

ベクトル解析

12回目講義

畠中 英里

本日の講義の流れ

- 前回の復習
- 本日の講義内容
 - ・ ガウスの発散定理
 - ・ ガウスの発散定理の意味（左辺・右辺）
 - ・ ガウスの発散定理が成り立つ理由
 - ・ ガウスの発散定理の計算例
 - ・ ガウスの発散定理の応用

前回の復習（１）

○ グリーンの定理（回転型）

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

「境界に沿う循環」（左辺）＝「内部の局所的な回転の総和」（右辺）

○ グリーンの定理（発散型）

$$\oint_C (P dy - Q dx) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

「境界を通過して外へ出る量（流束）」（左辺）＝「内部での湧き出しの総和」（右辺）

前回の復習 (2)

○ グリーンの定理 (回転型) の左辺

平面ベクトル場 $A(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ に対して

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \oint_C A \cdot dr$$

これは A を曲線 C の接線方向成分を積み上げた量である。

○ グリーンの定理 (発散型) の左辺

C を正の向きに進むときの外向き法線方向の微小ベクトルは $(dy, -dx)$ で

$$\oint_C (P dy - Q dx) = \oint_C A \cdot n ds$$

これは A が曲線 C を横切る流れ、すなわち流束である。

前回の復習（3）

線積分 $\oint_C \left(M(x, y) dx + N(x, y) dy \right)$ が与えられた場合、

回転型のグリーンの定理で $P = M$, $Q = N$ と見れば

$$\oint_C (M dx + N dy) = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

発散型のグリーンの定理で $P = N$, $Q = -M$ と見れば、同じく

$$\oint_C (M dx + N dy) = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

を得る。したがって、同じ線積分でも回転型・発散型のどちらのグリーンの定理も適用できる。問題文に指示があれば、その通りに計算すること。

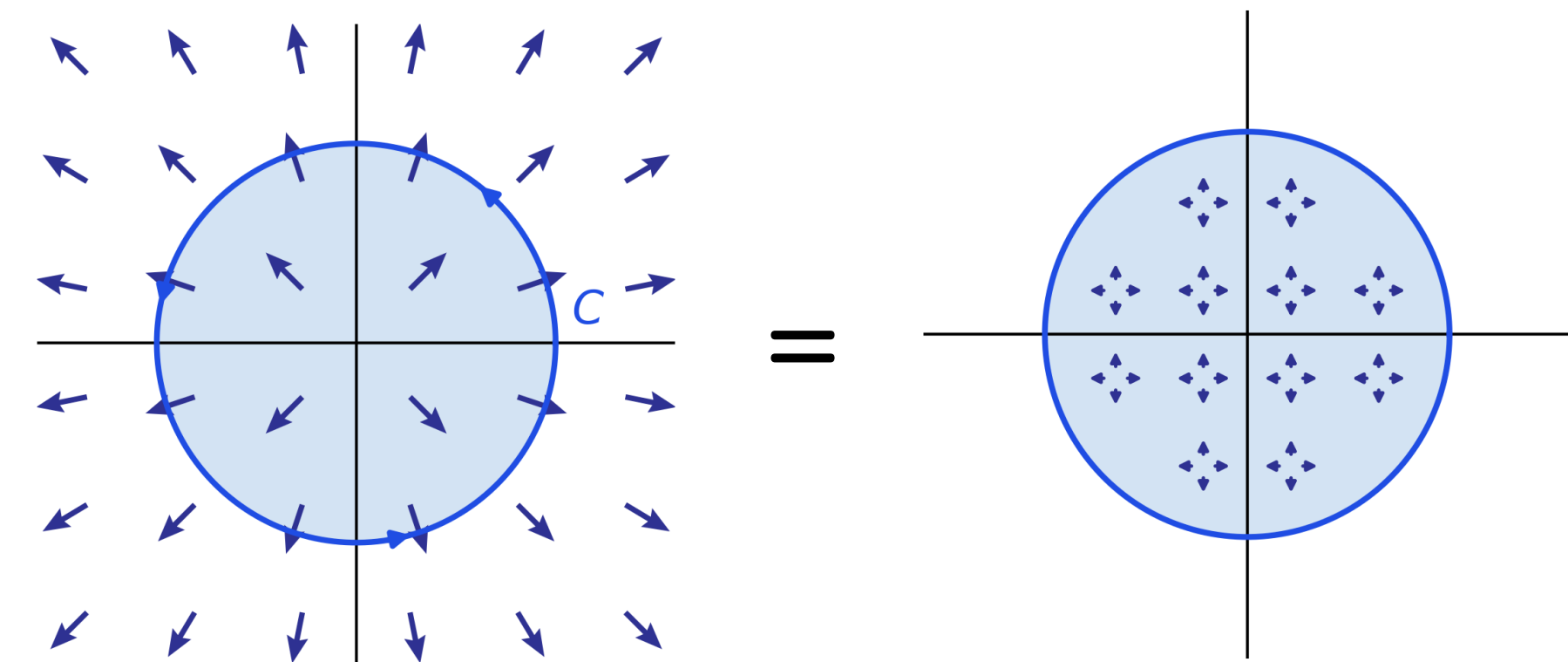
前回の復習（４）

発散型のグリーンの定理は、平面領域 D を考えたとき

「境界を通過して外へ出る量（流束）」＝「内部での湧き出しの総和」

であった。

ガウスの発散定理はこれの 3 次元版であり、面積分と体積分を結びつける。



曲面 S のベクトル面積分は $\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ であり、

閉曲面 ∂V では通常外向きの法線ベクトルを取ること、

発散は $\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ であることを思い出しておこう。

本日の講義

ガウスの発散定理

ガウスの発散定理

