

ベクトル解析

11回目講義

畠中 英里

本日の講義の流れ

- 前回の復習
- 本日の講義内容
 - ・ 平面領域とその境界の向き
 - ・ グリーンの定理（回転型）
 - ・ グリーンの定理（回転型）の計算例とその意味
 - ・ グリーンの定理（発散型）
 - ・ グリーンの定理（発散型）の計算例とその意味

前回の復習 (1)

○ 曲面の媒介変数表示

$$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

点 P における接ベクトル $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ は P の **接平面** を張る。

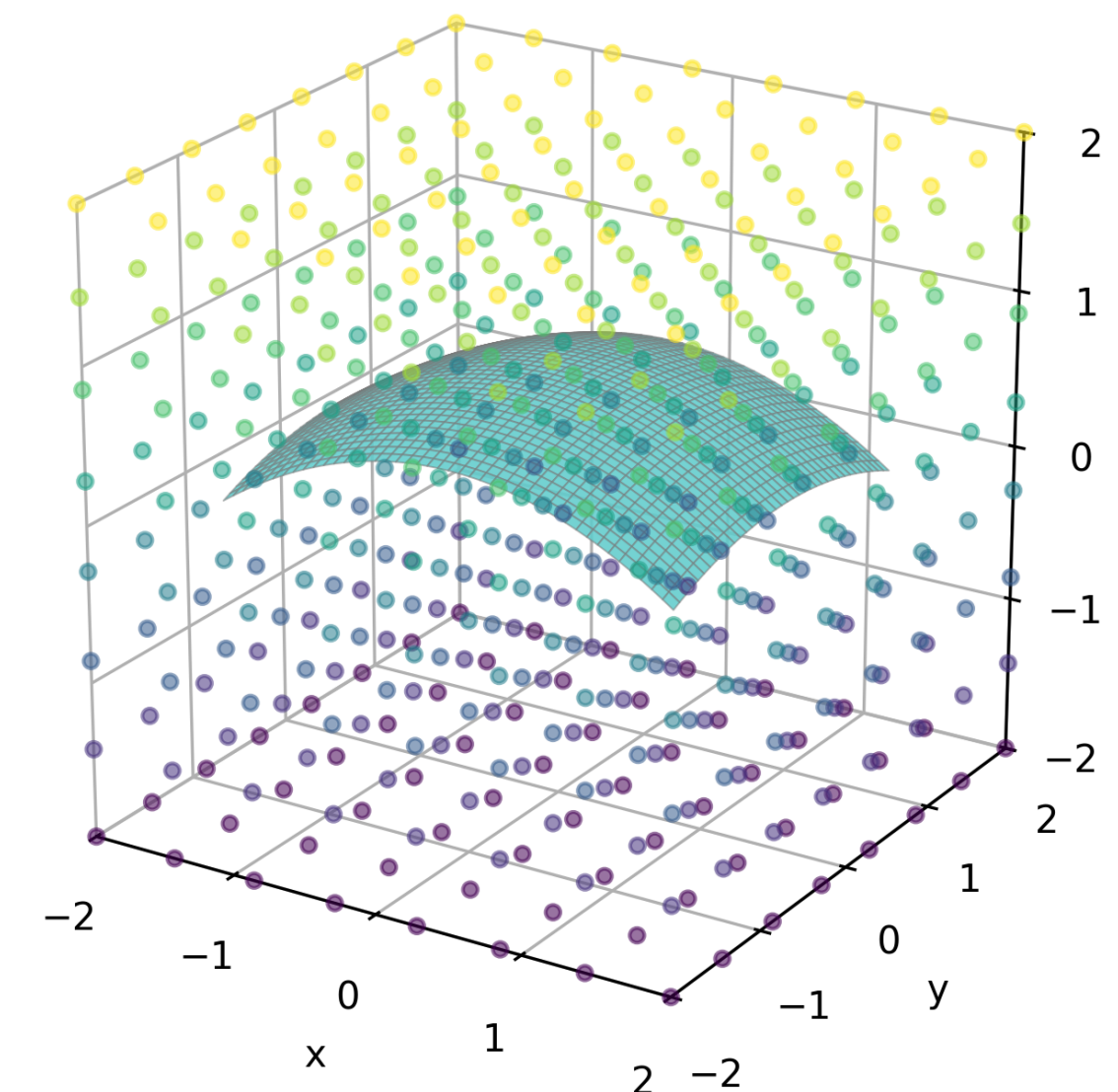
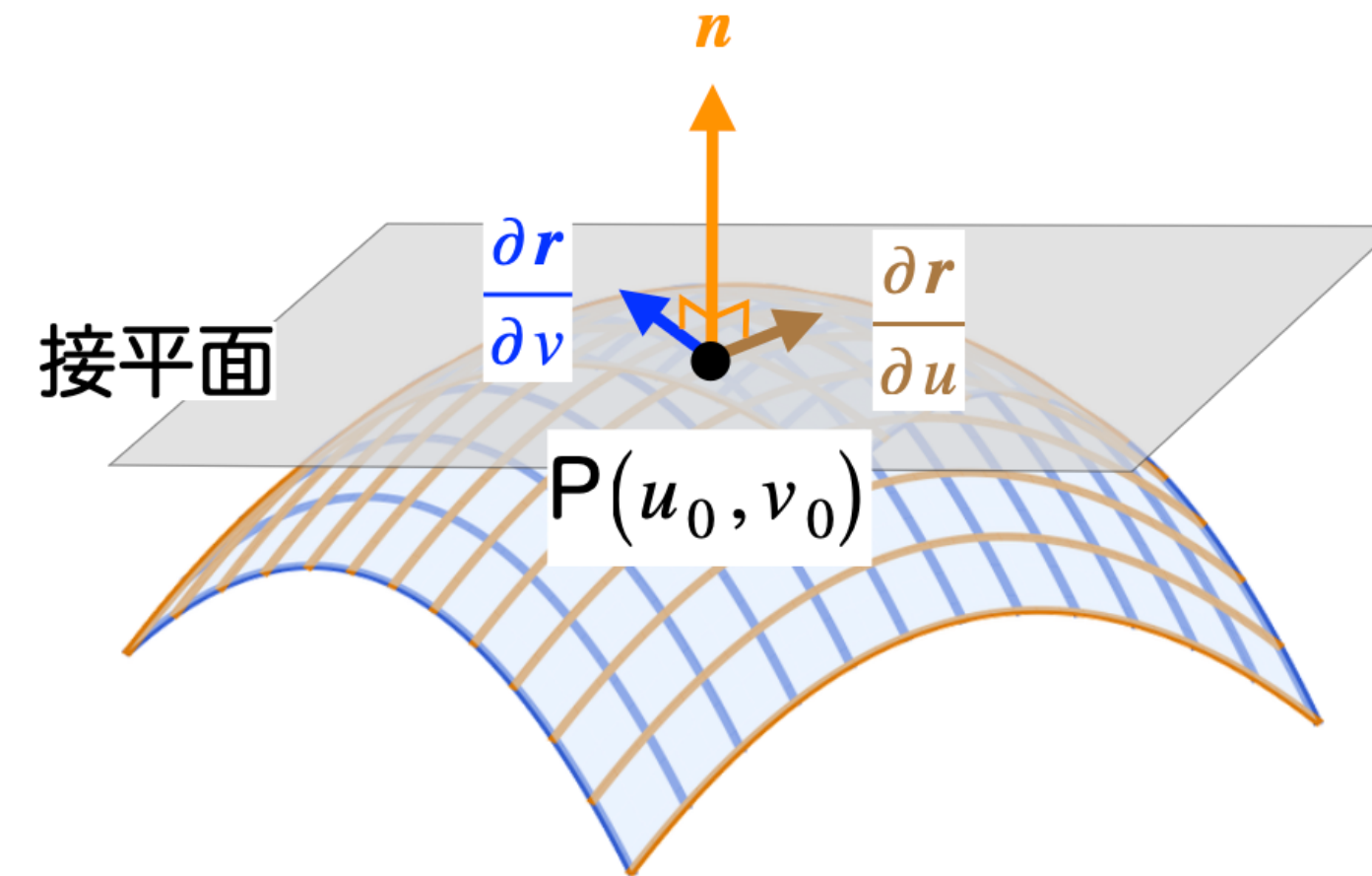
外積 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ は点 P での接平面に垂直なベクトル。

$$\text{法単位ベクトル} : \mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}$$

○ スカラーの面積分

スカラー場 $\varphi = \varphi(x, y, z)$, 曲面 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$

$$\iint_S \varphi \, dS = \iint_D \varphi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \, du \, dv$$



前回の復習 (2)

式中の D は uv 平面上の媒介変数領域。

φ によって表される曲面 S 上の各点での「重み」をすべて足し合わせるイメージ。

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varphi(P_i) \Delta S_i$$

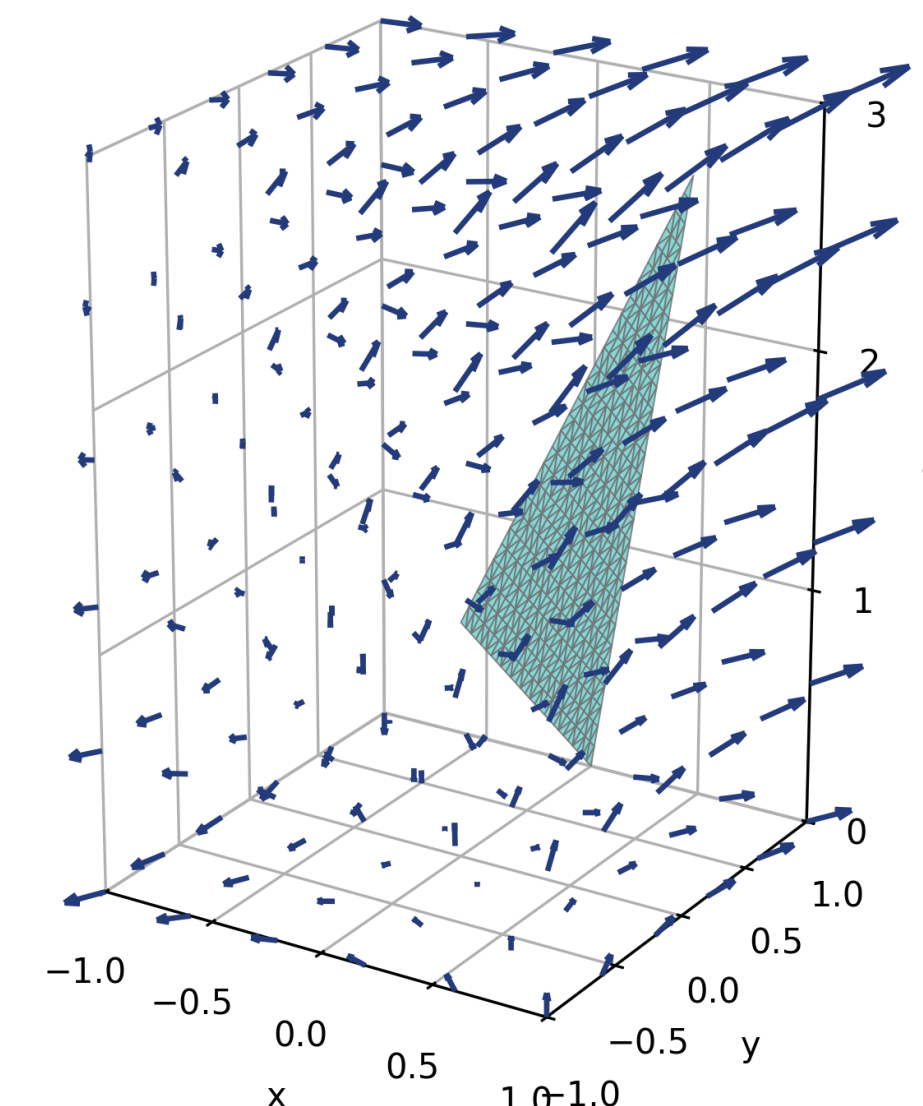
スカラーの面積分は曲面 S の向き（法線ベクトルの向き）に依存しない。

○ ベクトルの面積分

ベクトル場 $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$, 曲面 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv$$

$$\left(\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Bigg/ \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|, dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv \text{ より。} \right)$$



前回の復習 (3)

$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ は、向きづけられた曲面 S を通るベクトル場 $\mathbf{A}$ の流束を表す。

