

12 回目講義ノート補足資料

ガウスの発散定理の計算例 (1) ~ (4) (12 回目講義ノート 17-20 ページ) について

ガウスの発散定理の計算例 (1) ~ (4) では、つぎの計算をした。

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (x, y, 2z), \quad V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

$$\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV$$

この補足資料では、左辺

$$\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

について、ベクトル面積分の定義に基づき、6 つの面をそれぞれ媒介変数表示して計算する。

法線ベクトル $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ が各面の外向きを向くように、 u, v の取り方を決めることに注意する。

ベクトル面積分の定義に基づいた公式

曲面 S が u, v による媒介変数によって、つぎのように表されているとする。

$$S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

ベクトル面積分はつぎで求まるのであった。

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv$$

ただし、 S が閉曲面の場合には、 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ の向きが外向きになるようにとる。

以下では、すべて $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ とする。

$x = 0, y = 0, z = 0$ の面について

$x = 0, y = 0, z = 0$ の面については、ベクトル面積分の値はいずれも 0 となる。

1. 面 $S_{x=0}$

$$\mathbf{r}(u, v) = (0, v, u), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (0, 0, 1), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 1, 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-1, 0, 0), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) = (0, v, 2u)$$

したがって

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = (0, v, 2u) \cdot (-1, 0, 0) = 0.$$

よって

$$\iint_{S_{x=0}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

2. 面 $S_{y=0}$

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, 0, v), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (1, 0, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 0, 1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, -1, 0), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) = (u, 0, 2v)$$

したがって

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = (u, 0, 2v) \cdot (0, -1, 0) = 0.$$

よって

$$\iint_{S_{y=0}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

3. 面 $S_{z=0}$

$$\mathbf{r}(u, v) = (v, u, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (0, 1, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (1, 0, 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 0, -1), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) = (v, u, 0)$$

したがって

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = (v, u, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0.$$

よって

$$\iint_{S_{z=0}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

それぞれ計算する。

4. 面 $S_{x=1}$

$$\mathbf{r}(u, v) = (1, u, v), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (0, 1, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 0, 1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) = (1, u, 2v)$$

したがって

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = 1.$$

よって

$$\iint_{S_{x=1}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 1 \, dv \, du = 1.$$

5. 面 $S_{y=1}$

$$\mathbf{r}(u, v) = (v, 1, u), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (0, 0, 1), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (1, 0, 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) = (v, 1, 2u)$$

したがって

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = 1.$$

よって

$$\iint_{S_{y=1}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 1 \, dv \, du = 1.$$

6. 面 $S_{z=1}$

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 1), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (1, 0, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 1, 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 0, 1), \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) = (u, v, 2)$$

したがって

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = 2.$$

よって

$$\iint_{S_{z=1}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 2 \, dv \, du = 2.$$

以上より、6つの面におけるベクトル面積分の値を足し合わせて、つぎを得る。

$$\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 2 = 4.$$