V を区分的に滑らかな境界 ∂V を持つ有界な立体領域とし、
 A を、 V とその境界を含む領域上で C^1 級のベクトル場とする。

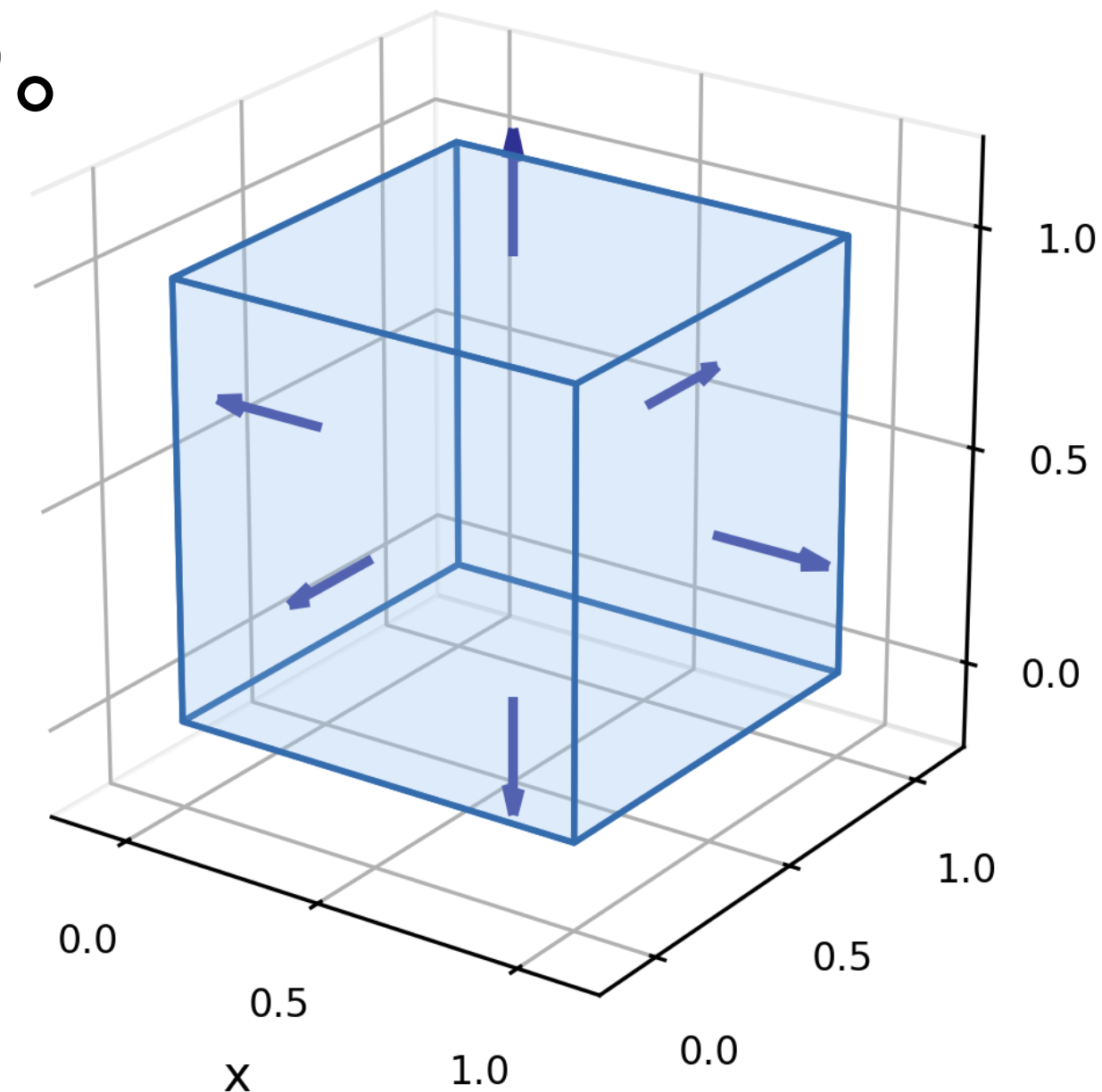
V の境界 ∂V を外向き法線で向きづけると、つぎが成り立つ。

$$\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV$$

これを **ガウスの発散定理** という。

左辺は境界を通過して外へ出る量（＝流束）を表し、

右辺は領域内部での局所的な湧き出し（＝発散）の総和を表す。



ガウスの発散定理（左辺の意味）

左辺 $\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ は、

閉曲面 ∂V 上の各点で、ベクトル場 $\mathbf{A}$ の外向き法線方向成分をとり、それを面積にわたって足し合わせた量である。

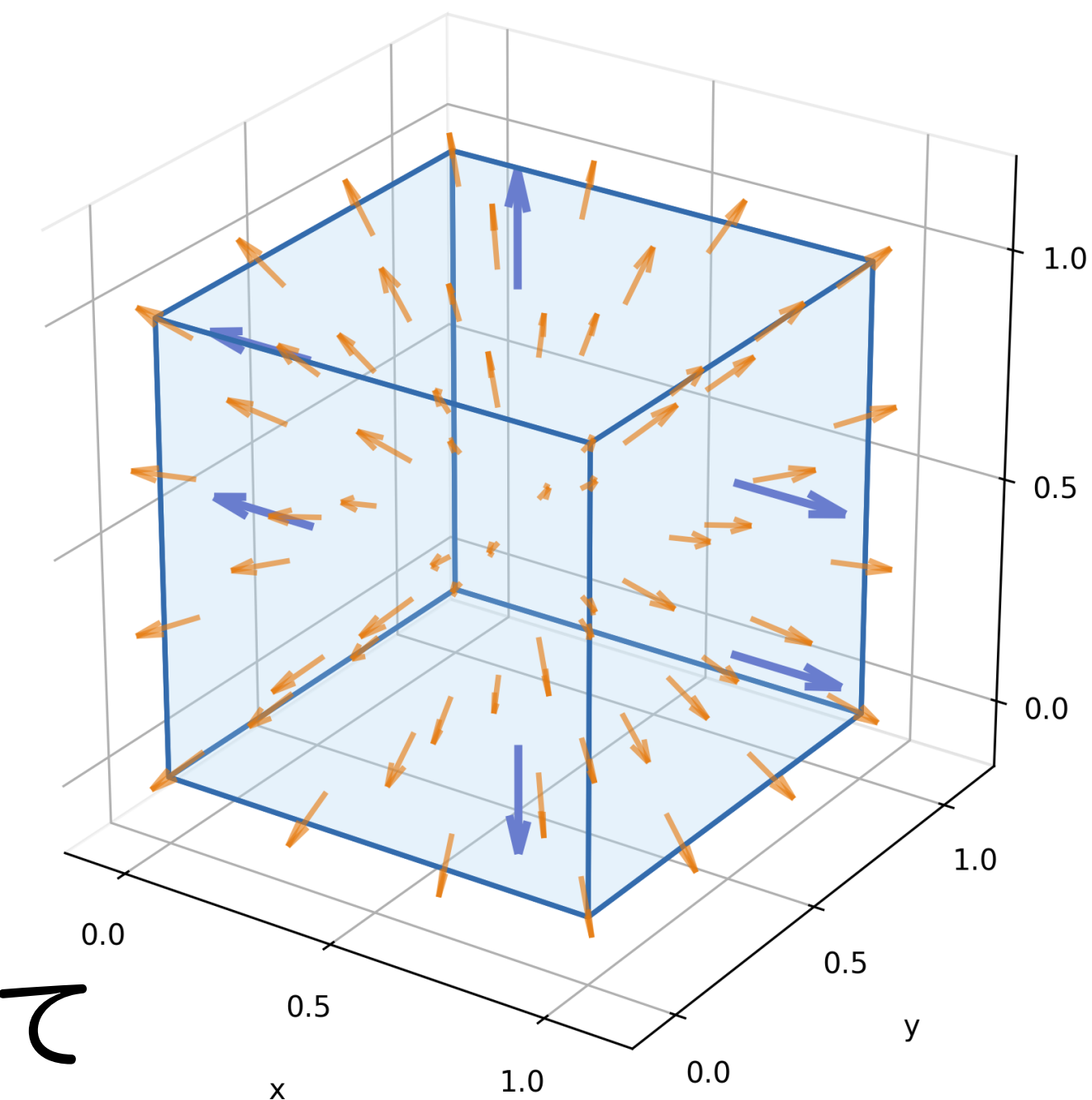
各点で $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ が正なら外へ流れ出している。

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ が負なら、内へ流れ込んでいる。

接線方向しか持たなければ、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$ である。

したがって、左辺 $\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ は立体 V の境界 ∂V を通って

ベクトル場がどれだけ外へ出るかを表している。

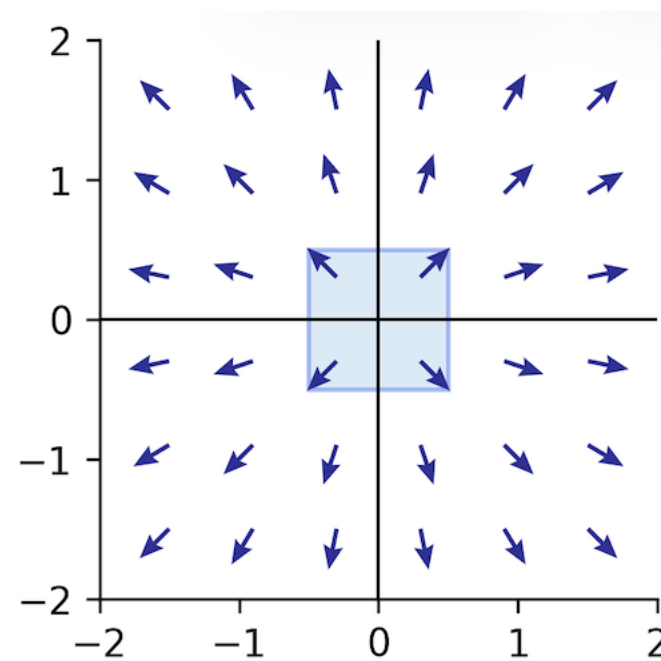


ガウスの発散定理（右辺の意味）

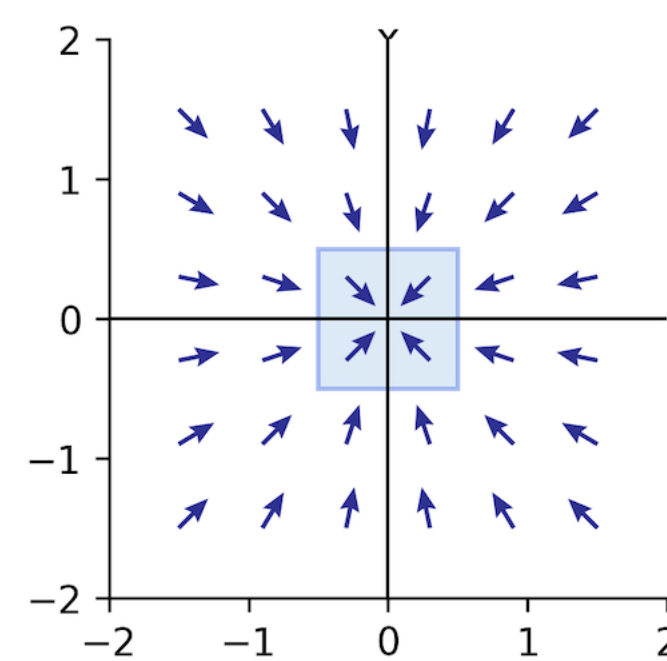
右辺 $\iiint_V \operatorname{div} A \, dV$ は、立体 V 内の各点での発散を体積にわたって足し合わせた量である。

点 P での発散 $\operatorname{div} A(P)$ は、 P のまわりでベクトル場がどれだけ外へ湧き出しているかを表すのであった。

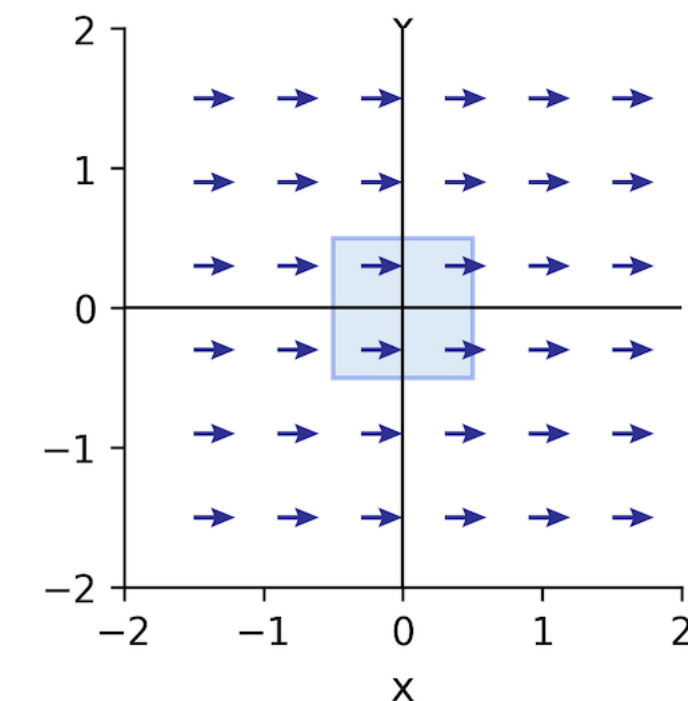
$\operatorname{div} A(P)$ の値が正ならば湧き出し、負ならば吸い込み、0 ならば局所的には出入りがつり合っている。



$$\operatorname{div} A(P) > 0$$



$$\operatorname{div} A(P) < 0$$

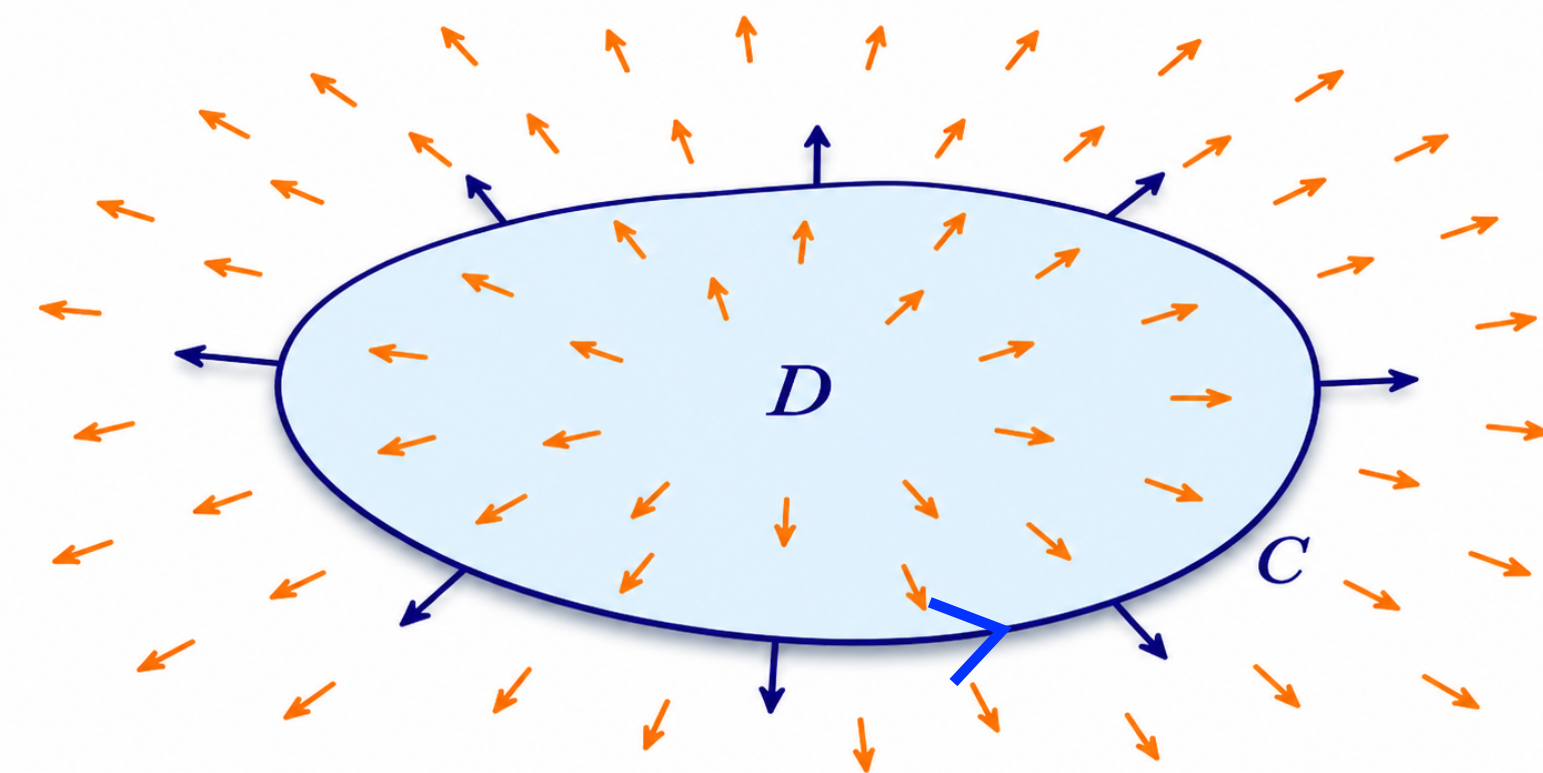


$$\operatorname{div} A(P) = 0$$

グリーンの定理（発散型） との関係

グリーンの定理（発散型）

$$\oint_C (P dy - Q dx) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$



左辺は $\oint_C (P dy - Q dx) = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds$ （流束）、