ベクトルの面積分は曲面 S の向きを逆にすると符号が反転する。

$$\iint_{-S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

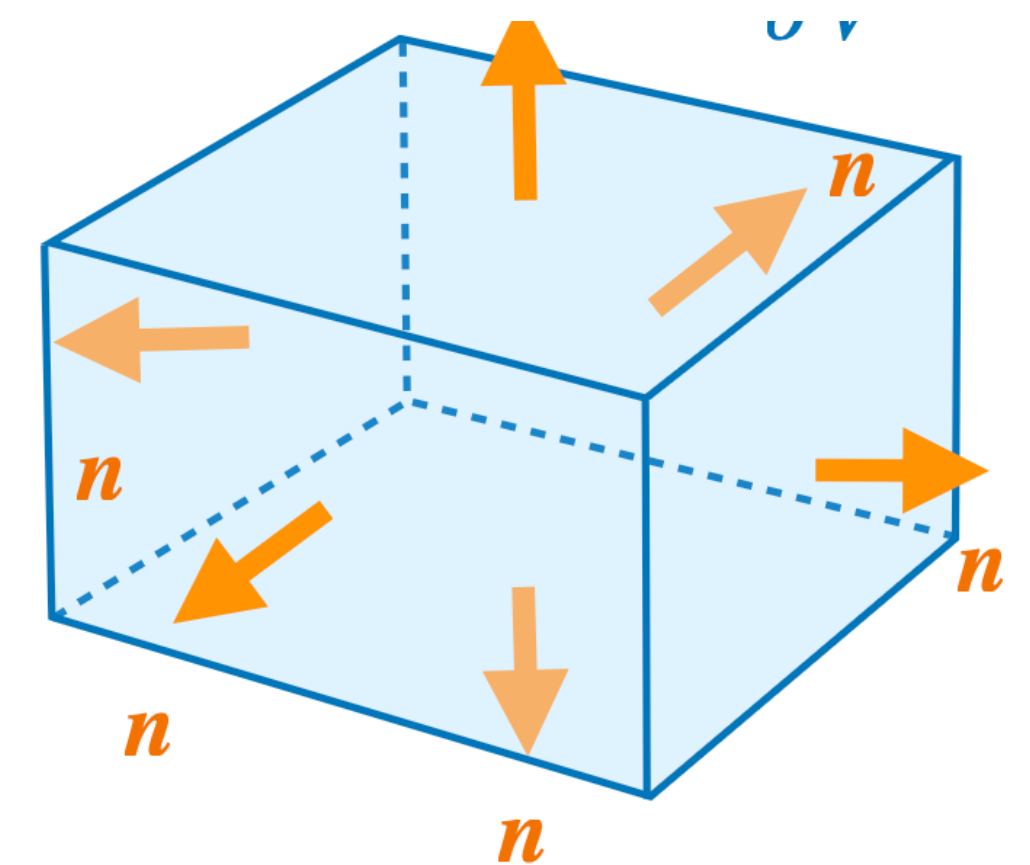
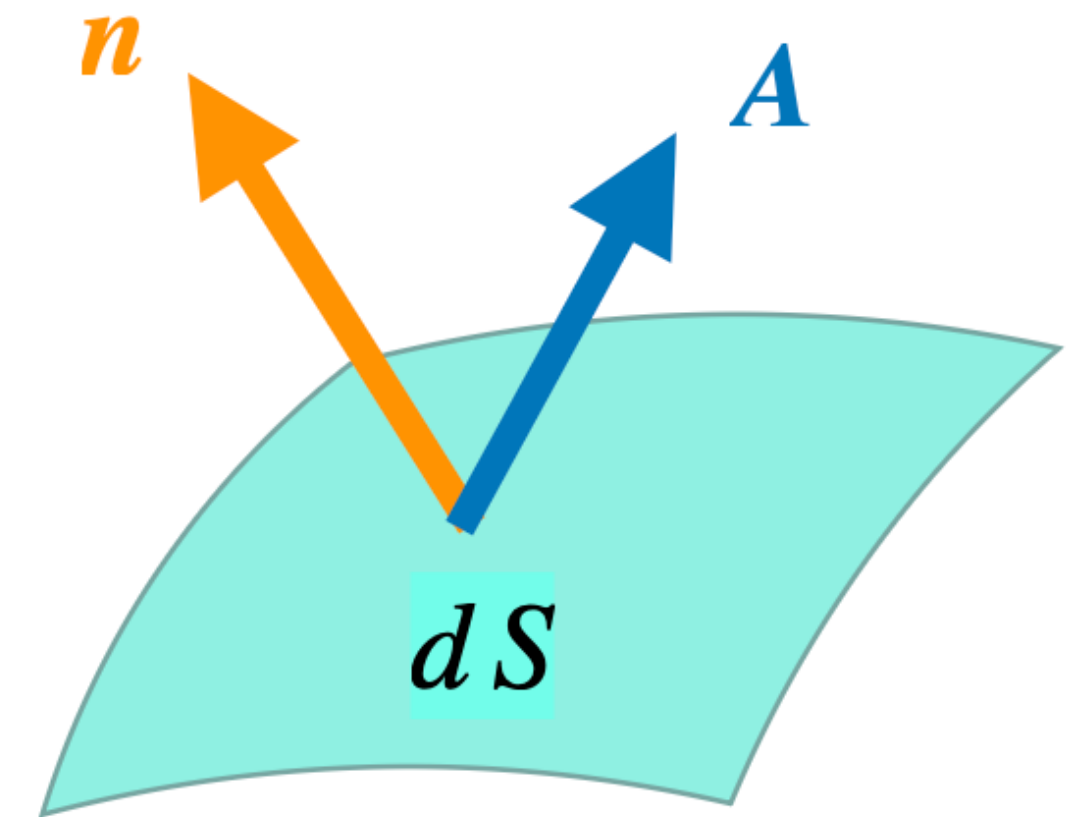
○ 閉曲面

立体 V の境界 ∂V のような閉じた曲面を、**閉曲面** とよぶ。

閉曲面では通常、外向きの法単位ベクトル $\mathbf{n}$ をとる。

立体 V の境界 ∂V について、面積分 $\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ は

ベクトル場 $\mathbf{A}$ が立体 V の外へ流れ出る正味の量（外向き流束）を表す。



前回の復習（４）

- 曲面が方程式 $F(x, y, z) = 0$ で与えられる場合

方程式 $F(x, y, z) = 0$ から適宜、曲面の媒介変数表示 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ を定め、

面積分 $\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ を求める。

- 曲面の向き

媒介表示の取り方によって、曲面に誘導される向きが反転することがある。

閉曲面では通常、外向きの法単位ベクトルに対応する向きをとる。

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ の表示による曲面の向きは、法線ベクトル $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ の向きで定まる。

$F(x, y, z) = 0$ によって定まる曲面では、

$\nabla F \neq \mathbf{0}$ のとき、法線方向は ∇F または $-\nabla F$ で与えられる。

本日の講義

グリーンンの定理

平面領域とその境界

グリーンの定理では、基本的に xy 平面における領域 D とその境界 $C = \partial D$ を考える。

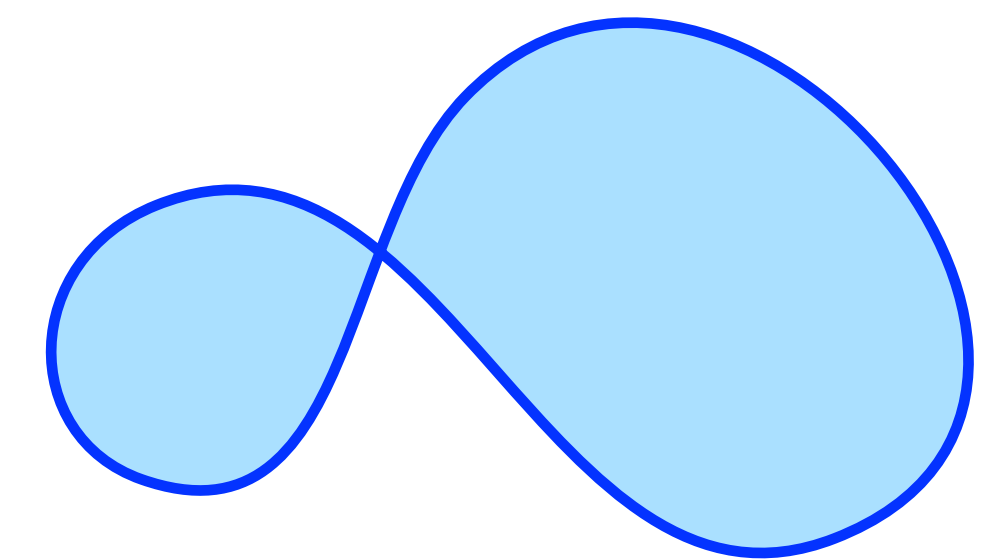
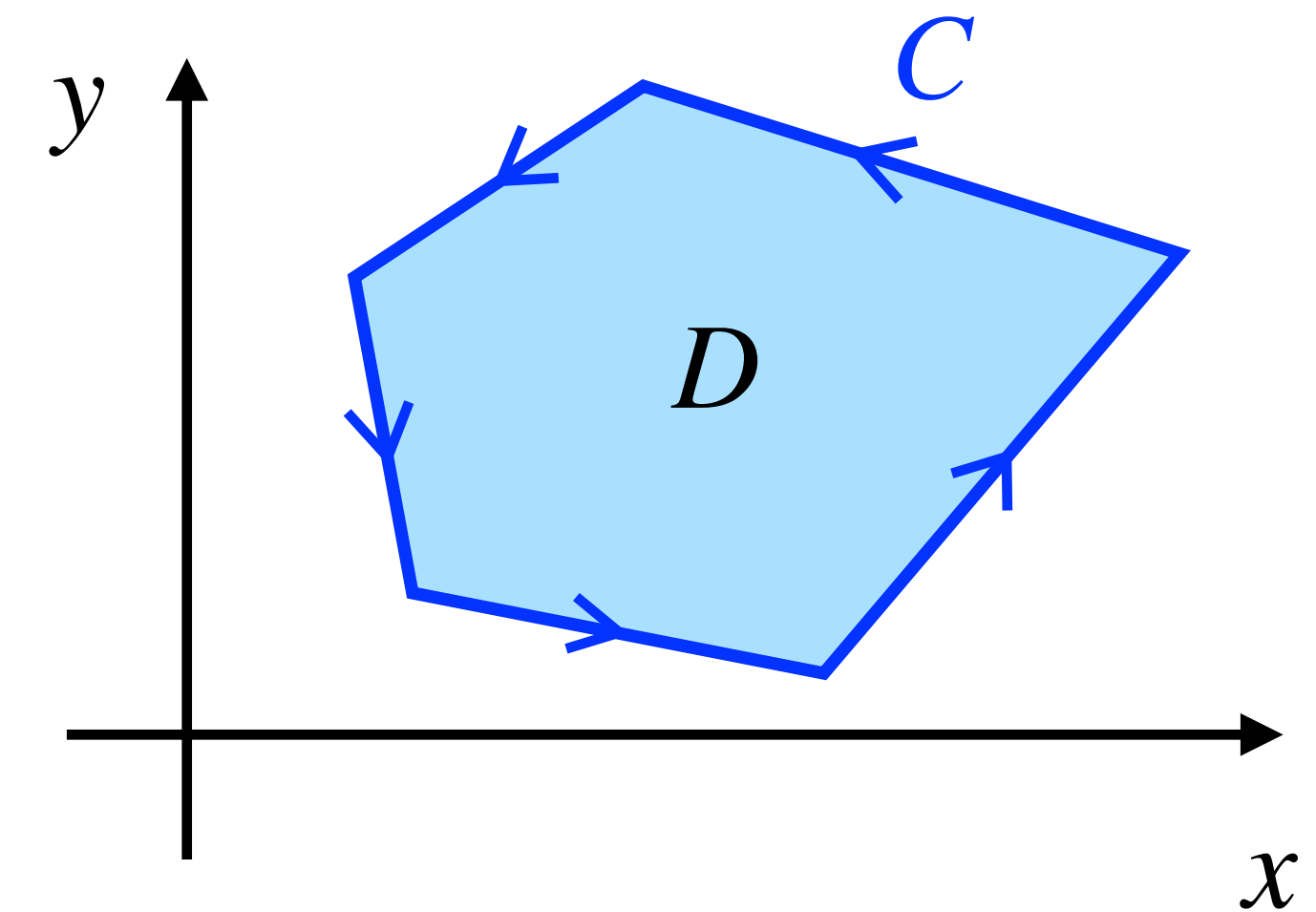
C は、領域 D を一周する閉曲線である。

閉じた折れ線も、区分的に滑らかな閉曲線に含める。

曲線 C には、領域 D を左手側に見ながら進む向き、すなわち反時計回りの向きを与える。

これを通常、**正の向き** とよぶ。

また、自己交差のない閉曲線を **単純閉曲線** という。



単純閉曲線ではない閉曲線

グリーンの定理 (回転型)

D を、区分的に滑らかな単純閉曲線 $C = \partial D$ が正の向きに囲む有界領域とする。

$P(x, y)$, $Q(x, y)$ は、 D とその境界を含む開領域上で C^1 級とする。

このとき、境界 C に沿う線積分と、内部 D の二重積分の間に
つぎの関係が成り立つ。

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

右辺の $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ は、平面ベクトル場 (P, Q) の回転の強さを表す量である。

