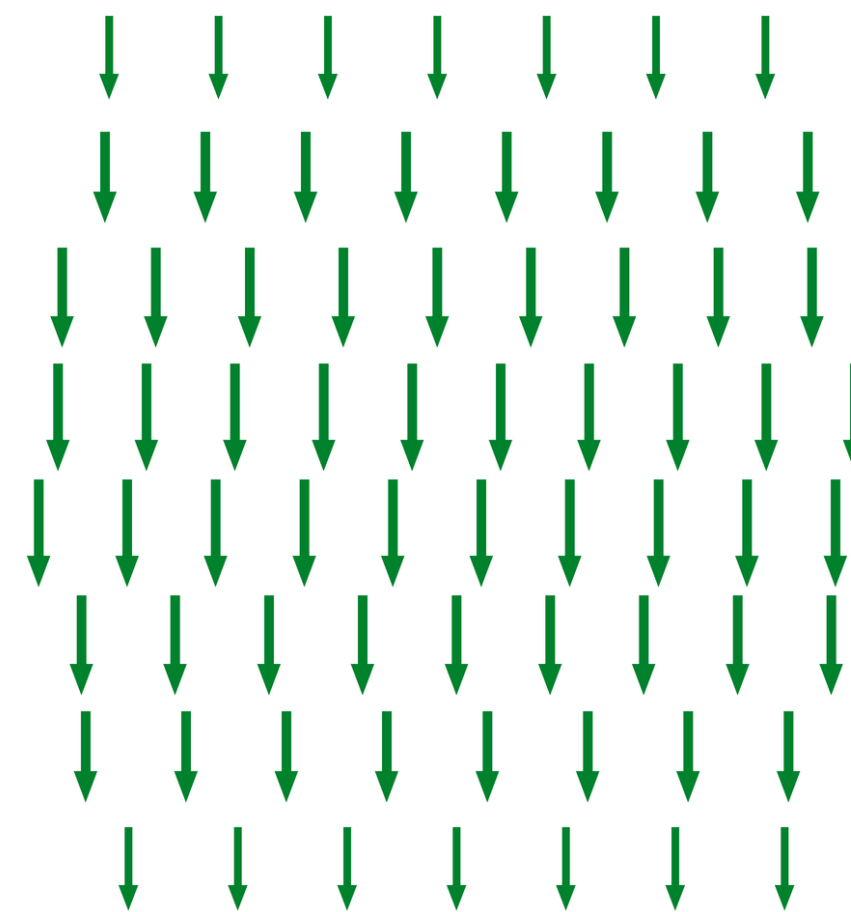
$$B = \text{rot } A$$

を考える。

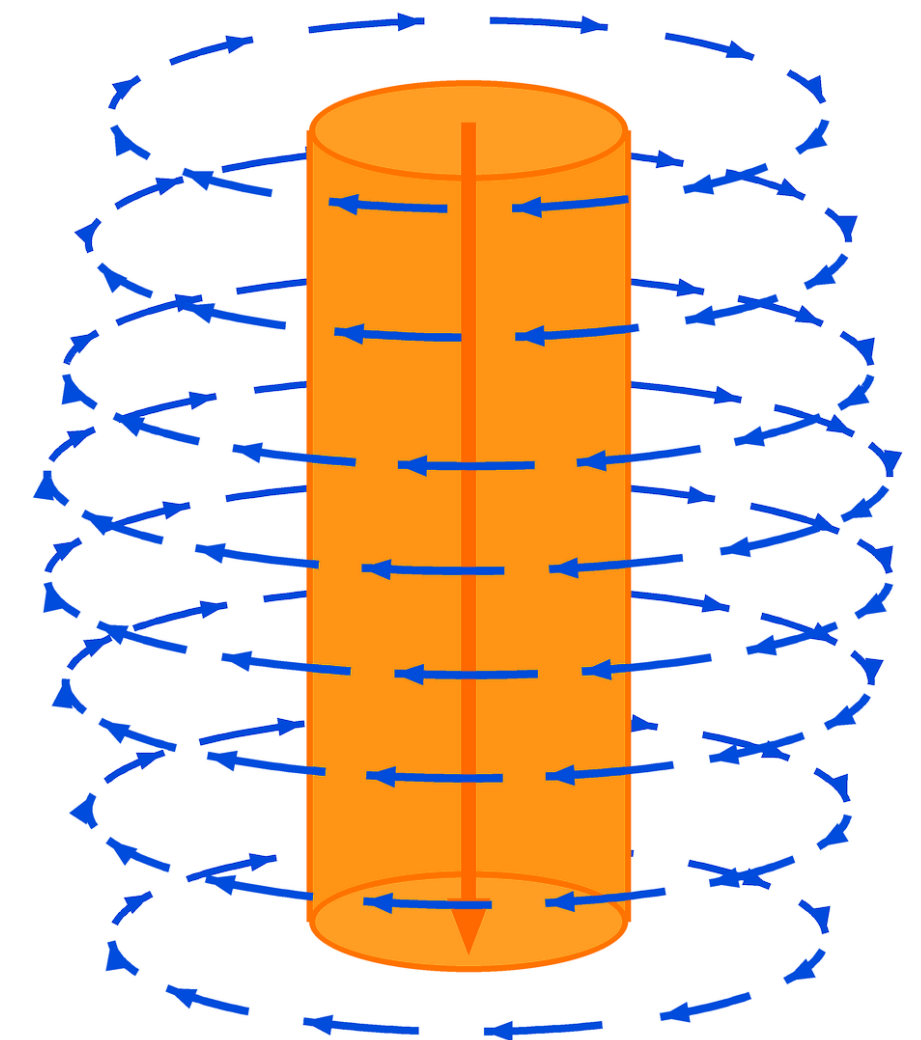
このベクトル場 B の流線を束ねてできる管を、 A の 渦管 という。



ベクトル場 A



ベクトル場 $B = \text{rot } A$



A の渦管

渦管とガウスの発散定理

ベクトル場 A を C^2 級とすると、一般に $\operatorname{div}(\operatorname{rot} A) = 0$ である。

したがって $B = \operatorname{rot} A$ については $\operatorname{div} B = 0$ となる。

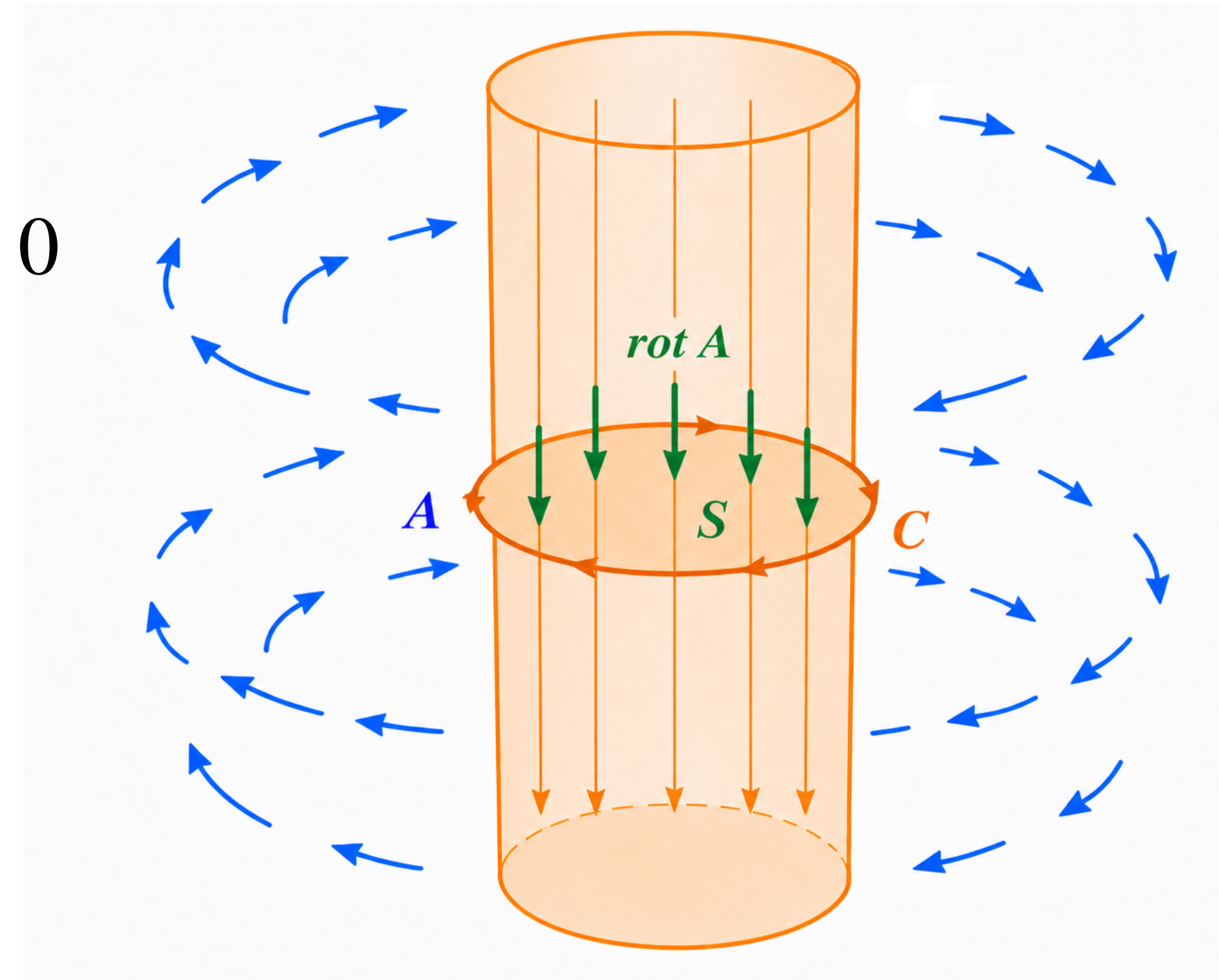
26ページの流管の議論により

$$\iint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{B} dV = \iiint_V 0 dV = 0$$

すなわち渦管の断面における流束の値はどの断面をとっても一定である。

$$\iint_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

ここで、 S_1 , S_2 は渦管を垂直に横切る断面で、同じ向きを持つとする。



渦管とストークスの定理

S_1, S_2 についてそれぞれストークスの定理を適用すれば、 $B = \text{rot } A$ より

$$\oint_{C_1} A \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_1} (\text{rot } A) \cdot d\mathbf{S} \quad , \quad \oint_{C_2} A \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} (\text{rot } A) \cdot d\mathbf{S}$$

ここで、 C_1, C_2 はそれぞれ S_1, S_2 の境界曲線とし、右手系に従うとする。

前ページよりこれら二式の右辺が等しいことから、つぎの等式を得る。

$$\oint_{C_1} A \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_2} A \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{同じ渦管の各断面の境界に沿う循環は一定})$$

すなわち、 $B = \text{rot } A$ とすると $\text{div } B = 0$ となり、

ガウスの発散定理とストークスの定理が連携して、渦管に沿って

回転ベクトルの流束が一定となり、各断面の境界に沿う循環も同じ値となる。