右辺については平面ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ を

3次元ベクトル場 $(P(x, y), Q(x, y), 0)$ とみなしたときの

発散 $\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + 0 = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ となるのであった。

グリーンの定理（発散型）は、ガウスの発散定理の2次元版とみなせる。

ガウスの発散定理が成り立つ理由 (1)

12

ベクトル場 $\mathbf{A}(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z)$ における小さな直方体

$V : x \leq X \leq x + \Delta x, y \leq Y \leq y + \Delta y, z \leq Z \leq z + \Delta z$

を考える。

まず、 x 軸方向成分 A_x に注目すると、

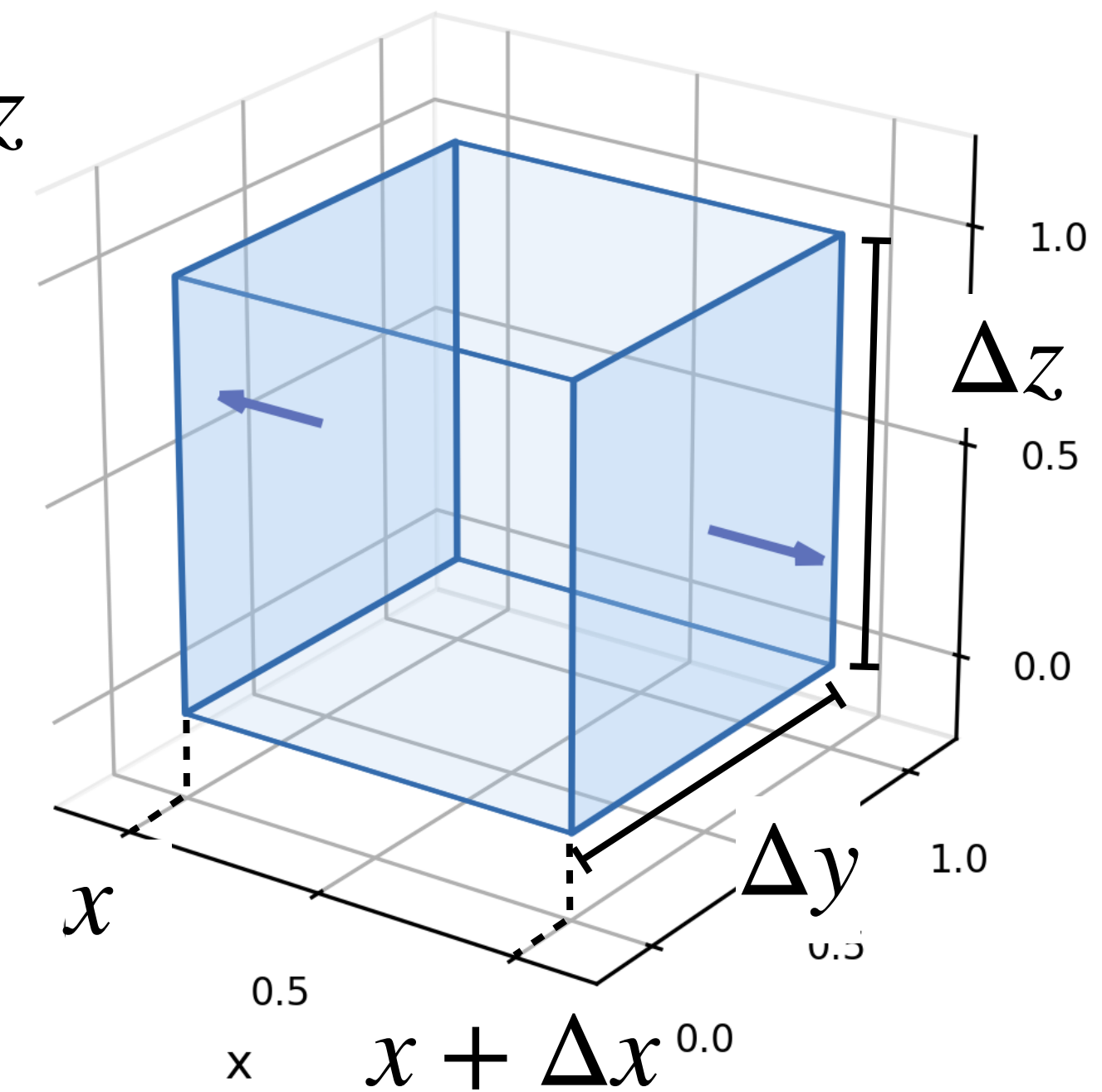
右側の面から出る流束 $\approx A_x(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z$

と近似できる。一方、

左側の面から出る流束 $\approx -A_x(x, y, z) \Delta y \Delta z$

と近似される。 A_x は x 軸正の向きを基準とするのに対し、

左側の面は法線ベクトルが負の向きとなるため「-」の符号がつく。



ガウスの発散定理が成り立つ理由 (2)

13

よって、 x 軸方向成分による総流束は、つぎのように近似される。

$$x \text{ 軸方向成分による総流束} \approx \left\{ A_x(x + \Delta x, y, z) - A_x(x, y, z) \right\} \Delta y \Delta z$$

$$\approx \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Delta V \quad (\Delta V \text{ は小直方体の体積とする})$$

同様に、 y 軸方向と z 軸方向の成分による総流束は、それぞれ

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} \Delta V, \quad \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta V$$

で近似される。小直方体全体で足し合わせると、つぎを得る。

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V = (\operatorname{div} \mathbf{A}) \Delta V$$

ガウスの発散定理が成り立つ理由 (3)

14

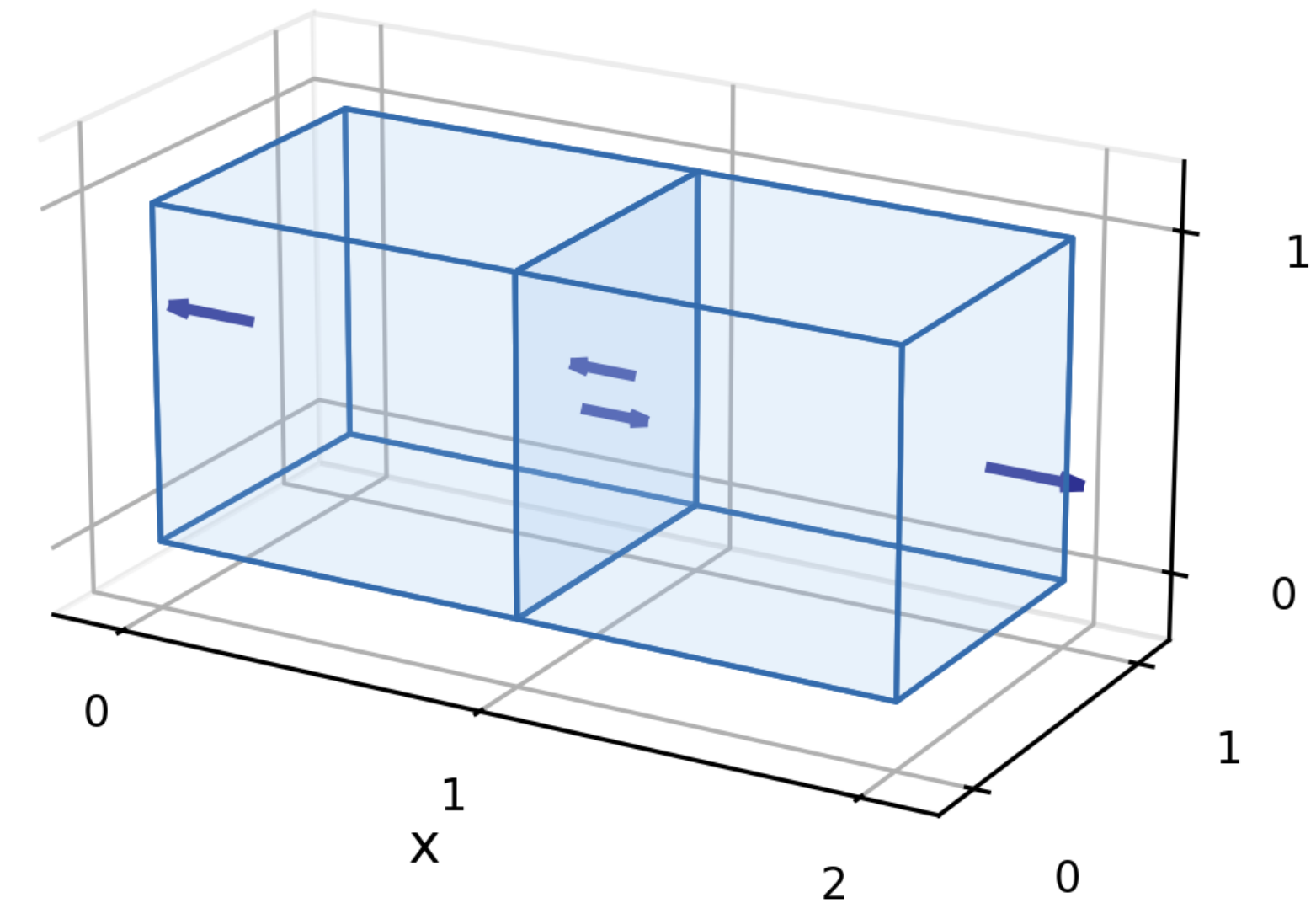
立体を、多数の小直方体に分割すると、
内部の面を通る流束は、隣り合う小直方体どうしで
符号が反対になるため、互いに打ち消し合う。

したがって最後に残るのは、立体全体の外側の
境界を通る流束だけである。

そこで、分割をどんどん細かくして極限をとると、

立体の境界を通る流束 = 立体の内部での発散の総和

が成り立ち、ガウスの発散定理が得られる。



ガウスの発散定理の性質（１）

ベクトル場 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ と定数 a , b に対してつぎが成り立つ（線形性）。

$$\iint_{\partial V} (a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = a \iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + b \iint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = a \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{A} dV + b \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{B} dV$$