この定理は、「境界に沿う循環」 = 「内部の回転の総和」 を意味している。

グリーンの定理（回転型）の左辺（１）

10

グリーンの定理（回転型）の左辺を見てみよう。

$$\oint_C (P dx + Q dy)$$

これは閉曲線 C に沿う線積分である。

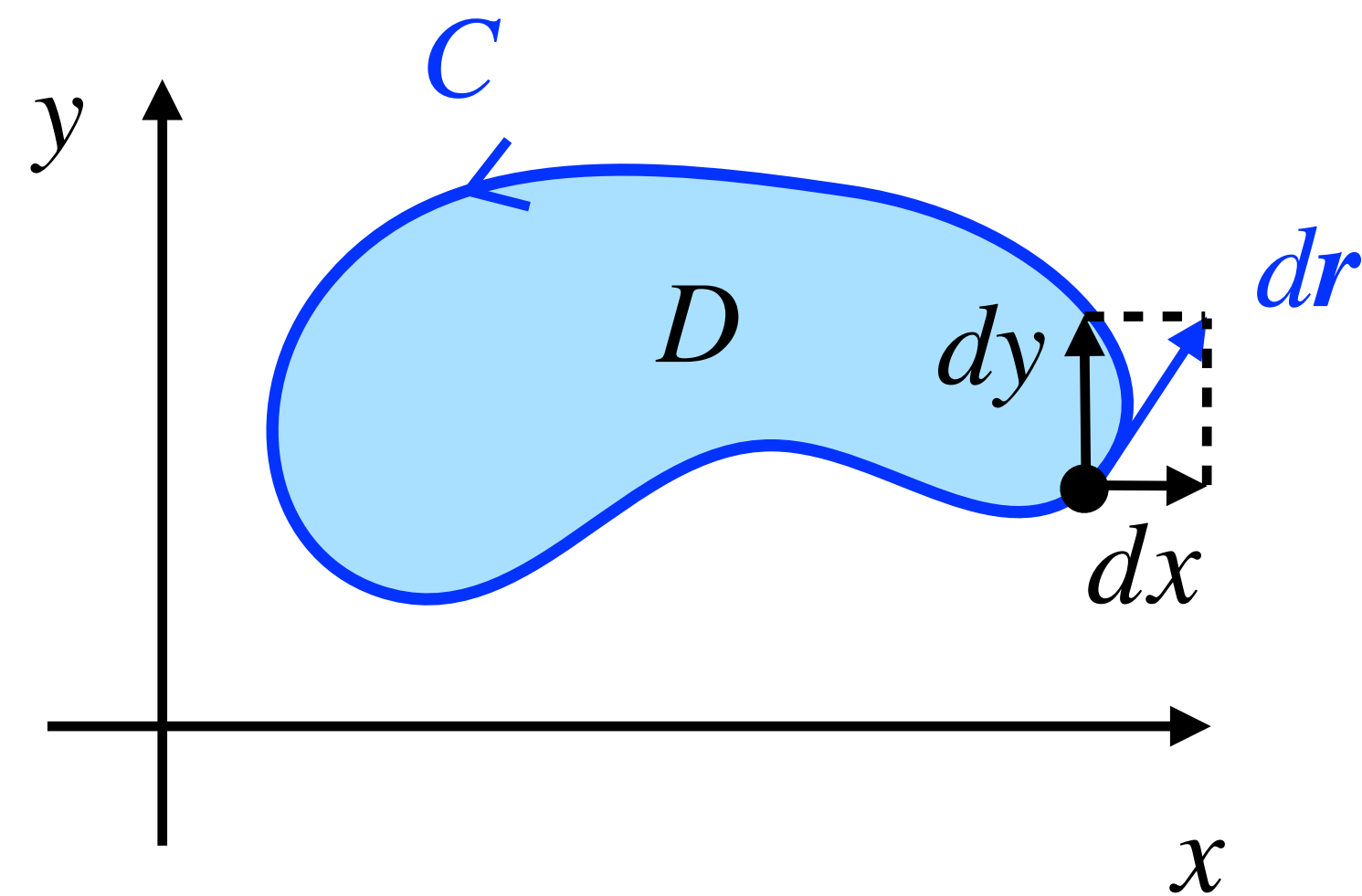
曲線 C の媒介変数表示を

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

とすると、 $dx = \frac{dx}{dt} dt$, $dy = \frac{dy}{dt} dt$ だから、

スカラー場 $f(x, y)$ に対して、 dx, dy を用いる線積分がつぎのように定まる。

$$\int_C f(x, y) dx = \int_a^b f(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} dt, \quad \int_C f(x, y) dy = \int_a^b f(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} dt$$



グリーンの定理（回転型）の左辺（2）

11

したがって、グリーンの定理（回転型）の左辺は C の媒介変数表示を使えば

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \int_a^b \left(P(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right) dt$$

と表される。

さらに、ベクトル場 $A(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ とすれば、

$d\mathbf{r} = (dx, dy)$ であるから $A \cdot d\mathbf{r} = (P, Q) \cdot (dx, dy) = P dx + Q dy$ となり、

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \oint_C A \cdot d\mathbf{r}$$

と表せる。これは閉曲線 C に沿うベクトル場の線積分（＝循環）である。

グリーンの定理（回転型）の左辺（3）

12

グリーンの定理（回転型）の左辺

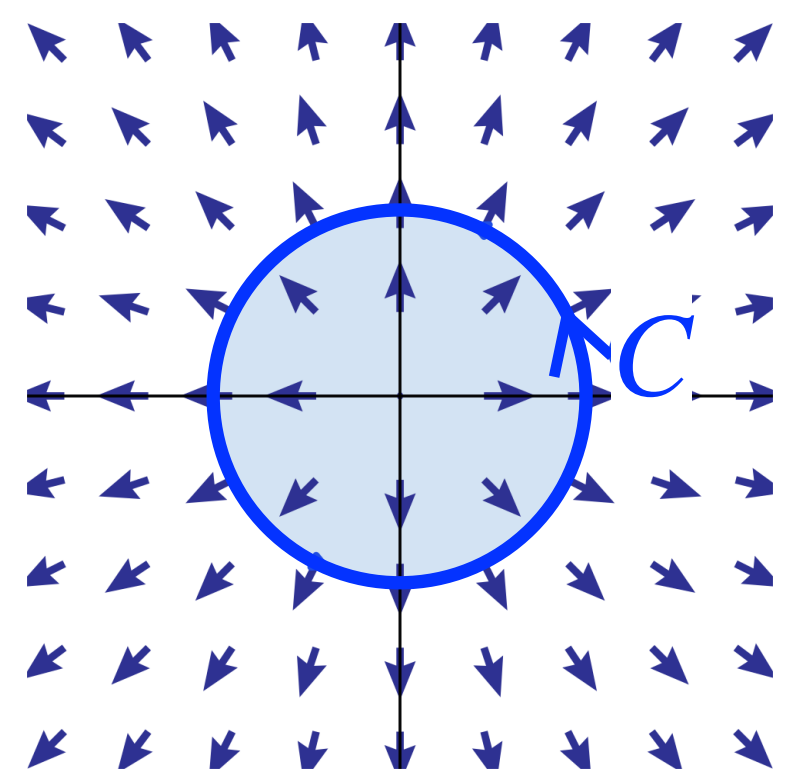
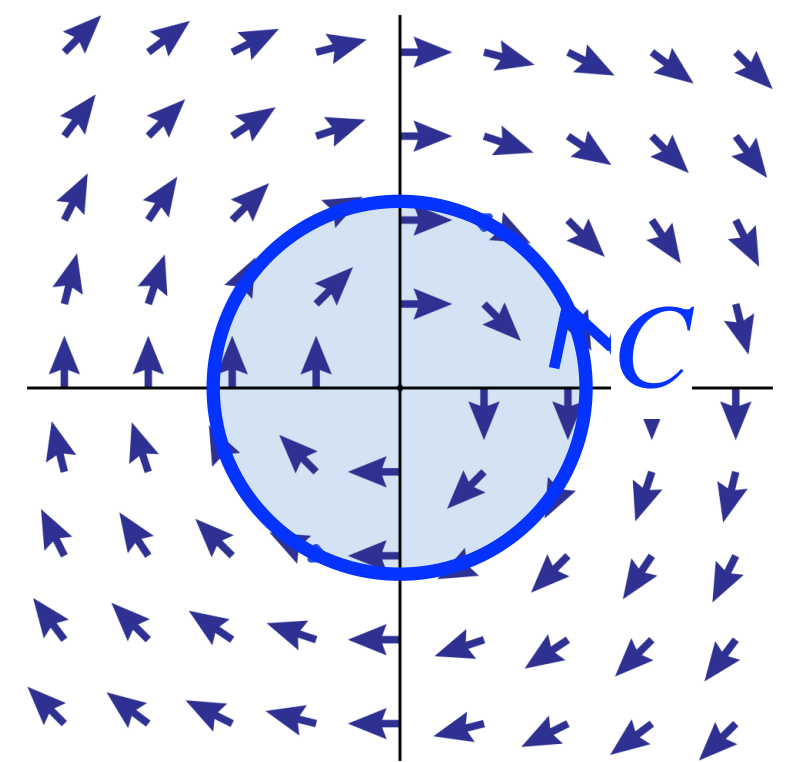
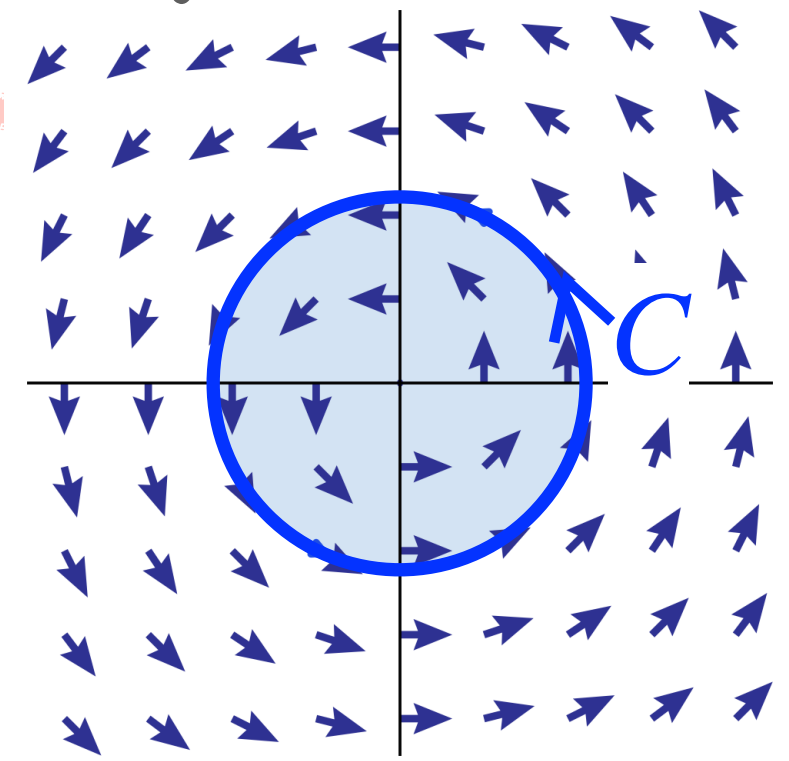
$$\oint_C (P dx + Q dy) = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

は、閉曲線 C に沿ってベクトル場

$$\mathbf{A}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

がどれだけ接線方向に向いているかを積み上げた量。

- ・ベクトル場が C に沿ってよく回っていれば大きい値。
- ・ベクトル場が C の向きと逆向きに回っていれば負の値。
- ・ベクトル場が C の接線方向成分を持たなければ寄与しない。



グリーンの定理（回転型）の右辺（１）

13

つぎに、グリーンの定理（回転型）の右辺を見よう。

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

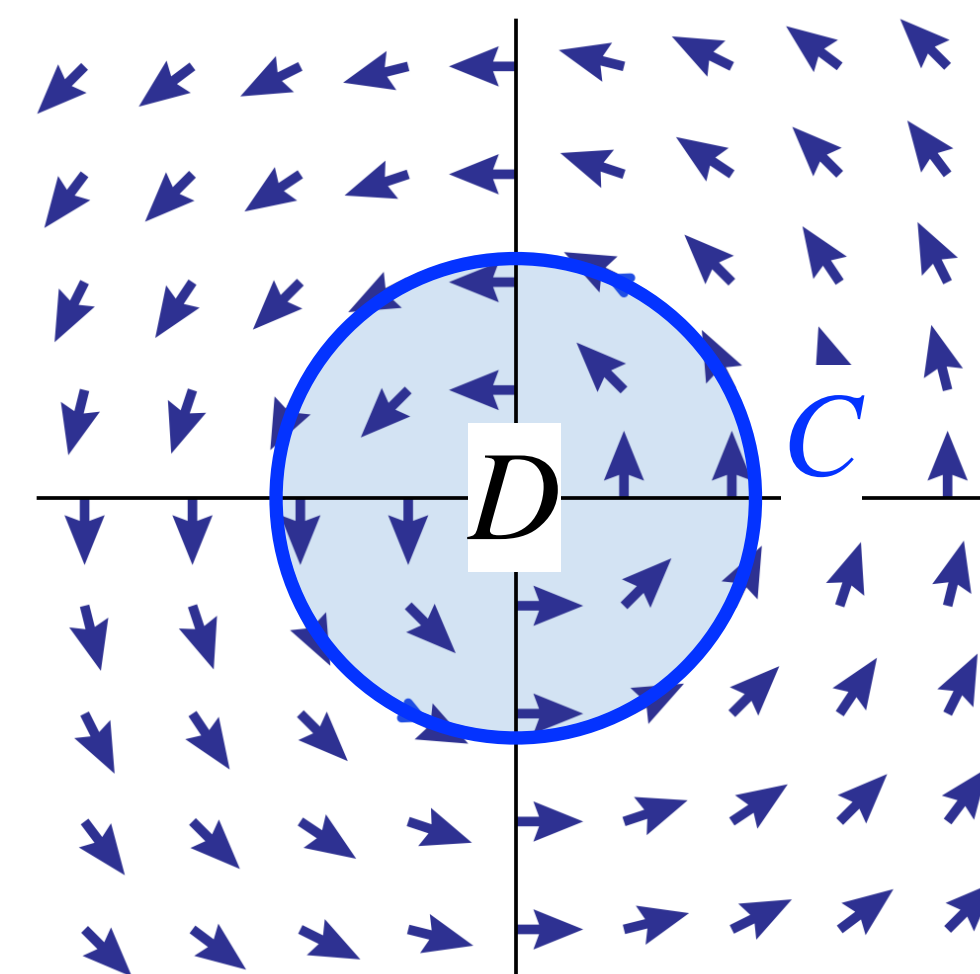
これは、与えられた平面ベクトル場 $A(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ から

平面のスカラー場 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ を導出し、領域 D 上で足し合わせた量、