また、曲面の向き（法線ベクトルの向き）を逆にすると、一般にベクトル面積分の値は符号が反転するのであった。

したがって、閉曲面のベクトル面積分の場合には、

外向きに法線ベクトルをとる、とあらかじめ定めることに注意する。

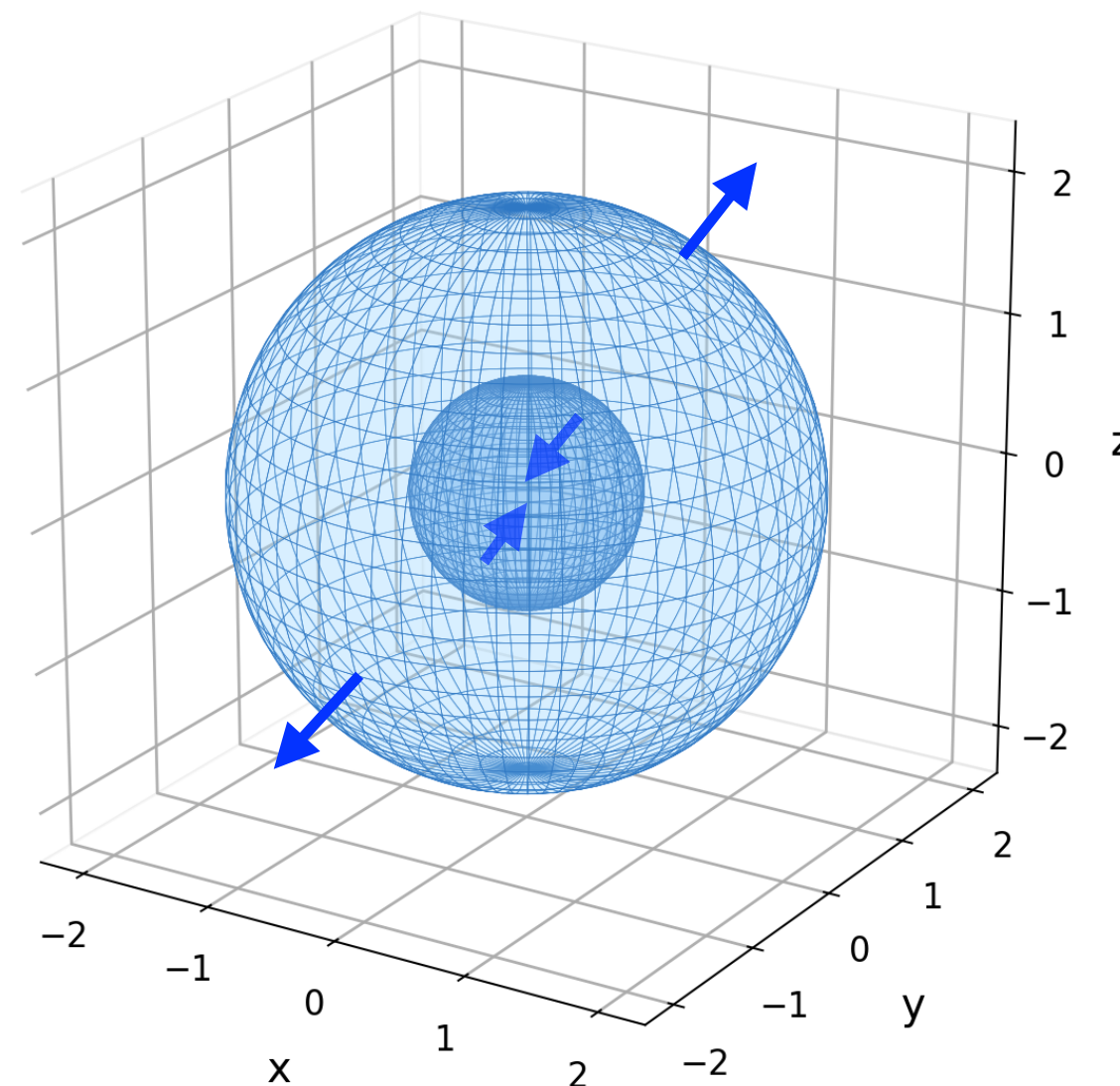
さらに、ガウスの発散定理は立体 V の境界となる閉曲面に対してのみ適用できることに注意しておく。（境界のある曲面に対しては適用できない。）

ガウスの発散定理の性質 (2)

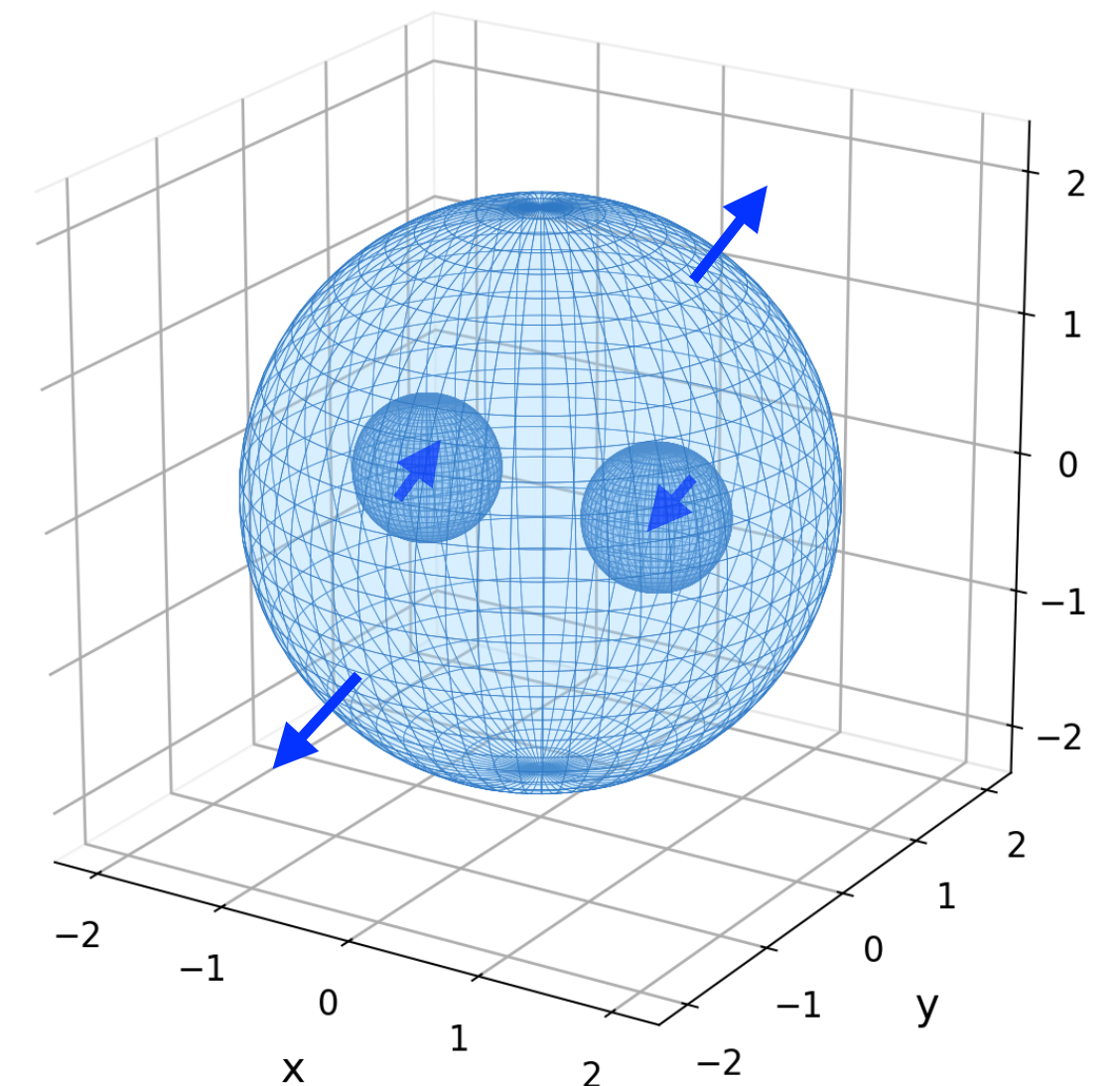
立体 V の境界 ∂V が n 個の閉曲面 $S_1, S_2, \dots, S_n$ からなる場合、ガウスの発散定理はつぎのように成り立つ。

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \dots + \iint_{S_n} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV$$