すなわち面積分（＝二重積分）である。

$\frac{\partial Q}{\partial x}$ は、 x 方向に動いたときの A の y 成分 Q の変化率、

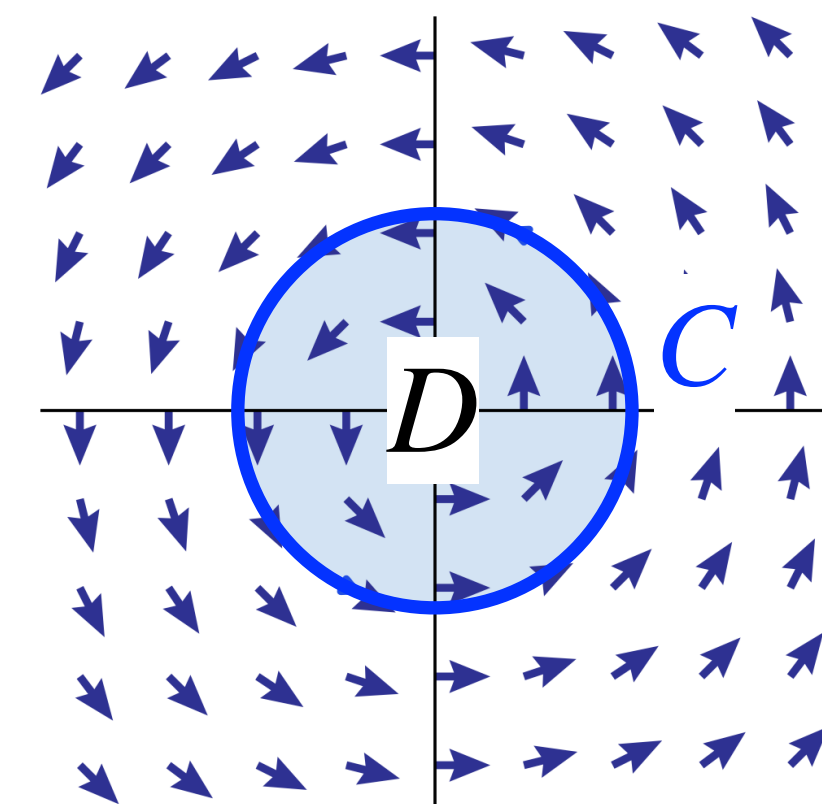
$\frac{\partial P}{\partial y}$ は、 y 方向に動いたときの A の x 成分 P の変化率である。



グリーンの定理（回転型）の右辺（2）

14

したがって、 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ は、その点のまわりでベクトル場が
どれだけ反時計回りに回ろうとするかを表す量である。
この局所的な回転を表す値を、領域 D にわたってすべて
足し合わせたものが右辺 $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ である。



$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > 0$$

平面ベクトル場 $A(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ を 3 次元ベクトル場 $(P(x, y), Q(x, y), 0)$

とみなすと、回転は $\text{rot } A = \nabla \times A = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ となる。

したがって、 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ は回転 $\text{rot } A$ の z 成分に対応する。

グリーンの定理（回転型）の右辺（3）

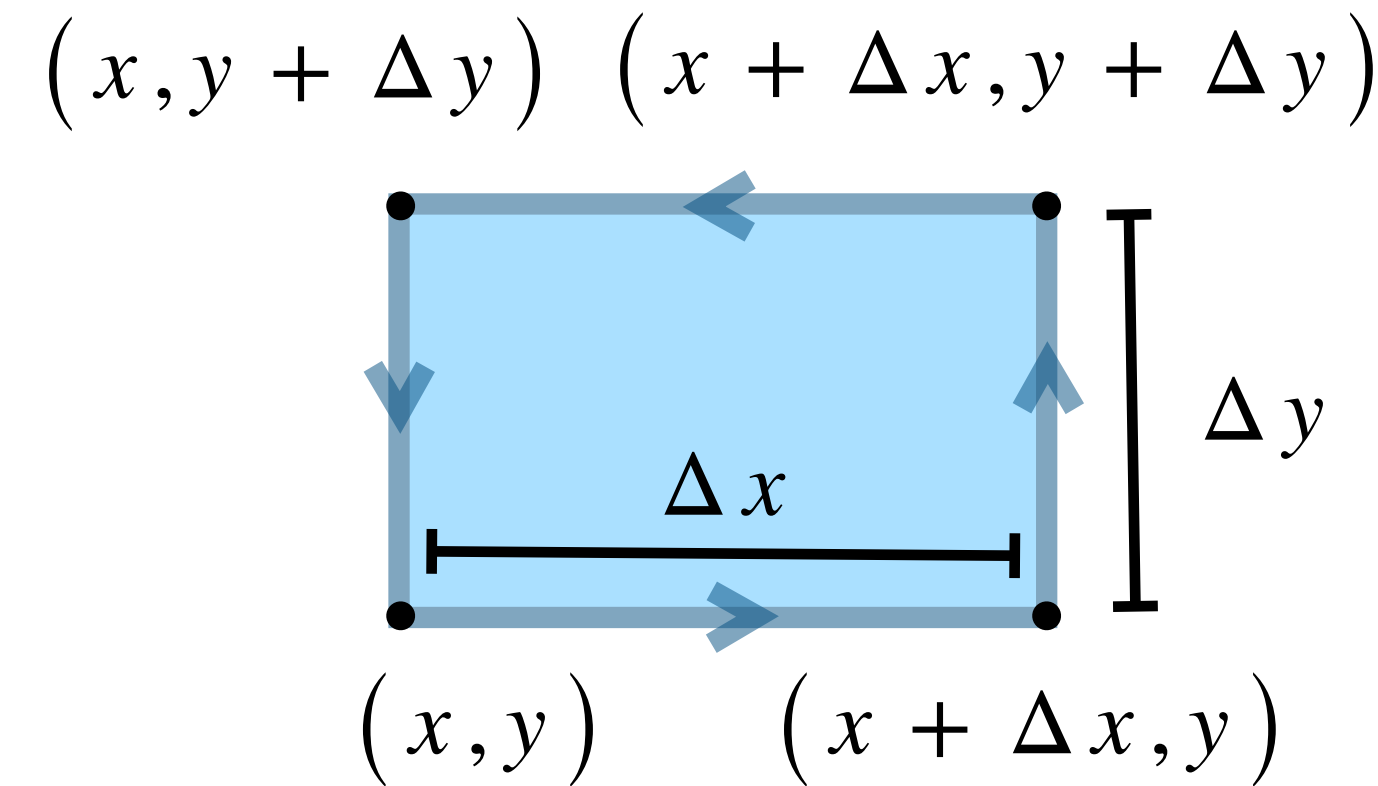
15

領域 D 内の点 (x, y) のまわりに、右図の小さな長方形 R をとる。

各边上で P, Q を端点の値で近似すると、

境界 ∂R に沿う循環はつぎの式で近似される。

$$\begin{aligned} \oint_{\partial R} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &\approx \left\{ Q(x + \Delta x, y) - Q(x, y) \right\} \Delta y - \left\{ P(x, y + \Delta y) - P(x, y) \right\} \Delta x \\ &\approx \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y, \text{ したがって } \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \oint_{\partial R} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned}$$



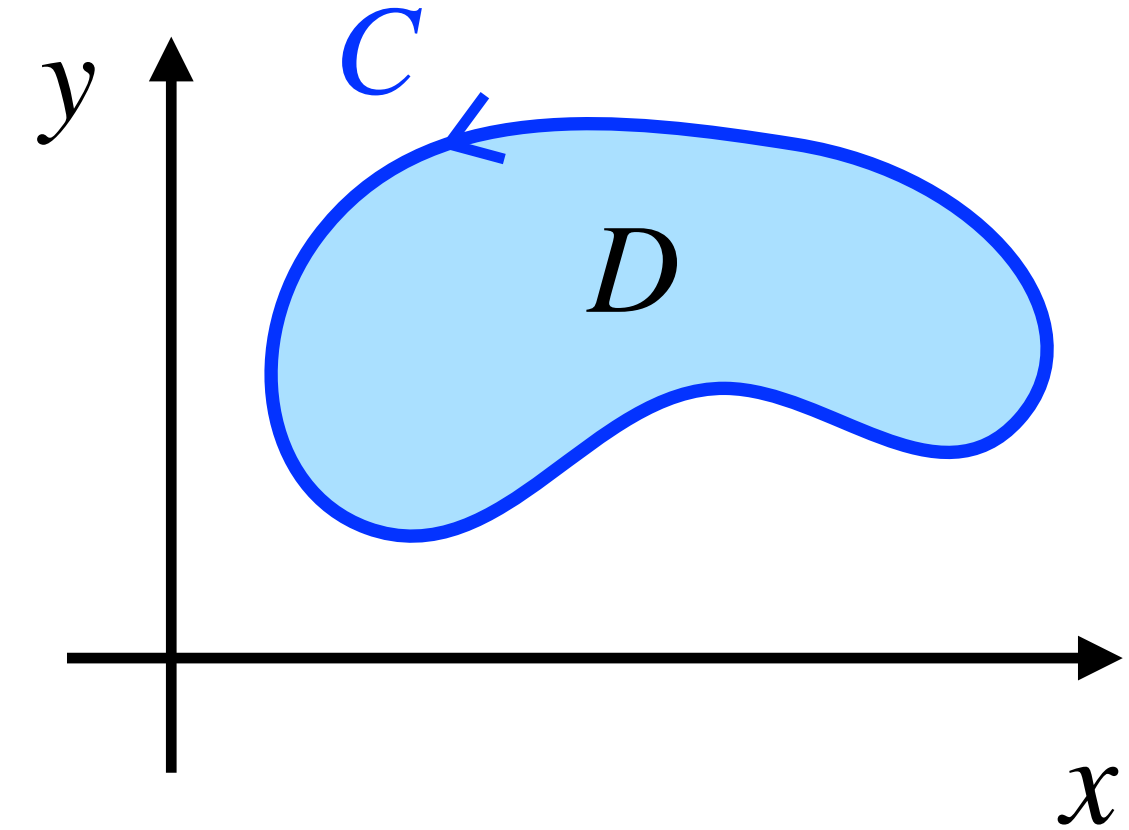
したがって、循環を長方形の面積 $\Delta x \Delta y$ で割った極限が、

その点における回転の密度 $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ となる。

グリーンの定理（回転型） まとめ

16

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



ベクトル場を $A(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ としたとき、

左辺は、閉曲線 C に沿うベクトル場 A の線積分（＝循環）であった。

すなわち C に沿って A がどれだけ接線方向に向いているかを積み上げた量。

右辺は、各点のまわりで $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ が A の反時計回りの回転を表し、

局所的な回転を領域 D にわたってすべて足し合わせたものであった。

すなわち 「境界に沿う循環」 ＝ 「内部の回転の総和」 を意味する。

グリーンの定理（回転型） 計算例（１）

17

xy 平面上の単位円板 $D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$ と、

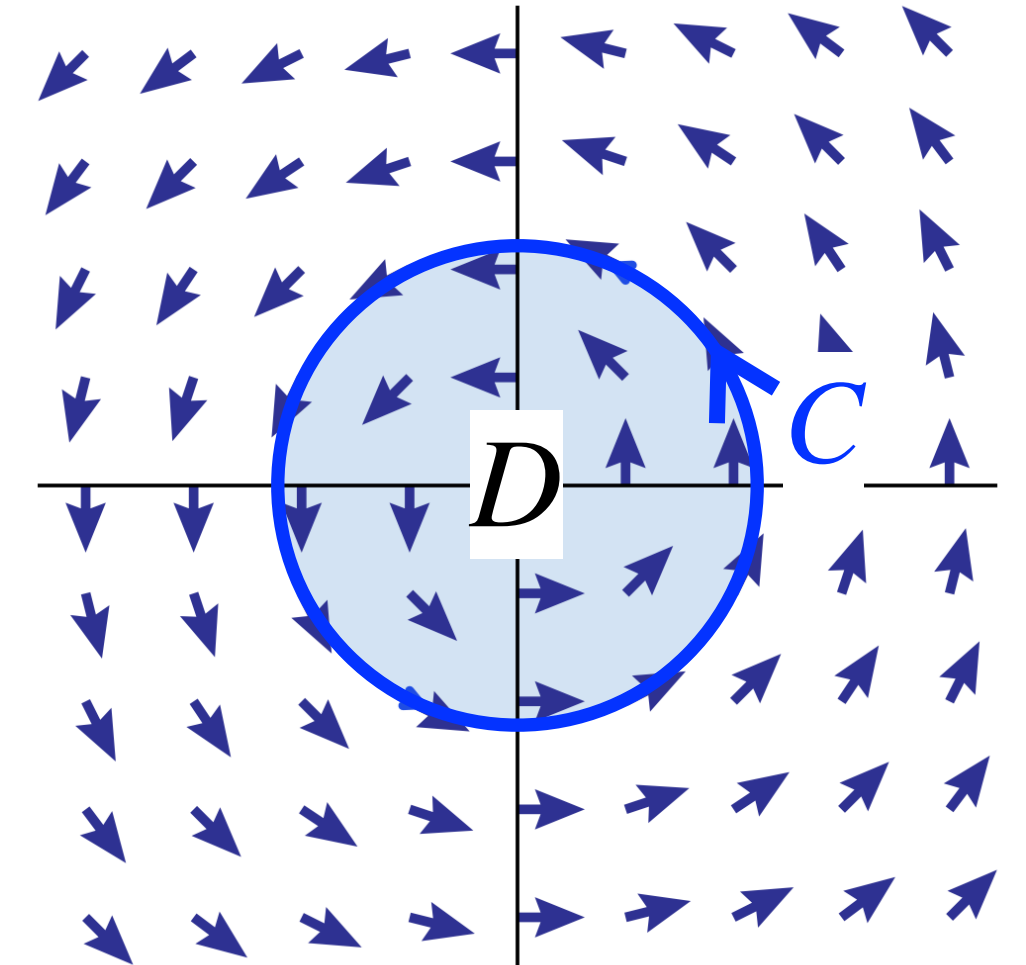
その境界 $C : x^2 + y^2 = 1$ を正の向き（反時計回り）にたどる。

平面ベクトル場 $A(x, y) = (-y, x)$ に対して、

グリーンの定理（回転型）

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

の両辺を計算し、実際に一致することを確認してみよう。



グリーンの定理（回転型） 計算例（2）

18

左辺 $\oint_C (P dx + Q dy) = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ を求めよう。

いま、 $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$ である。

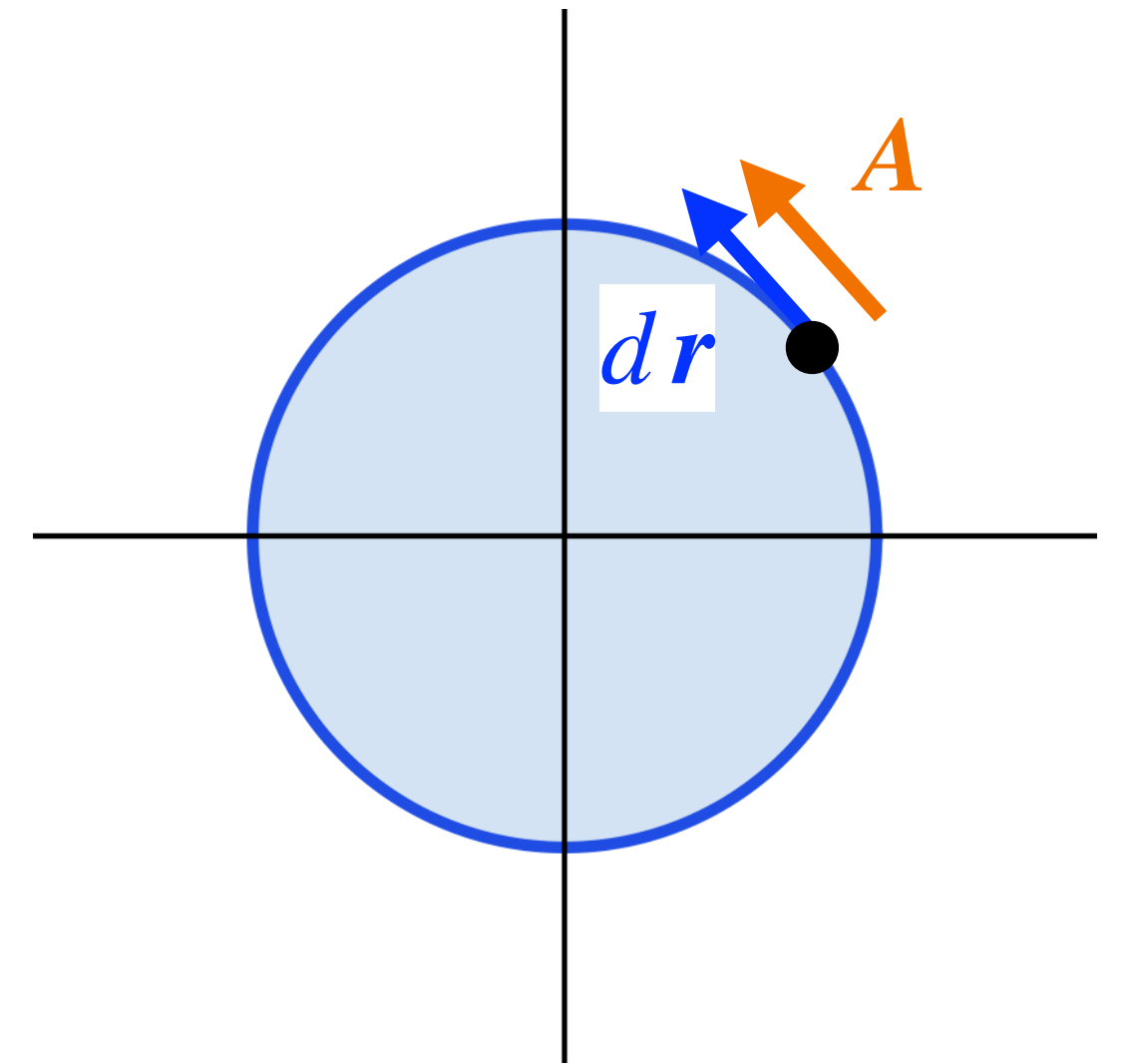
曲線 C の媒介変数表示をつぎのように取る。

$$C : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

このとき $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) = (-\sin t, \cos t)$, $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t, \cos t)$ となるから、

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = dt$$

したがって、 $\oint_C (P dx + Q dy) = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$ と求まる。



グリーンの定理（回転型） 計算例（3）

19

左辺 $\oint_C (P dx + Q dy)$ を、 x と y の積分として計算することもできる。

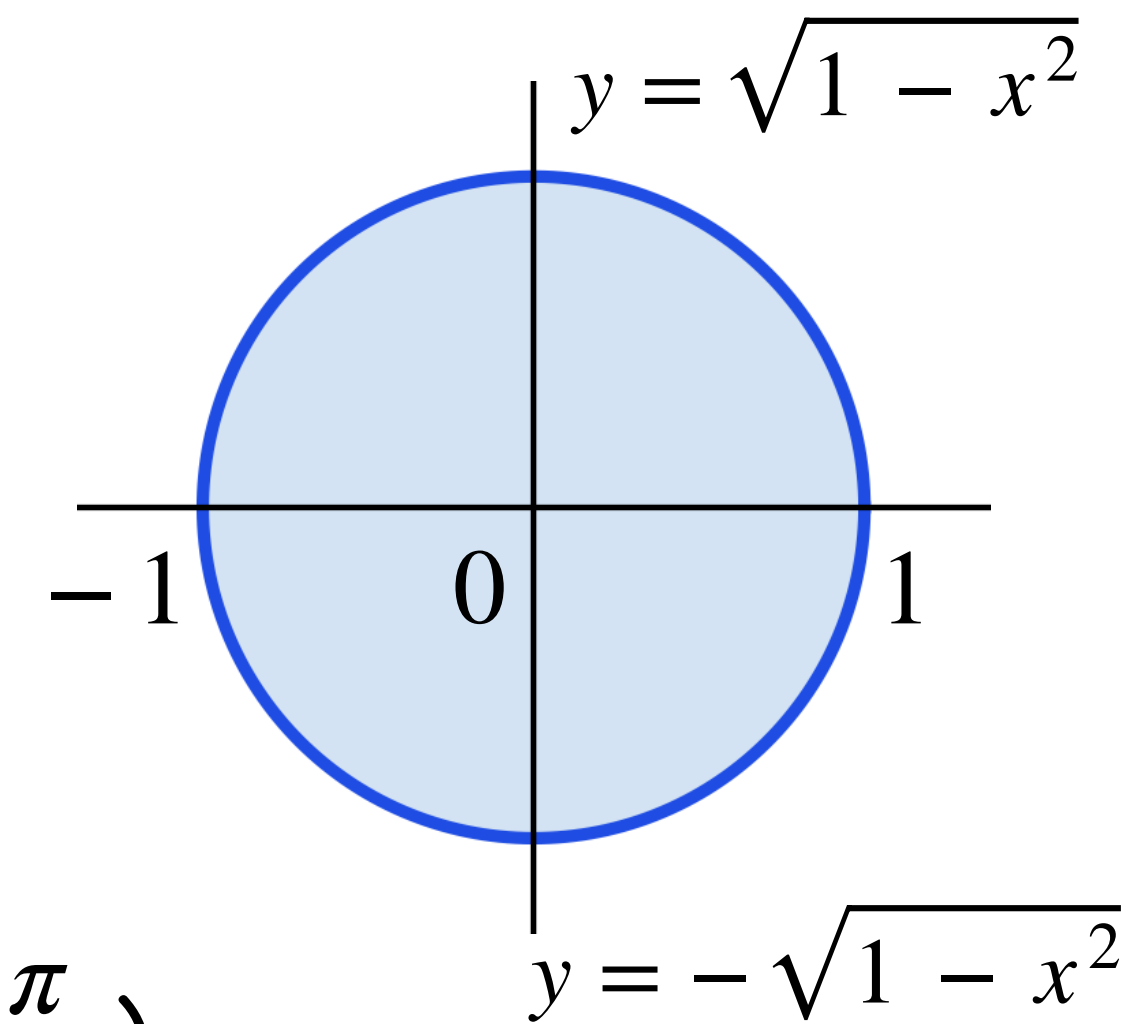
$$C : x^2 + y^2 = 1, \quad \oint_C (P dx + Q dy) = \oint_C (-y) dx + \oint_C x dy$$

$$\oint_C (-y) dx = \int_1^{-1} -\sqrt{1-x^2} dx + \int_{-1}^1 -\left(-\sqrt{1-x^2}\right) dx$$

$$= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi \quad \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \text{ は単位円の上半分の面積} = \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\oint_C x dy = \int_1^{-1} -\sqrt{1-y^2} dy + \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy = \pi$$

以上をあわせて、 $\oint_C (P dx + Q dy) = \pi + \pi = 2\pi$ と求まる。



グリーンの定理（回転型） 計算例（４）

20

つぎに右辺 $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ を計算しよう。

$P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$ であったから、

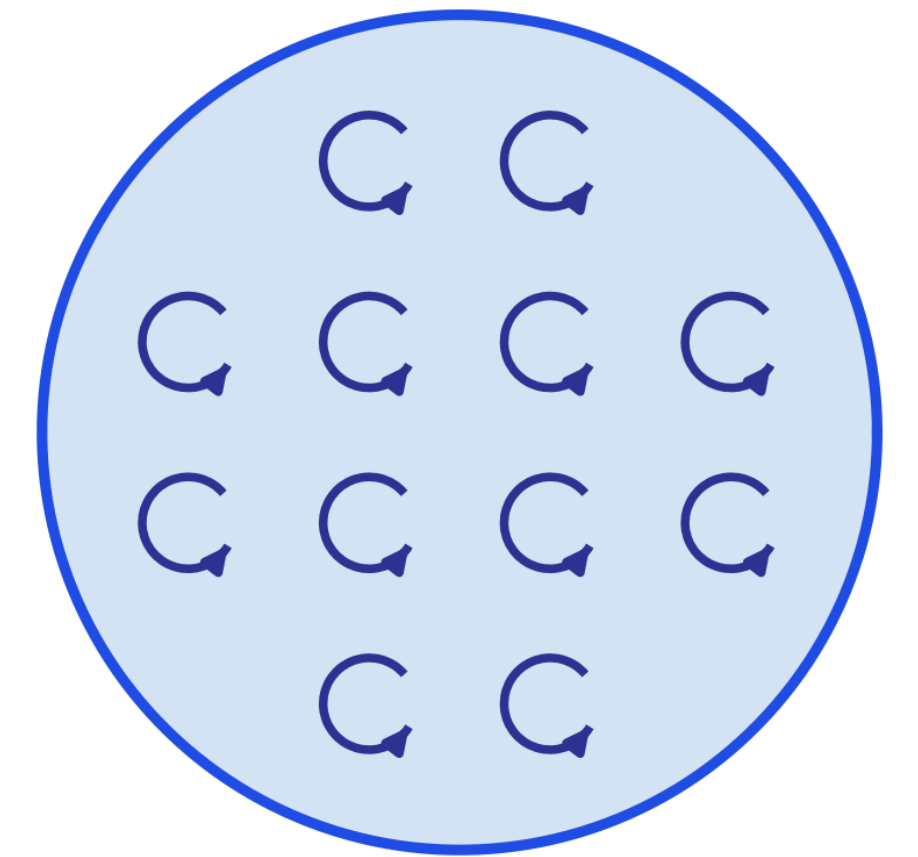
$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2$ となる。したがって、

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 2 dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2\pi$$

（ D は単位円板だからその面積は π である。）

この例では、 D におけるどの点でも $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$ と一定になる。

つまり、領域内部では一様に反時計回りの回転があるということ。



グリーンの定理（回転型） 計算例（5）

21

以上より、この例ではグリーンの定理（回転型）の両辺が一致した（共に 2π ）。

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

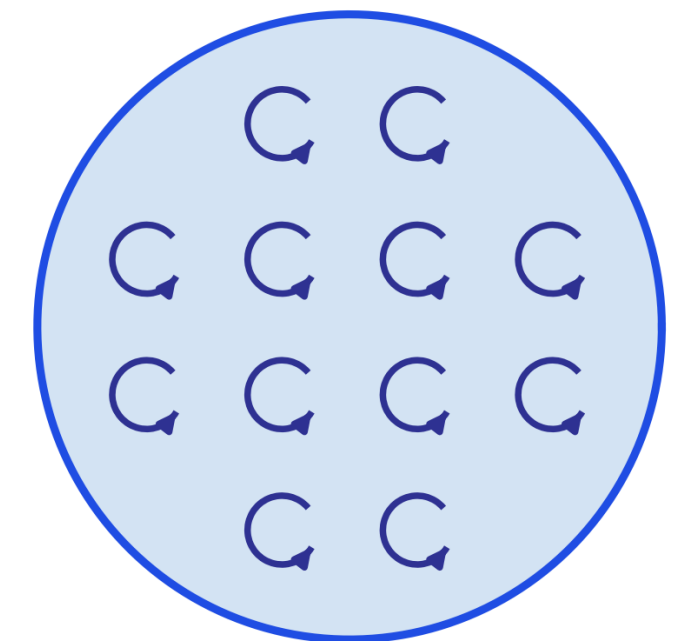
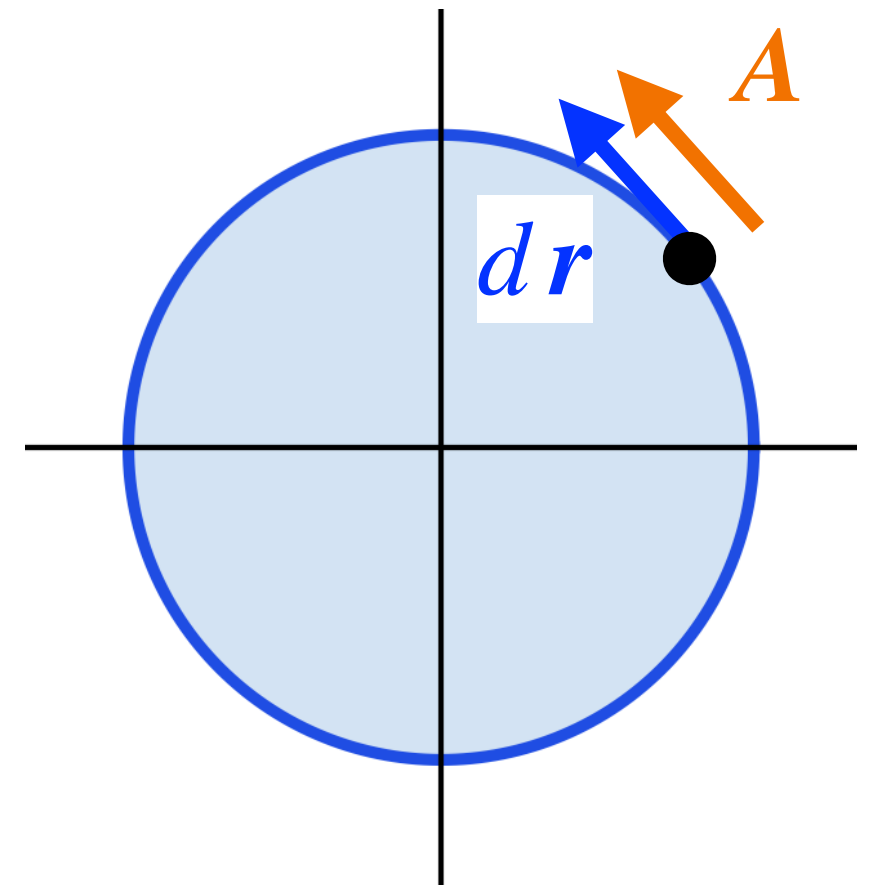
左辺 $\oint_C (P dx + Q dy) = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ は、