閉曲面 $S_1, S_2, \dots, S_n$ にはそれぞれ、 V に対して外向きとなるよう向きづける。



$n = 2$ の例



$n = 3$ の例

ガウスの発散定理の計算例（１）

ベクトル場を $A(x, y, z) = (x, y, 2z)$ とし、

立体領域を $V = \{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \}$ とする。

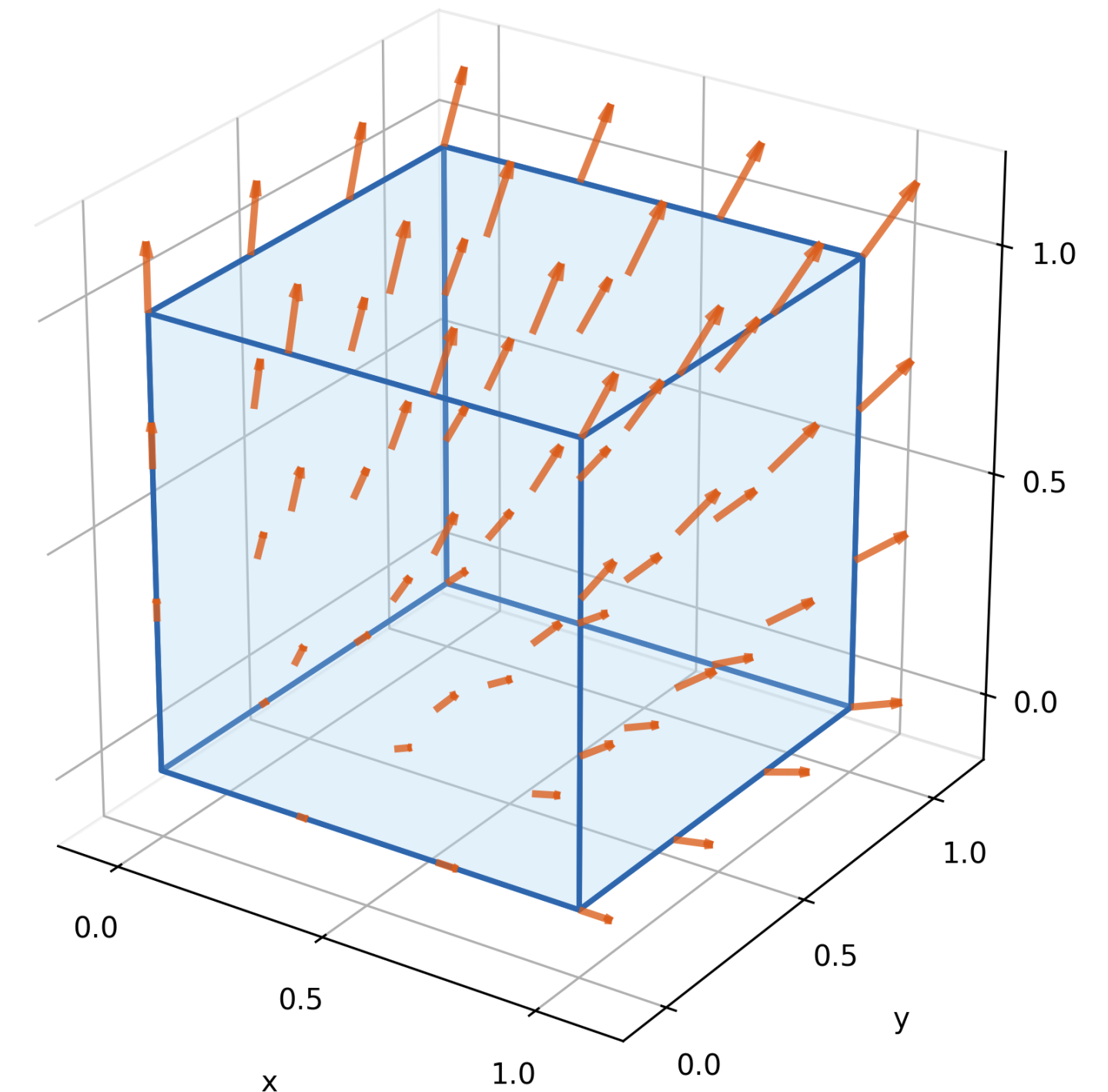
ガウスの発散定理が成り立つことを確認しよう。

$$\iint_{\partial V} A \cdot dS = \iiint_V \operatorname{div} A \, dV$$

まずは左辺 $\iint_{\partial V} A \cdot dS = \iint_{\partial V} A \cdot \boldsymbol{n} \, dS$ （流束）

の値を求める。

立方体 V の境界 ∂V を 6 つの面に分け、
各面について計算する。



ガウスの発散定理の計算例（2）

まず、 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ の 3 面では流束が 0 となる。

例えば $x = 0$ の面では、外向き法線ベクトルは

$$\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$$

$x = 0$ の面上では、ベクトル場は

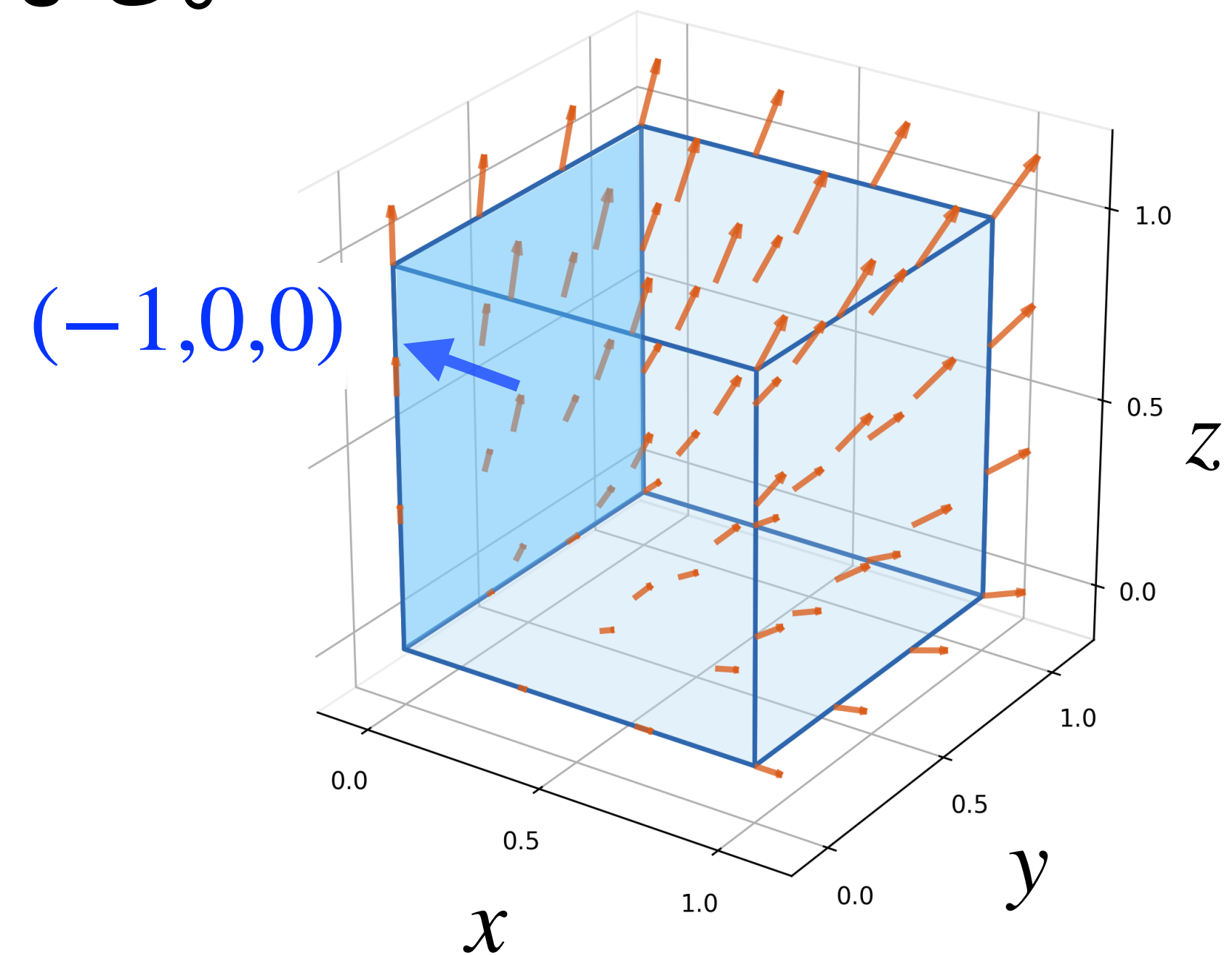
$$\mathbf{A} = (0, y, 2z)$$

であるから、

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (0, y, 2z) \cdot (-1, 0, 0) = 0$$

同様に $y = 0$ の面では $\mathbf{n} = (0, -1, 0)$, $z = 0$ の面では $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$

となり、いずれも $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0$ となる。



ガウスの発散定理の計算例 (3)

つぎに、 $x = 1$ の面では外向き法線ベクトルは

$$\mathbf{n} = (1, 0, 0)$$

であるから、

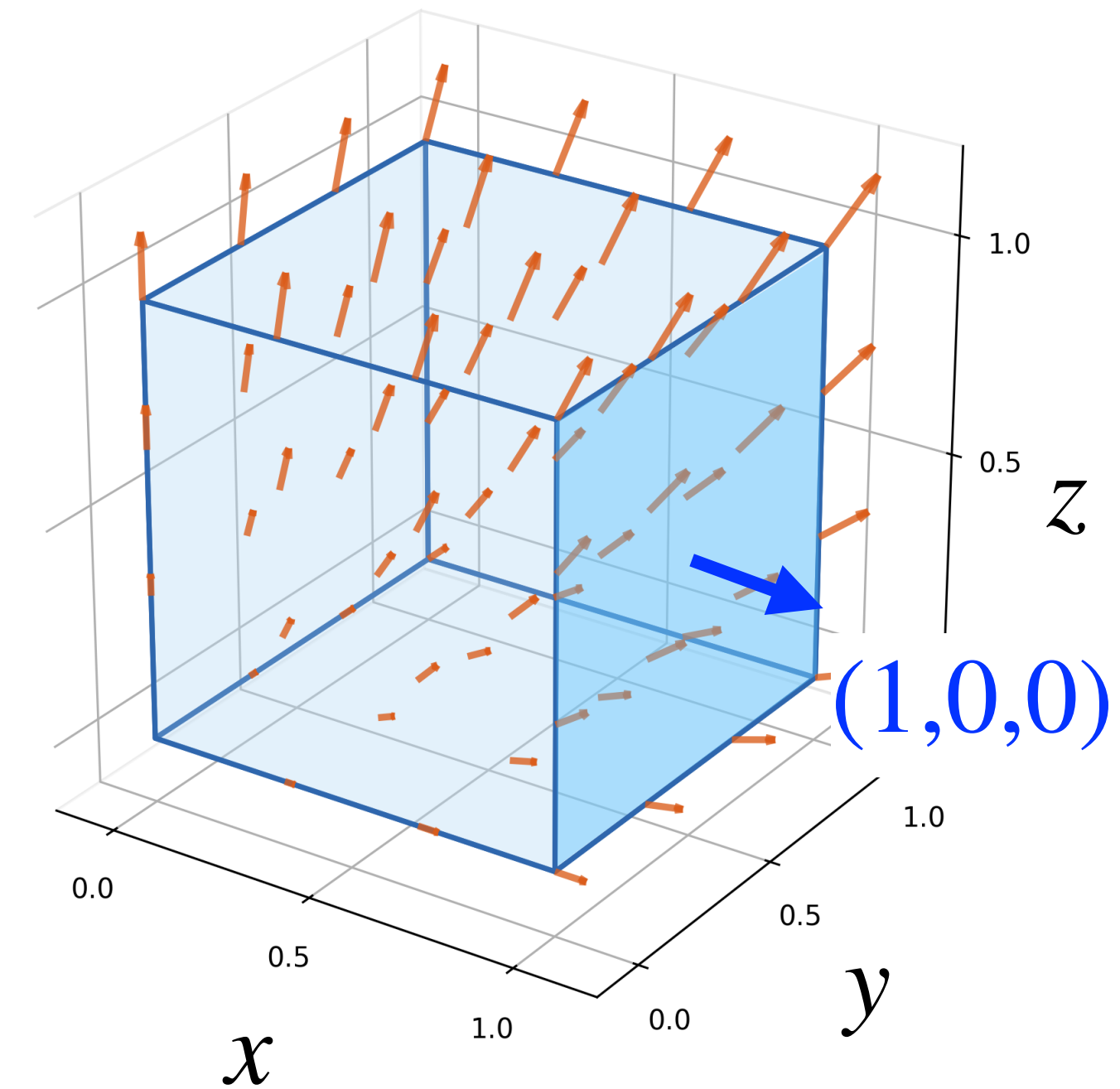
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (1, y, 2z) \cdot (1, 0, 0) = 1$, y, z を媒介変数とみて

$$\iint_{x=1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{x=1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^1 \int_0^1 1 dy dz = 1$$

同様に、 $y = 1$ の面でも $\iint_{y=1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 1$ となる。

$z = 1$ の面では $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 2$ より、 $\iint_{z=1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 2 dx dy = 2$ となる。

以上より、左辺全体は $0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 2 = 4$ となる。



ガウスの発散定理の計算例（４）

右辺 $\iiint_V \operatorname{div} A \, dV$ について求めよう。

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial (2z)}{\partial z} = 1 + 1 + 2 = 4$$

となるので、

$$\iiint_V \operatorname{div} A \, dV = \iiint_V 4 \, dV = 4 \iiint_V dV = 4 \quad (V \text{ の体積は } 1)$$