境界 C に沿ってベクトル場 $\mathbf{A}$ がどれだけ接線方向に向いているかを足し合わせた量、すなわち循環を表す。

右辺 $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ は、局所的な回転の強さを

領域 D にわたってすべて足し合わせた量である。

すなわち「境界に沿う循環」＝「内部の回転の総和」が成り立つ。



グリーンの定理（発散型）

D を、区分的に滑らかな単純閉曲線 $C = \partial D$ が正の向きに囲む有界領域とする。

$P(x, y)$, $Q(x, y)$ は、 D とその境界を含む開領域上で C^1 級とする。

このときつぎの関係が成り立つ。

$$\oint_C (P dy - Q dx) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

左辺は、境界 C を通って外へ出る流束を表し、

右辺は領域 D の内部での発散の総和を表す。

この定理は、「境界を通して外へ出る量」＝「内部での湧き出しの総和」を表している。

グリーンの定理（発散型）の左辺（１）

23

グリーンの定理（発散型）の左辺を見てみよう。

$$\oint_C (P dy - Q dx)$$

曲線 C の媒介変数表示を $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ ($a \leq t \leq b$) とし、

P, Q により定まるベクトル場を $\mathbf{A}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ とする。

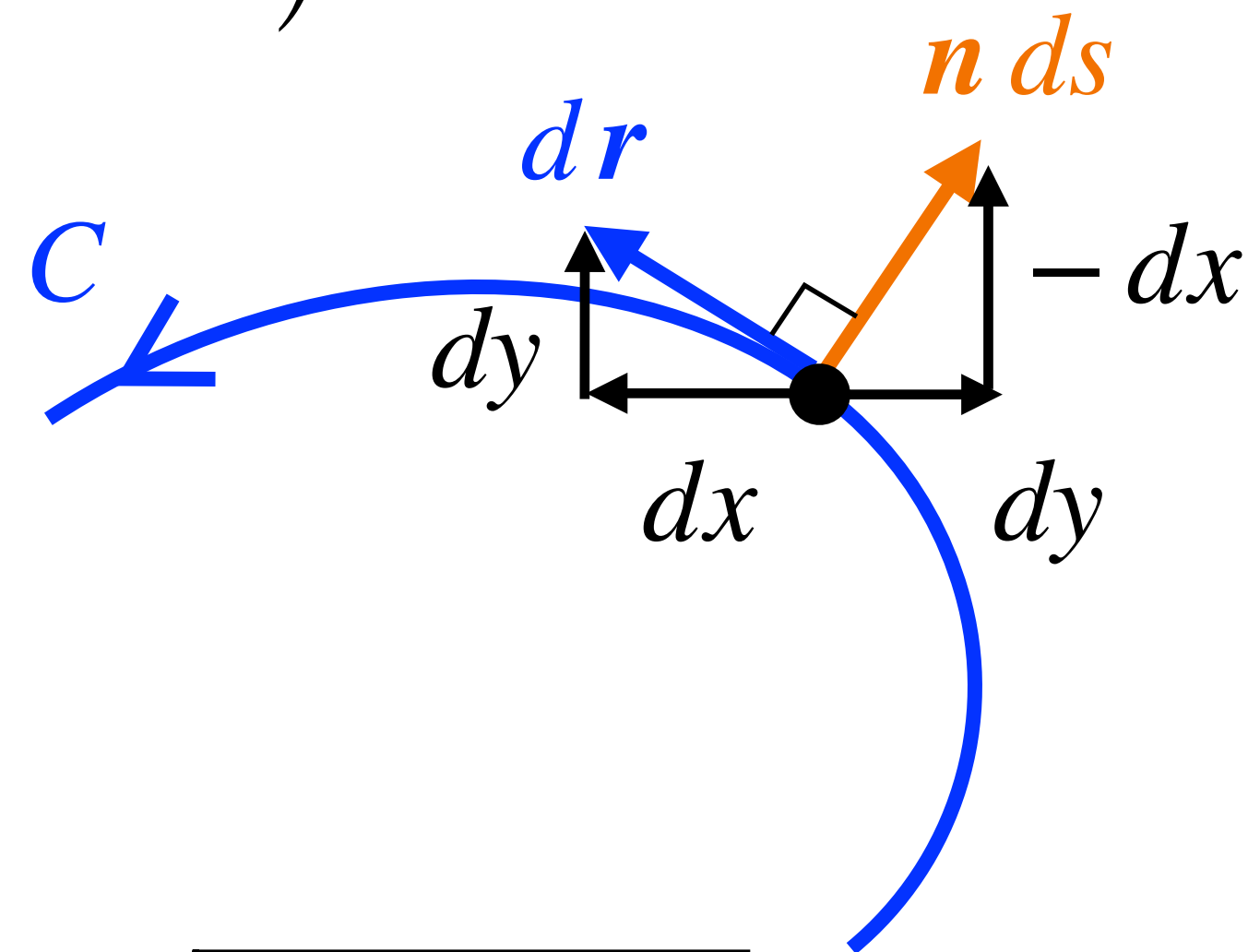
このとき曲線 C 上の各点での微小接ベクトルは

$$d\mathbf{r} = (dx, dy)$$

であり、正の向きに進むとき、

外向き法線方向の微小ベクトルは $(dy, -dx)$ と表せる。

これを $n ds = (dy, -dx)$ と表す。ここで $ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$,



グリーンの定理（発散型）の左辺（2）

24

n は外向きの法単位ベクトルを表す。

$$A \cdot n ds = (P, Q) \cdot (dy, -dx) = P dy - Q dx$$

を得る。したがって、左辺は

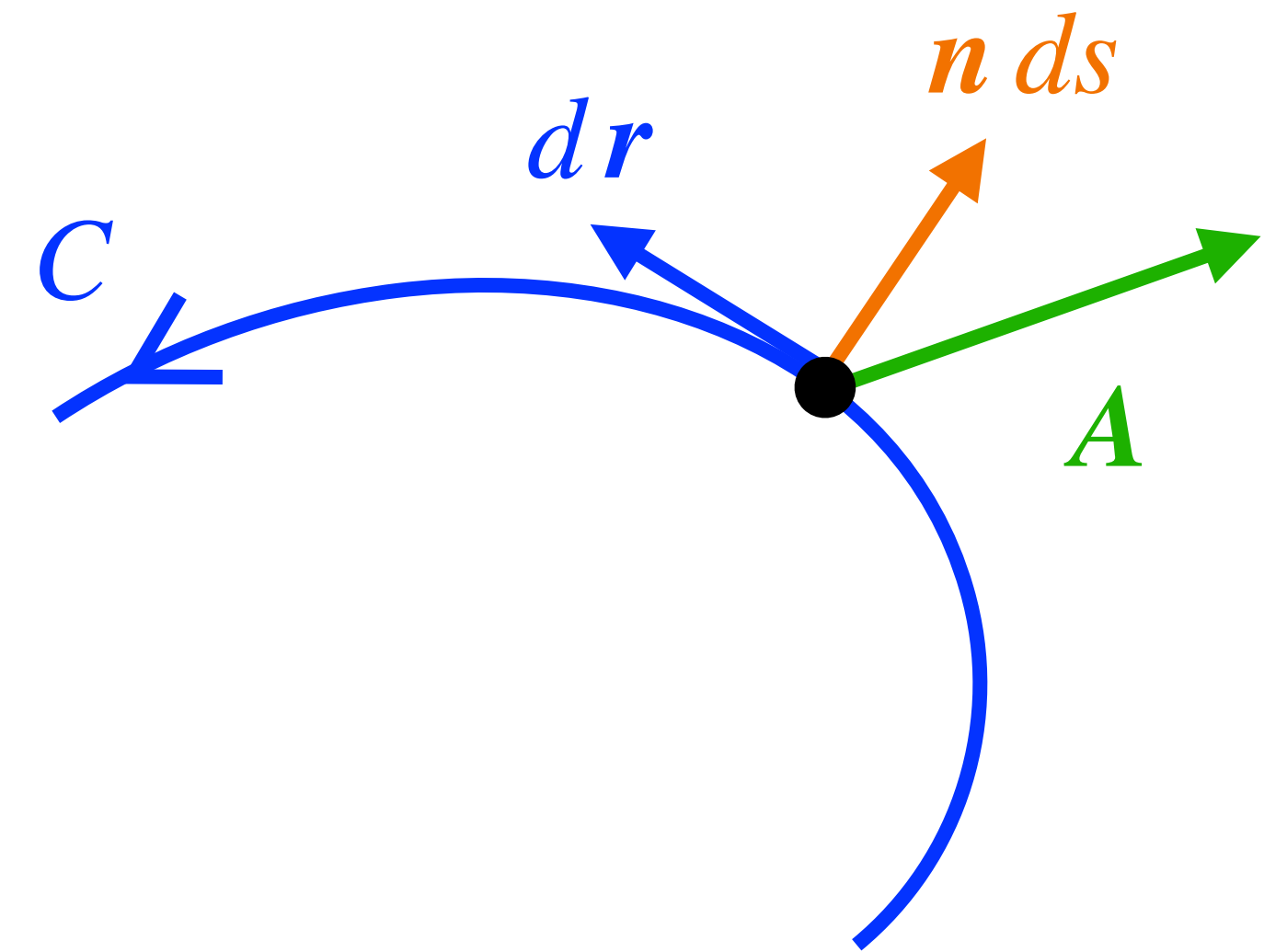
$$\oint_C (P dy - Q dx) = \oint_C A \cdot n ds$$

と表せる。これはすなわち、境界 C を通って

ベクトル場 A がどれだけ外へ出ていくかを足し合わせた量である。

この量を、平面ベクトル場 A の境界 C を通る **流束** という。

ベクトル場 A が C に対して外向きなら正の値、内向きなら負の値となり、接線方向しか持たなければ寄与しない。



グリーンの定理（発散型）の右辺（１）

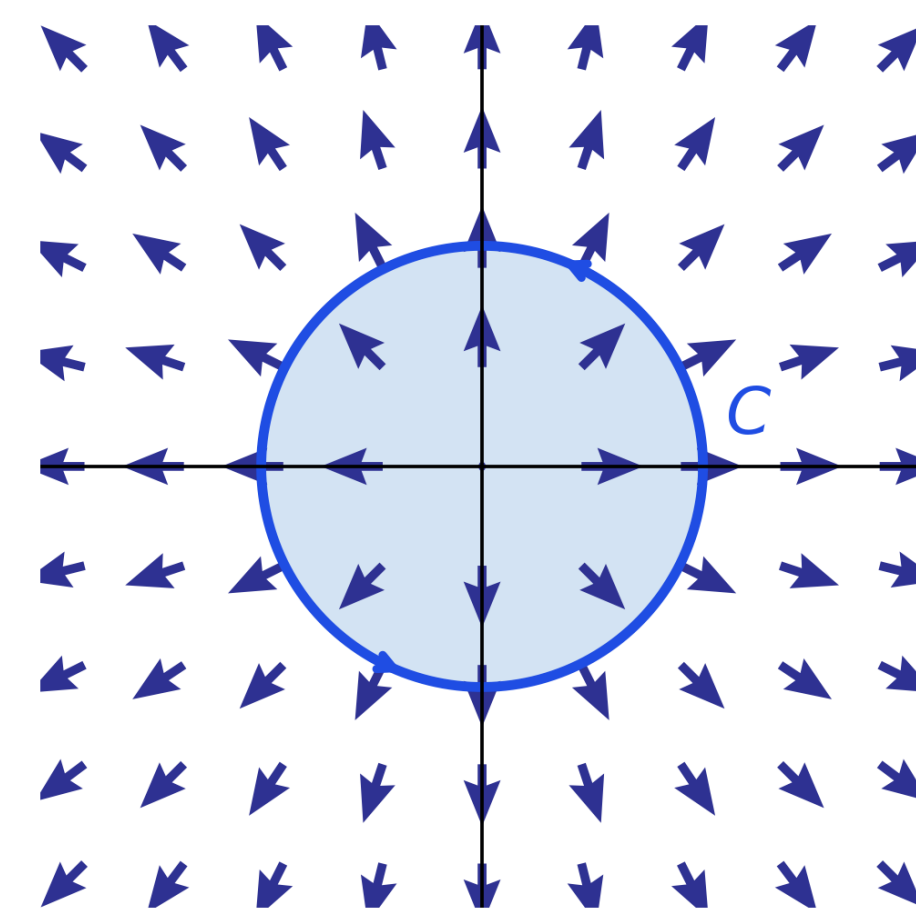
25

つぎに、グリーンの定理（発散型）の右辺を見てみよう。

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

ここで、 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ は平面ベクトル場 $A = (P(x, y), Q(x, y))$