以上より、この例で左辺と右辺がともに 4 となり、
ガウスの発散定理の両辺が一致した。

$$\iint_{\partial V} A \cdot dS = \iiint_V \operatorname{div} A \, dV$$

境界成分が複数個からなる計算例 (1)

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\}$$

とすると、 V は半径 2 の球から半径 1 の球をくり抜いた領域。

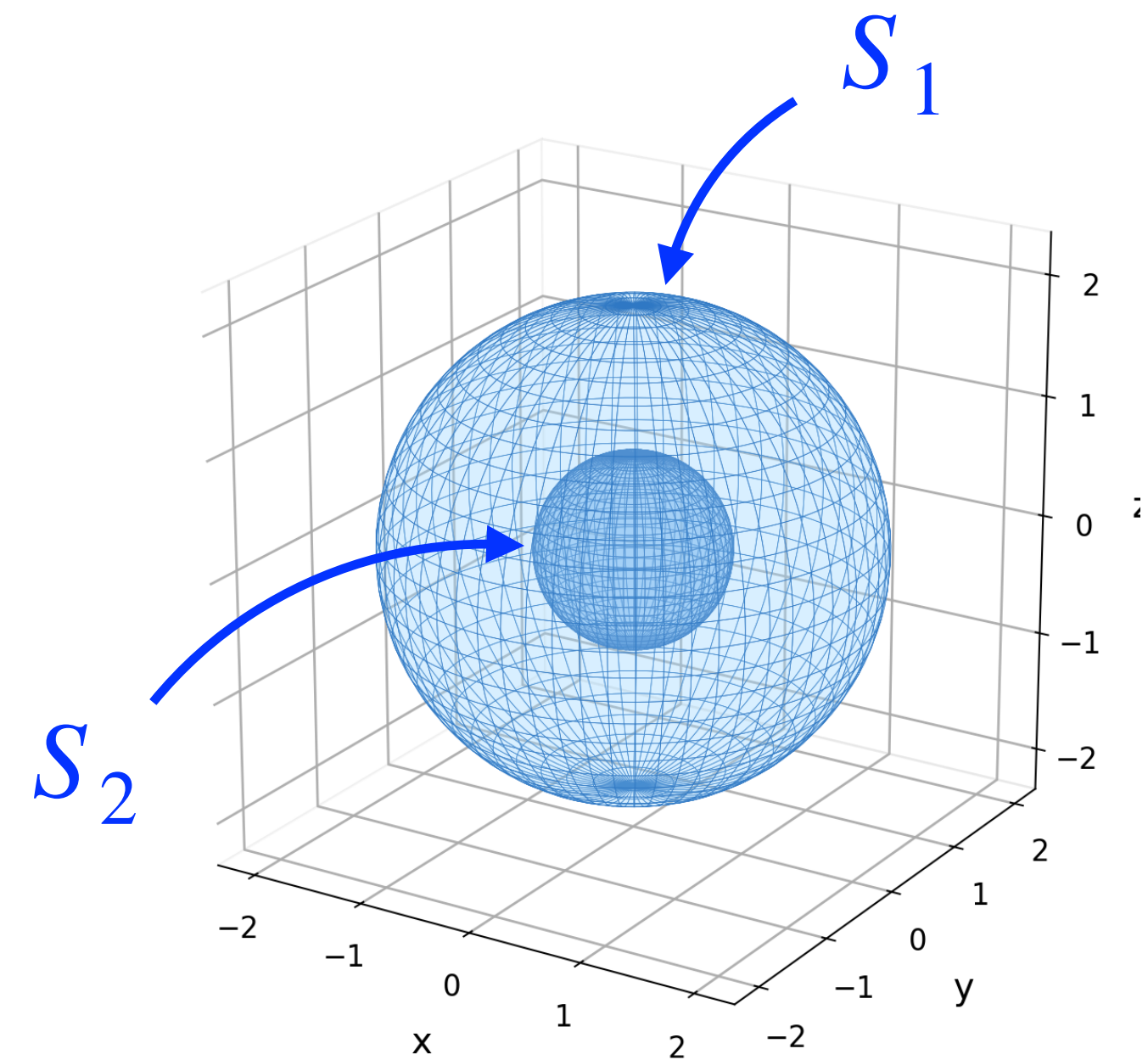
境界 ∂V はつぎのふたつの球面 S_1, S_2 からなる。

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$$

$$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

ベクトル場を $A(x, y, z) = (x, y, z)$ とし、
ガウスの発散定理が成り立つことを確認しよう。

$$\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV$$



境界成分が複数個からなる計算例 (2)

左辺についてはつぎが成り立つ。

$$\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

法線ベクトルは V に対して外向きにとることに注意する。

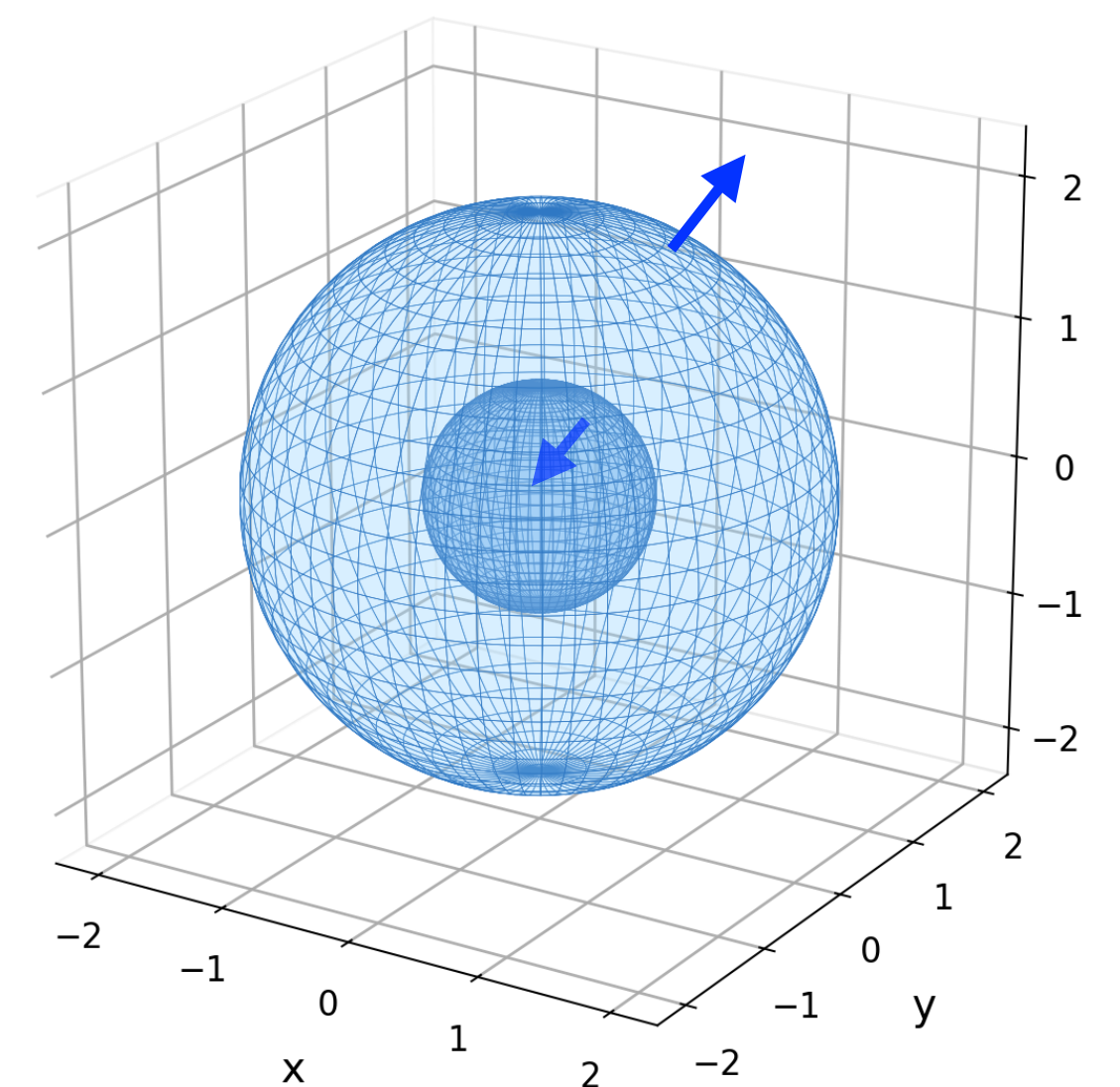
方程式 $F(x, y, z) = 0$ によって曲面が与えられるとき、

$\nabla F \neq \mathbf{0}$ であれば ∇F は法線ベクトルの一つである。

領域 V に対して外向きかどうかは、確認して外向きベクトルを選ぶ必要がある。

$$S_1 \text{ については } \nabla F = (2x, 2y, 2z), \quad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{外向きの法単位ベクトルは } \mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{1}{2}(x, y, z) \text{ と求まる。}$$



境界成分が複数個からなる計算例 (3)

23

したがって、 S_1 上では

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (x, y, z) \cdot \frac{1}{2} (x, y, z) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$$\iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = 2 \iint_{S_1} dS = 2 \cdot 4\pi 2^2 = 32\pi$$

$$S_2 \text{ については、 } \nabla F = (2x, 2y, 2z), \quad |\nabla F| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2 \cdot 1 = 2$$

V に対して外向きの法単位ベクトルは $\mathbf{n} = -\frac{\nabla F}{|\nabla F|} = -(x, y, z)$ である。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = (x, y, z) \cdot \left(-(x, y, z) \right) = -(x^2 + y^2 + z^2) = -1$$

$$\iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = (-1) \iint_{S_2} dS = (-1) \cdot 4\pi 1^2 = -4\pi$$

境界成分が複数個からなる計算例 (4)

以上より左辺の値はつぎのように求まる。

$$\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 32\pi + (-4\pi) = 28\pi$$

右辺 $\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV$ について求めよう。

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV = \iiint_V 3 \, dV = 3 \cdot \frac{4\pi(2^3 - 1^3)}{3} = 28\pi$$

以上よりこの例でも左辺と右辺がともに 28π となり、

ガウスの発散定理の両辺が一致した：
$$\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV$$

方向微分係数・ラプラシアン（復習）

スカラー場 $\varphi(x, y, z)$ と単位ベクトル $u = (u_x, u_y, u_z)$ に対し、

φ の u 方向の方向微分係数がつぎで定まるのであった。

$$\frac{d\varphi}{du} = u_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + u_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = u \cdot \nabla \varphi$$

φ の u 方向の変化率（＝方向微分）は u と勾配 $\nabla \varphi$ との内積により求まる。

また、 φ の勾配 $\nabla \varphi$ は $\mathbf{0}$ でないとき、等位面の法線方向を表す。

さらに、 φ の勾配 $\nabla \varphi$ の発散を $\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi$ と表し、

微分演算子としての記号 ∇^2 をラプラシアンというのであった。

とくに、 $\nabla^2 \varphi = 0$ が成り立つとき、 φ を調和関数とよぶ。

ガウスの発散定理の応用 (1)

領域 V の境界を ∂V とし、 V に対し外向きの法単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする。

スカラー場 $\varphi(x, y, z)$ に対し、 $\boldsymbol{n}$ 方向の方向微分係数をつぎのように表す。

$$\frac{d\varphi}{dn} = \boldsymbol{n} \cdot \nabla \varphi \quad (\text{正にも負にも } 0 \text{ にもなりうる})$$

ベクトル場として $\boldsymbol{A} = \nabla \varphi$ とすると、ガウスの発散定理よりつぎが成り立つ。

$$\iint_{\partial V} (\nabla \varphi) \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\nabla \varphi) dV$$

左辺は $\iint_{\partial V} \frac{d\varphi}{dn} dS$, 右辺は $\iiint_V \nabla^2 \varphi dV$ であるから、つぎを得る。

$$\iint_{\partial V} \frac{d\varphi}{dn} dS = \iiint_V \nabla^2 \varphi dV$$

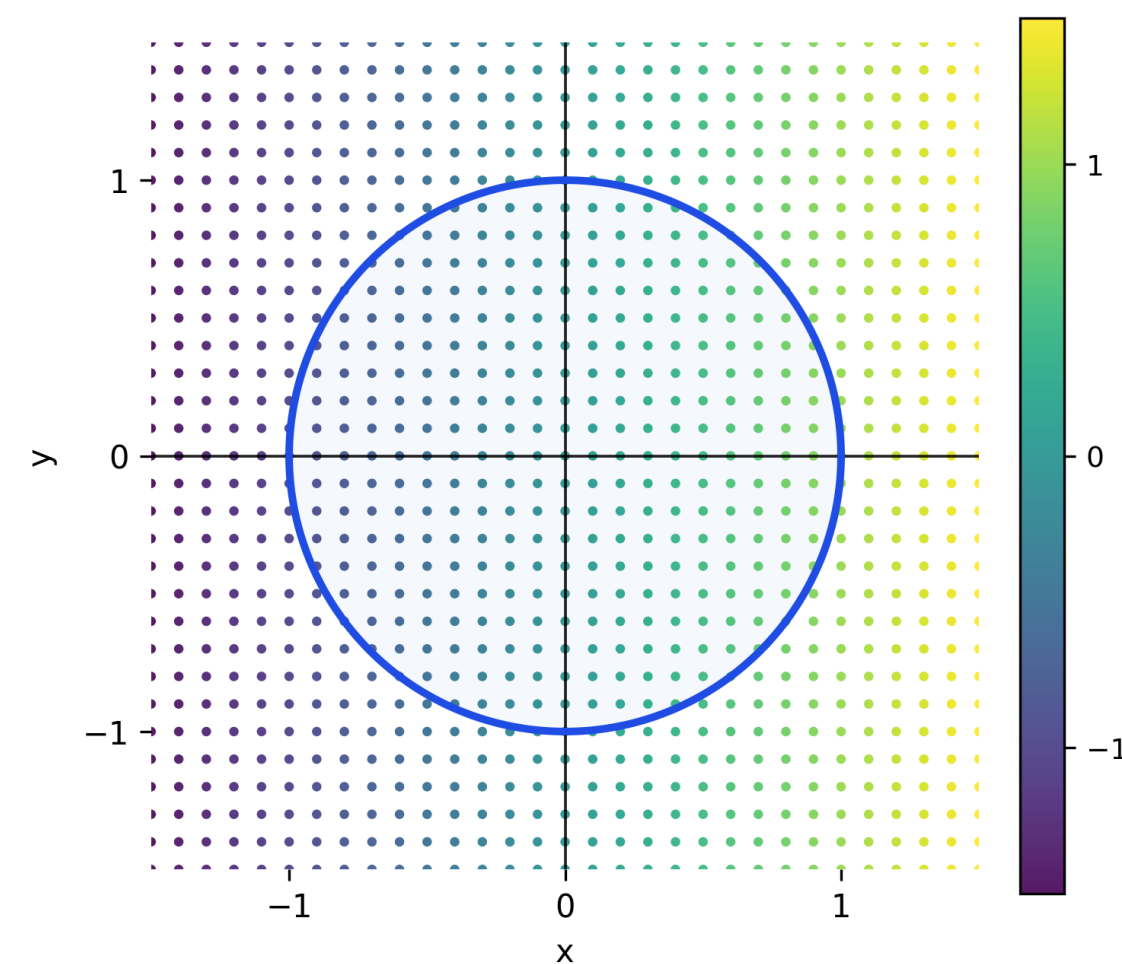
ガウスの発散定理の応用 (2)

27

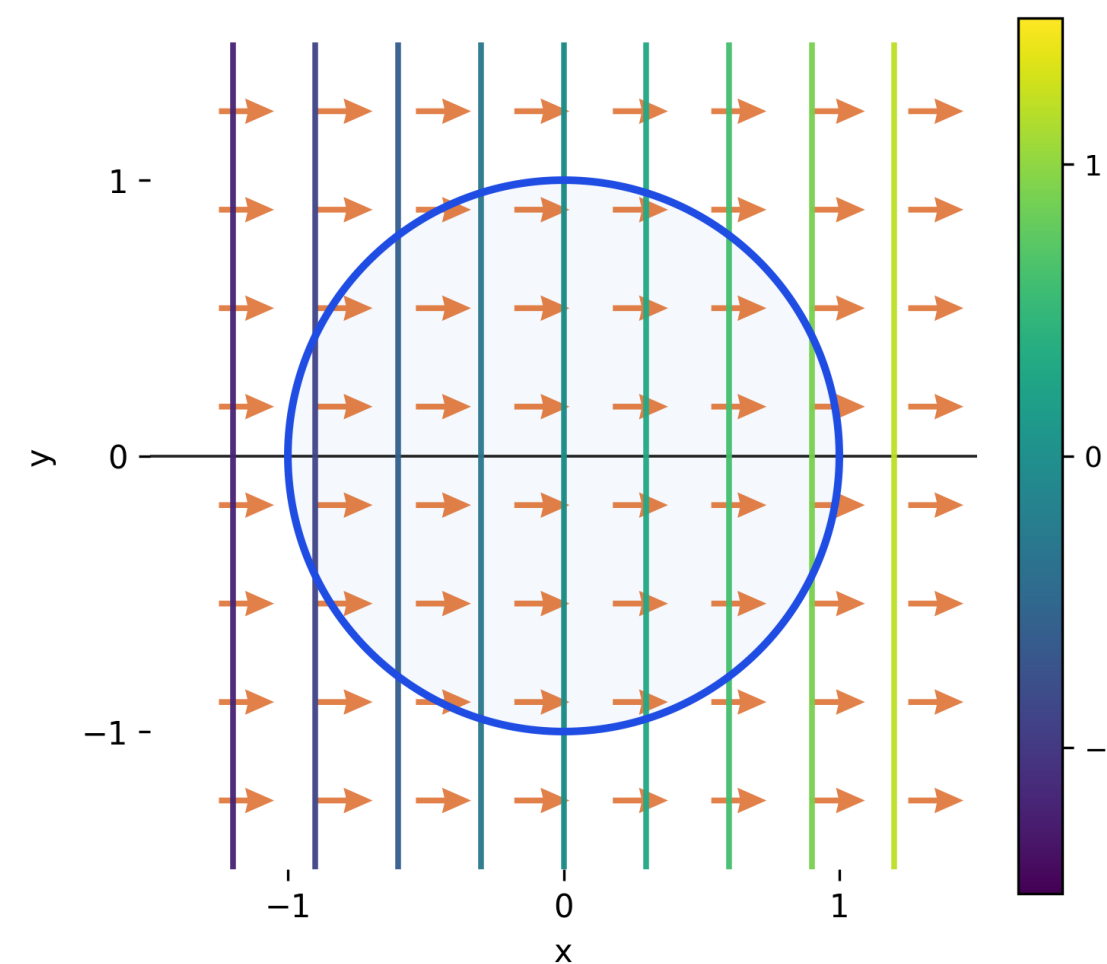
とくに、 φ が調和関数のとき、 $\nabla^2 \varphi = 0$ であるから右辺が 0 となり、左辺も

$$\iint_{\partial V} \frac{d\varphi}{dn} dS = 0$$

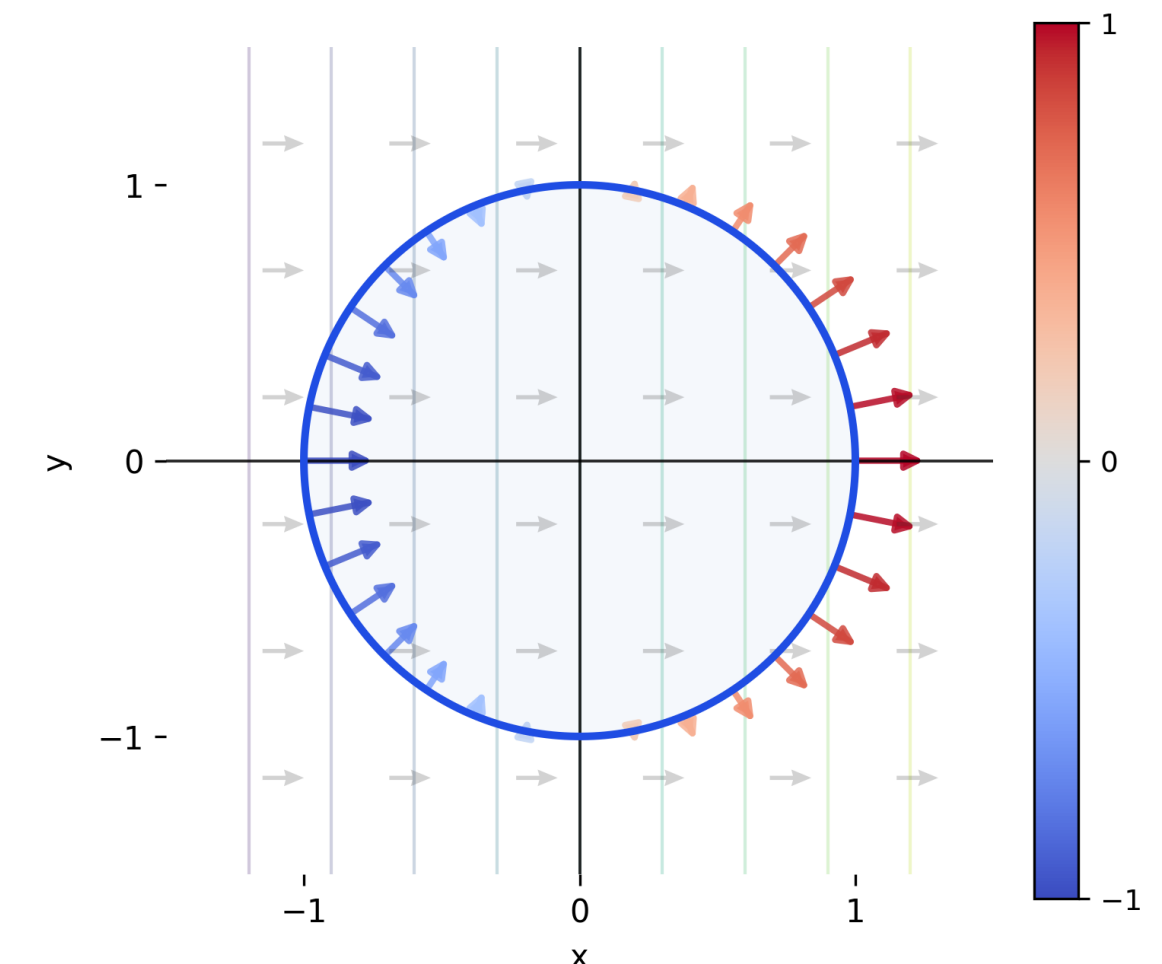
となる。これは、境界 ∂V 全体で見たときに、 ∂V の外向き法線方向に対する φ の増加量と減少量が釣り合うことを意味する。