の発散にあたる。



平面ベクトル場 $A(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ を 3 次元ベクトル場 $(P(x, y), Q(x, y), 0)$

とみなすと、発散は $\operatorname{div} A = \nabla \cdot A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + 0 = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ となる。

グリーンンの定理（発散型）の右辺（2）

26

$\frac{\partial P}{\partial x}$ は x 方向成分 P の x 方向への変化率、

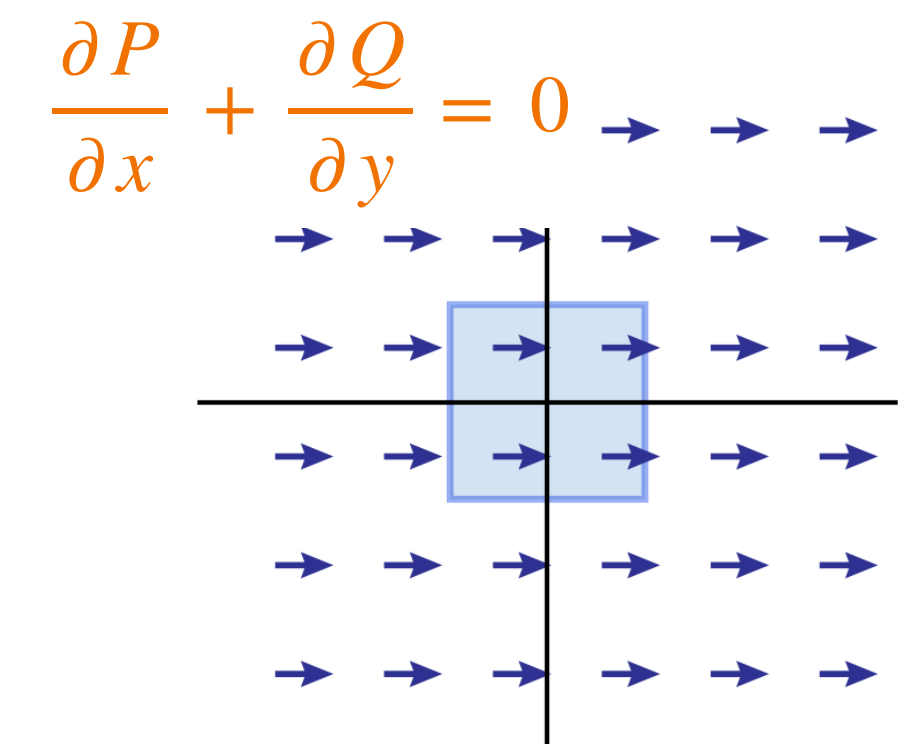
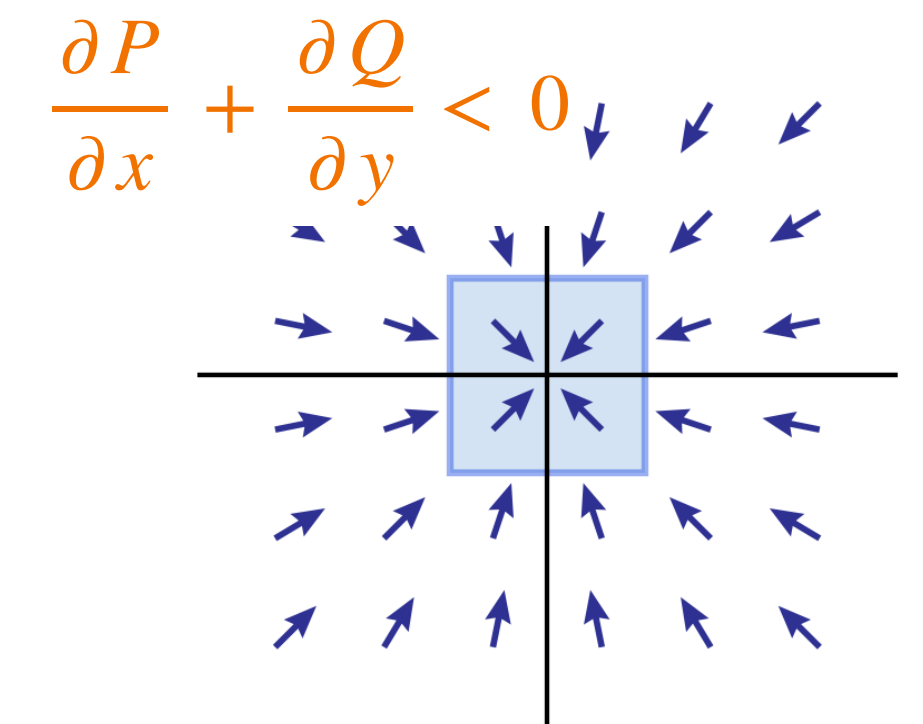
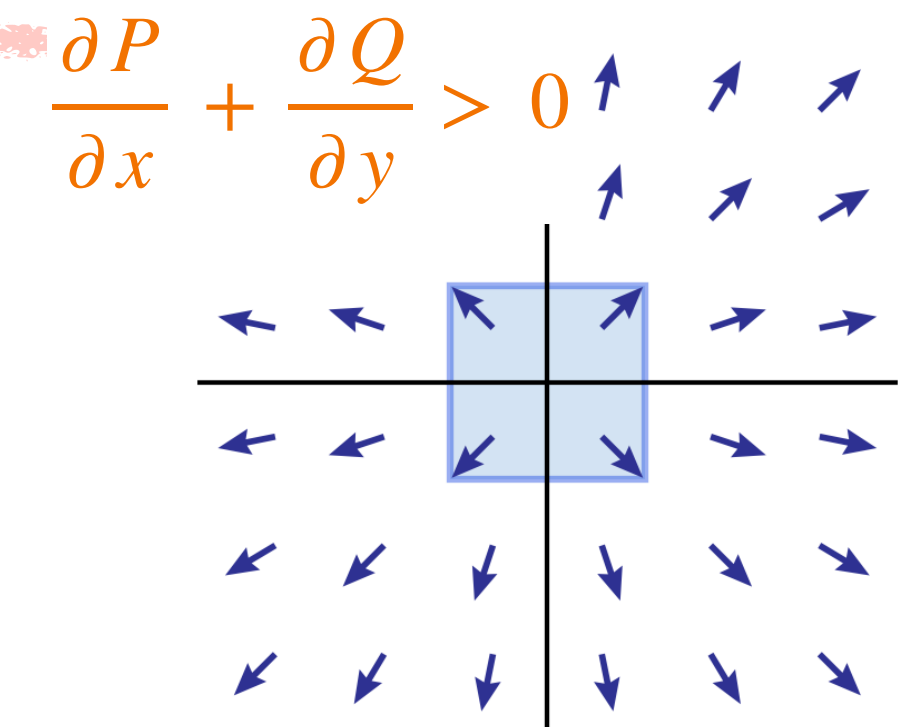
$\frac{\partial Q}{\partial y}$ は y 方向成分 Q の y 方向への変化率であるので、

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ は、その点のまわりでベクトル場が

どれだけ外へ湧き出しているかを表す。

正の値ならば湧き出しを表し、負の値なら吸い込みを表す。

0 の場合には局所的に出入りが釣り合っている状態。

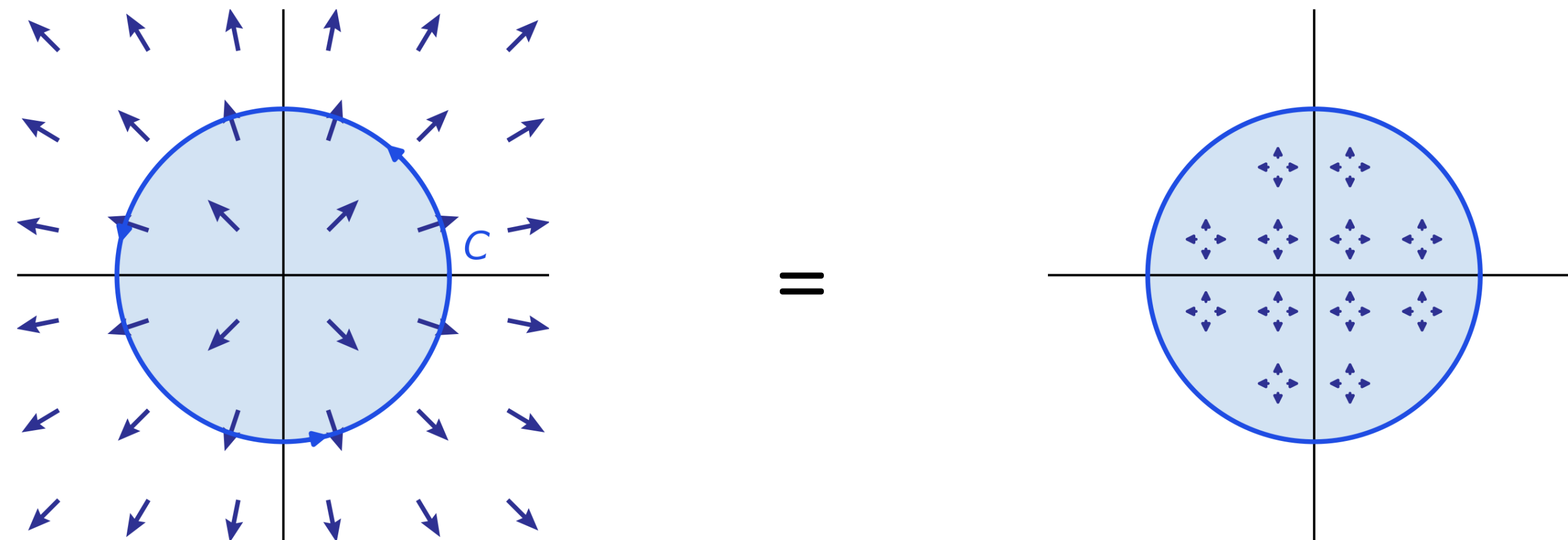


グリーンの定理（発散型） まとめ

$$\oint_C (P dy - Q dx) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

左辺は、境界 C に沿う外向き法線成分の線積分（流束）を表し、
右辺は、 D の内部での発散の総和を表す。

すなわち、「境界を通過して外へ出る量」＝「内部での湧き出しの総和」



グリーンの定理（発散型） 計算例（１）

xy 平面上の単位円板 $D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \}$ と、

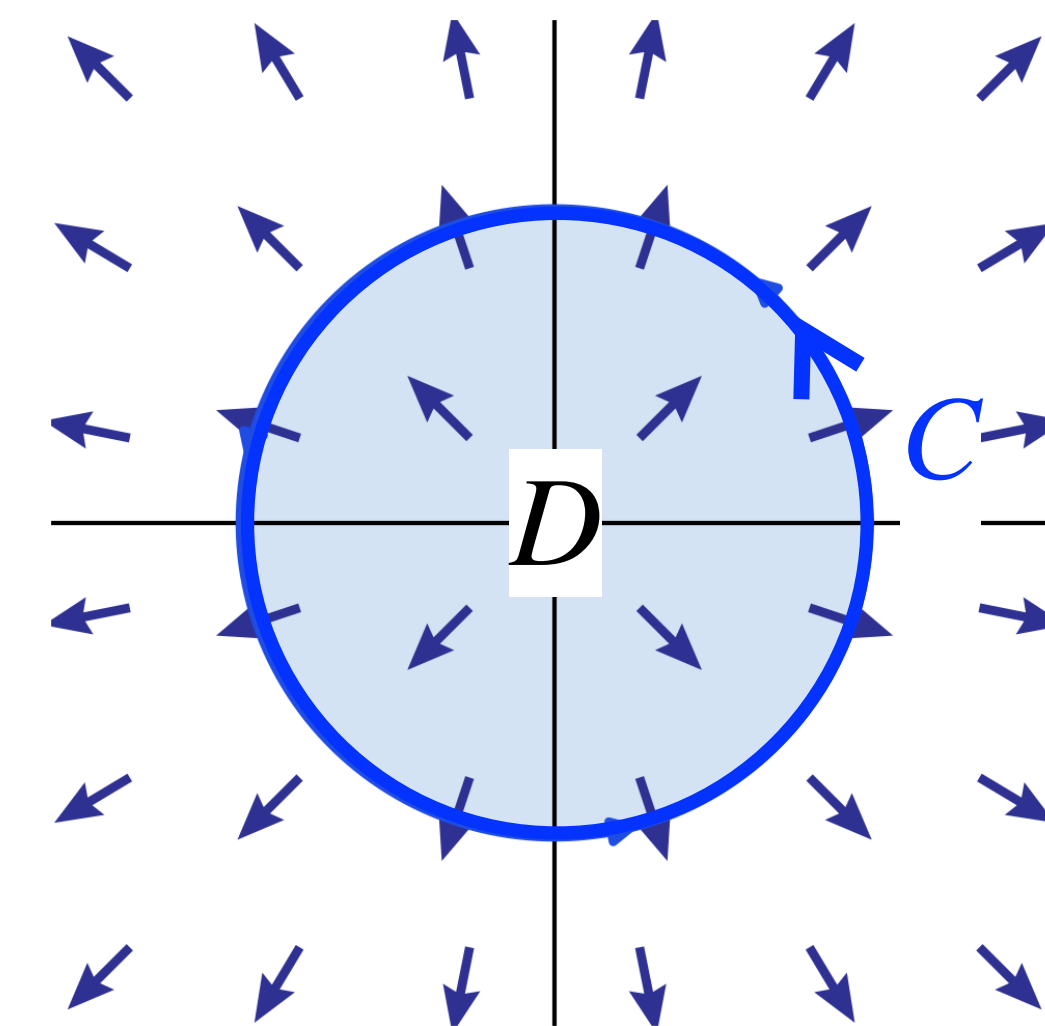
その境界 $C : x^2 + y^2 = 1$ を正の向き（反時計回り）にとる。