調和関数 $\varphi(x, y, z) = x$
と単位球の $z = 0$ 断面



φ の等位面 (断面)
とベクトル場 $\nabla \varphi$



∂V 全体で見たときに
 $\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi$ が釣り合う

発散が 0 となる計算例

ベクトル場 $A(x, y, z) = (-y, x, 0)$ を考える。

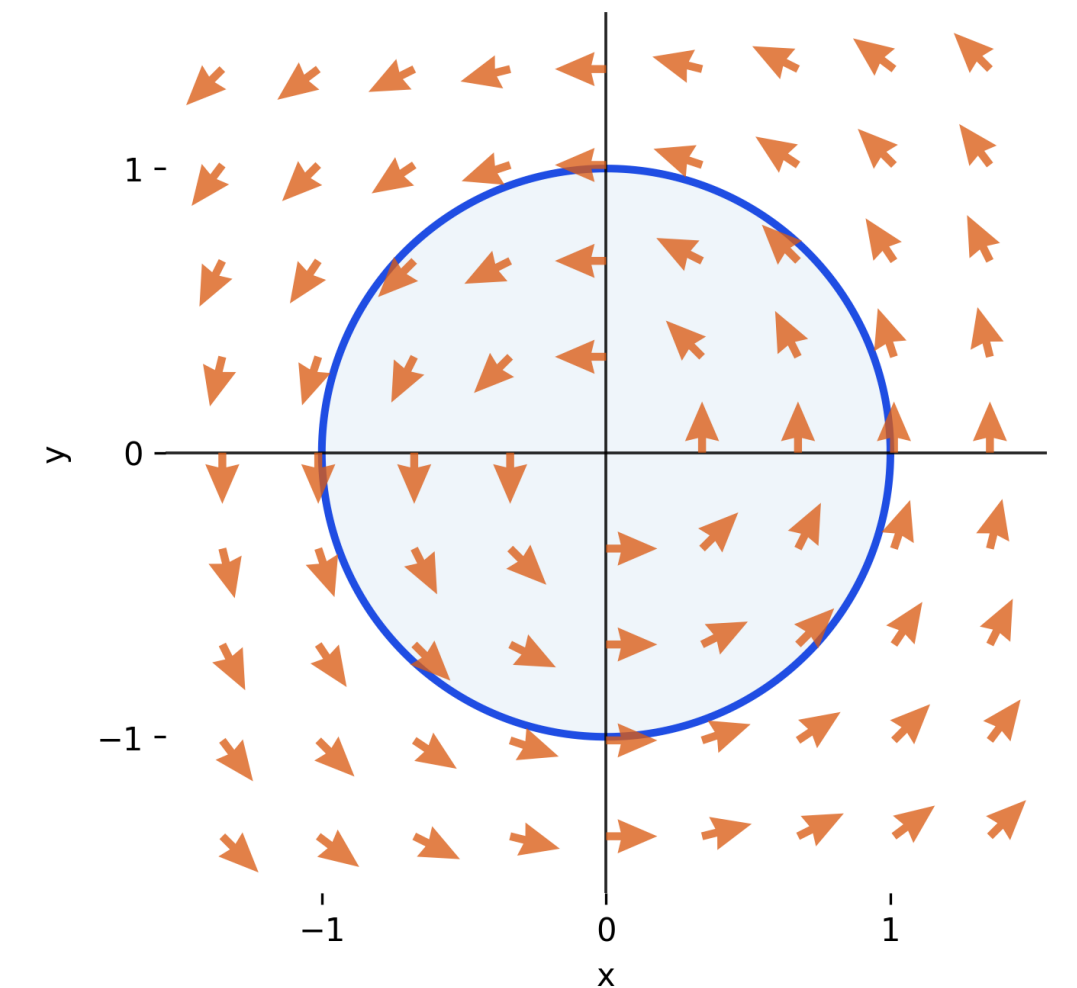
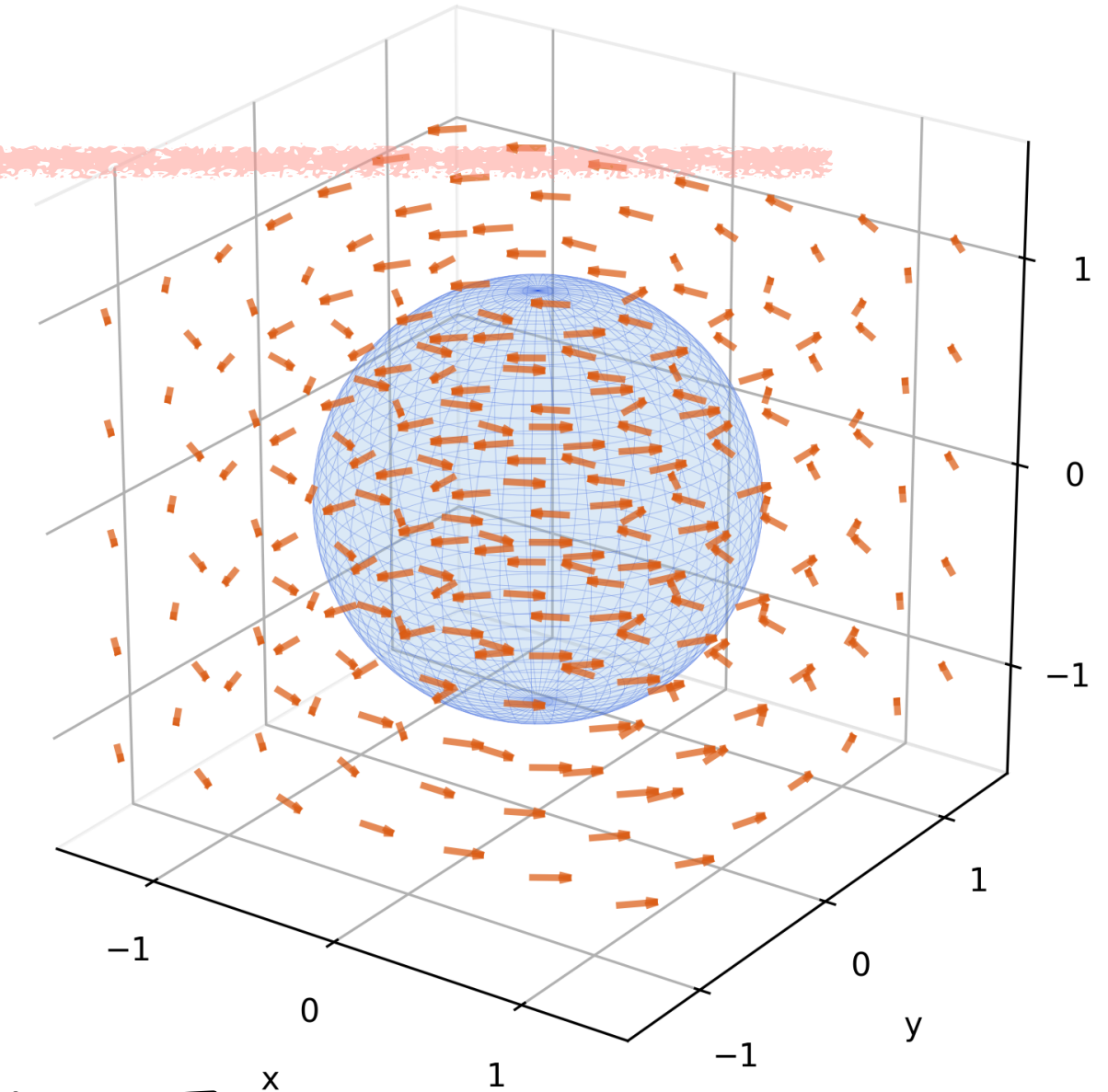
このとき

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

したがって、ガウスの発散定理より、任意の閉曲面 ∂V について

$$\iint_{\partial V} A \cdot dS = \iiint_V \operatorname{div} A \, dV = 0$$

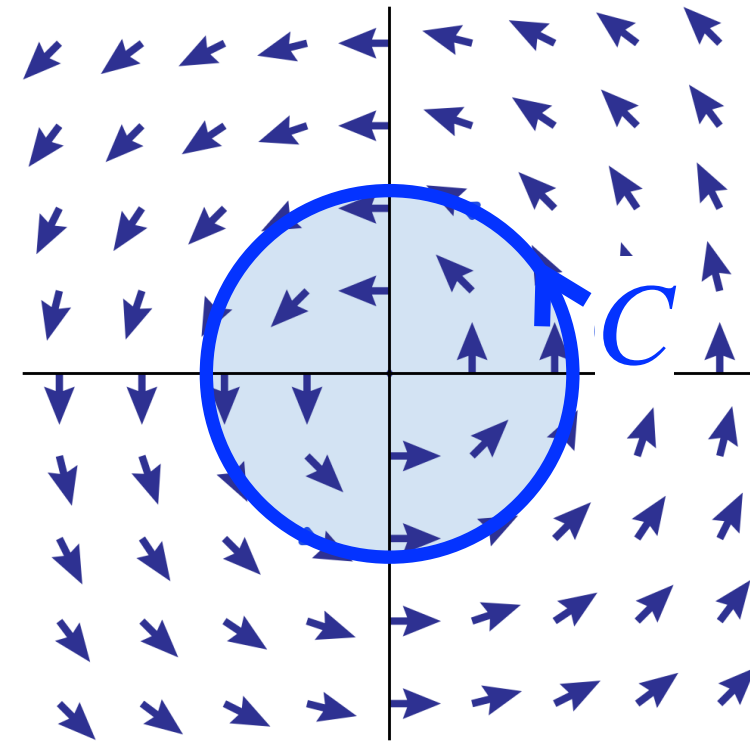
が成り立つ。ベクトル場 A は回っているように見えるが外へは湧き出していないので、総流束は 0 である。



$z = 0$ による断面

循環と流束の違い

11回目講義では、平面ベクトル場 $A(x, y) = (-y, x)$ に対して単位円 C に沿う循環がつぎのように求められた。



グリーンの定理（回転型） $A(x, y) = (P, Q)$ に対して

$$\text{循環} = \oint_C A \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\oint_C A \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 2 dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2\pi$$

これは、領域 D の境界 C に沿ってベクトル場がどれだけ回転するかを表した。

前ページの閉曲面を通る流束 $\iint_{\partial V} A \cdot d\mathbf{S}$ とは異なることに注意する。