平面ベクトル場 $A(x, y) = (x, y)$ に対して、

グリーンの定理（発散型）

$$\oint_C (P dy - Q dx) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

の両辺を計算し、実際に一致することを確認してみよう。



グリーンの定理（発散型） 計算例（2）

29

左辺 $\oint_C (P dy - Q dx) = \oint_C (x dy - y dx)$ を求めよう。

曲線 C （単位円）の媒介変数表示は

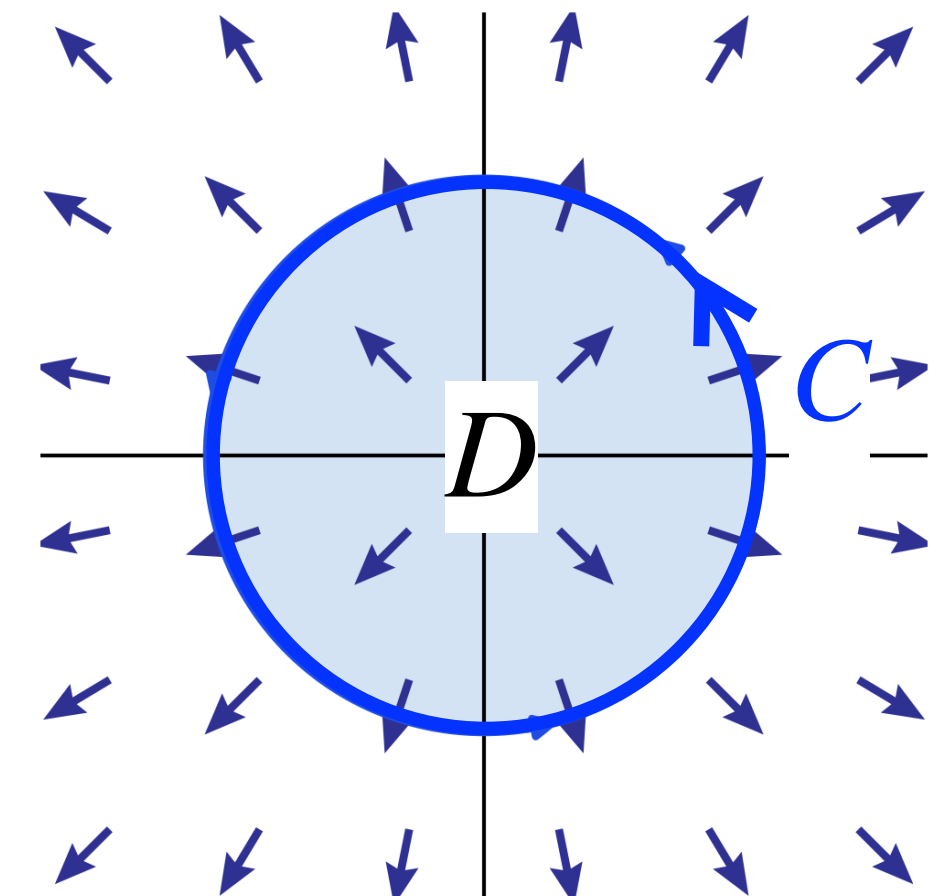
$$C : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t, \cos t) \text{ より } d\mathbf{r} = (-\sin t, \cos t) dt, dx = -\sin t dt, dy = \cos t dt$$

$$x dy - y dx = \cos t \cos t dt - \sin t (-\sin t) dt = dt$$

したがって、

$$\oint_C (P dy - Q dx) = \oint_C (x dy - y dx) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \text{ を得る。}$$



グリーンの定理（発散型） 計算例（3）

30

左辺は $\oint_C (P dy - Q dx) = \oint_C A \cdot n ds$ と表せるのであった。

この例の場合の $\oint_C A \cdot n ds$ も計算して求めてみよう。

$A = (x, y)$, C は単位円であるから、

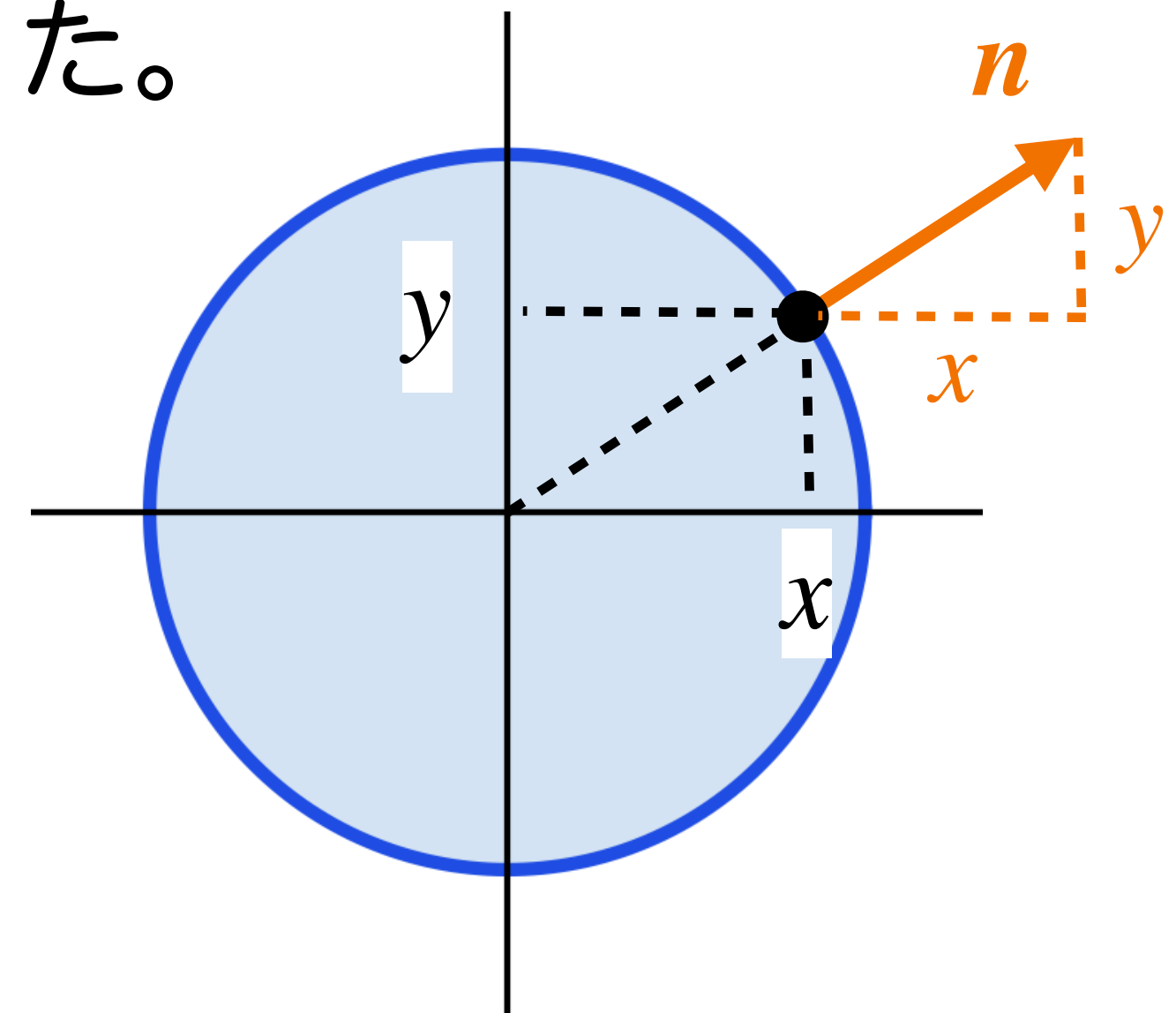
C 上の点 (x, y) における外向き法単位ベクトルは

$n = (x, y)$ となる。したがって、

$A \cdot n = (x, y) \cdot (x, y) = x^2 + y^2 = 1$ ((x, y) は単位円周上の点であった)

これより以下を得る。

$$\oint_C A \cdot n ds = \oint_C 1 ds = 2\pi \quad \left(\oint_C ds \text{ は } C \text{ の弧長} \right)$$



グリーンの定理（発散型） 計算例（4）

31

つぎに右辺 $\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$ を計算しよう。

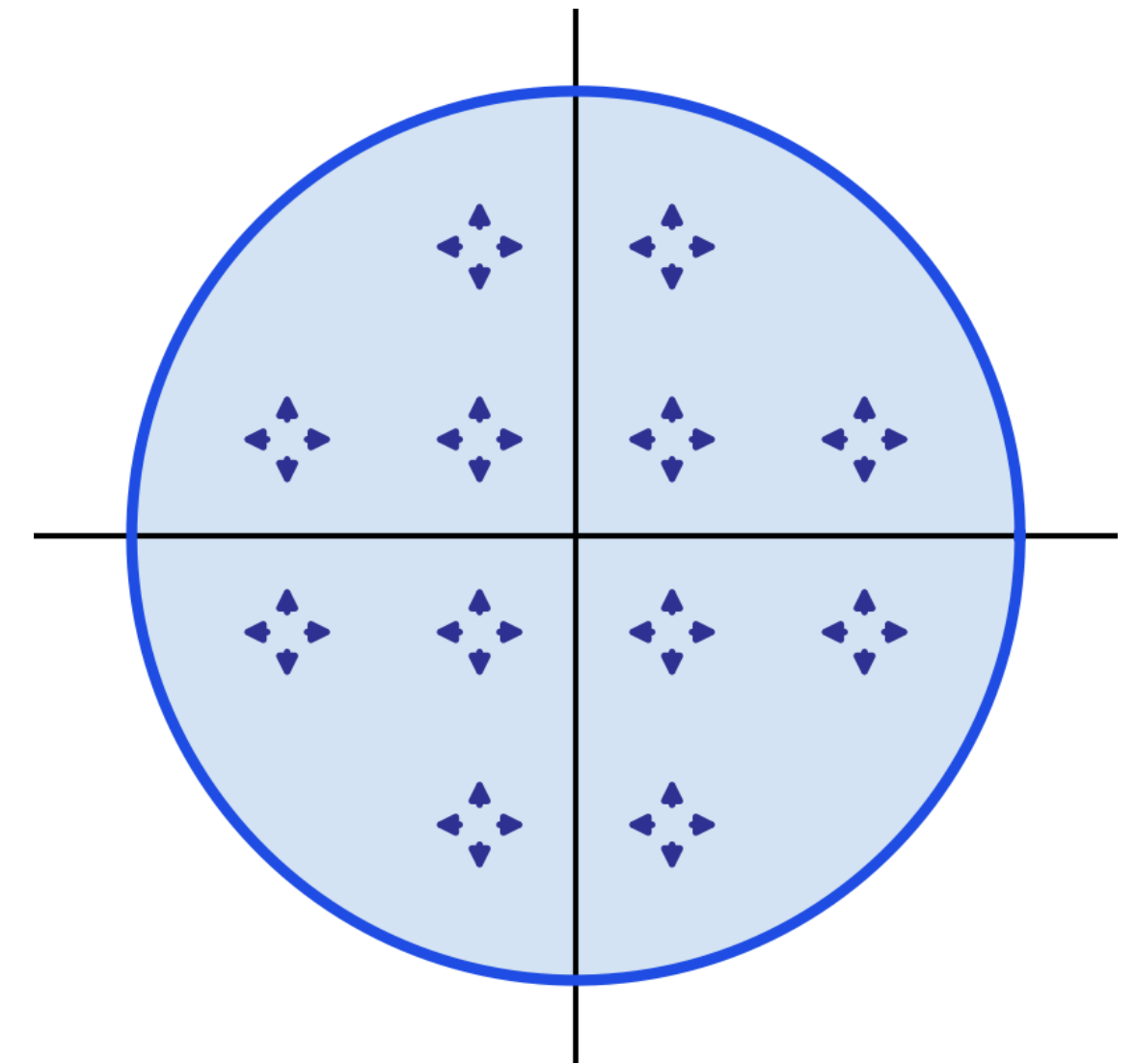
$P(x, y) = x$, $Q(x, y) = y$ であったから、

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 + 1 = 2$ となる。したがって、

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D 2 dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2\pi$$

この例では、領域 D におけるどの点でも発散 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ が 2 と一定である。

領域内部では一様な湧き出しがあることを意味している。



グリーンの定理（発散型） 計算例（5）

32

以上より、この例ではグリーンの定理（発散型）の両辺が一致した（共に 2π ）。

$$\oint_C (P dy - Q dx) = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

左辺は境界 C を通って外へ出る量（＝流束）が 2π であると計算された。

右辺は、領域 D の内部での発散 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ を面積について足し合わせた量が 2π と求められた。
すなわちつぎが成り立つ。

「境界を通して外へ出る量」＝「内部での湧き出しの総和」

