

ベクトル解析

10回目講義

畠中 英里

本日の講義の流れ

- 前回の復習
- 本日の講義内容
 - ・ スカラーの面積分の計算
 - ・ ベクトルの面積分（＝流束）の計算
 - ・ 曲面の向き
 - ・ 閉曲面の流束の計算
 - ・ 体積分

前回の復習 (1)

○ 媒介変数による積分とスカラー線積分

スカラー場 $\varphi = \varphi(x, y, z)$, 空間曲線 $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \ (a \leq t \leq b)$

について、選んだ媒介表示 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ に対し、

$$\int_C \varphi dt = \int_a^b \varphi(\mathbf{r}(t)) dt$$

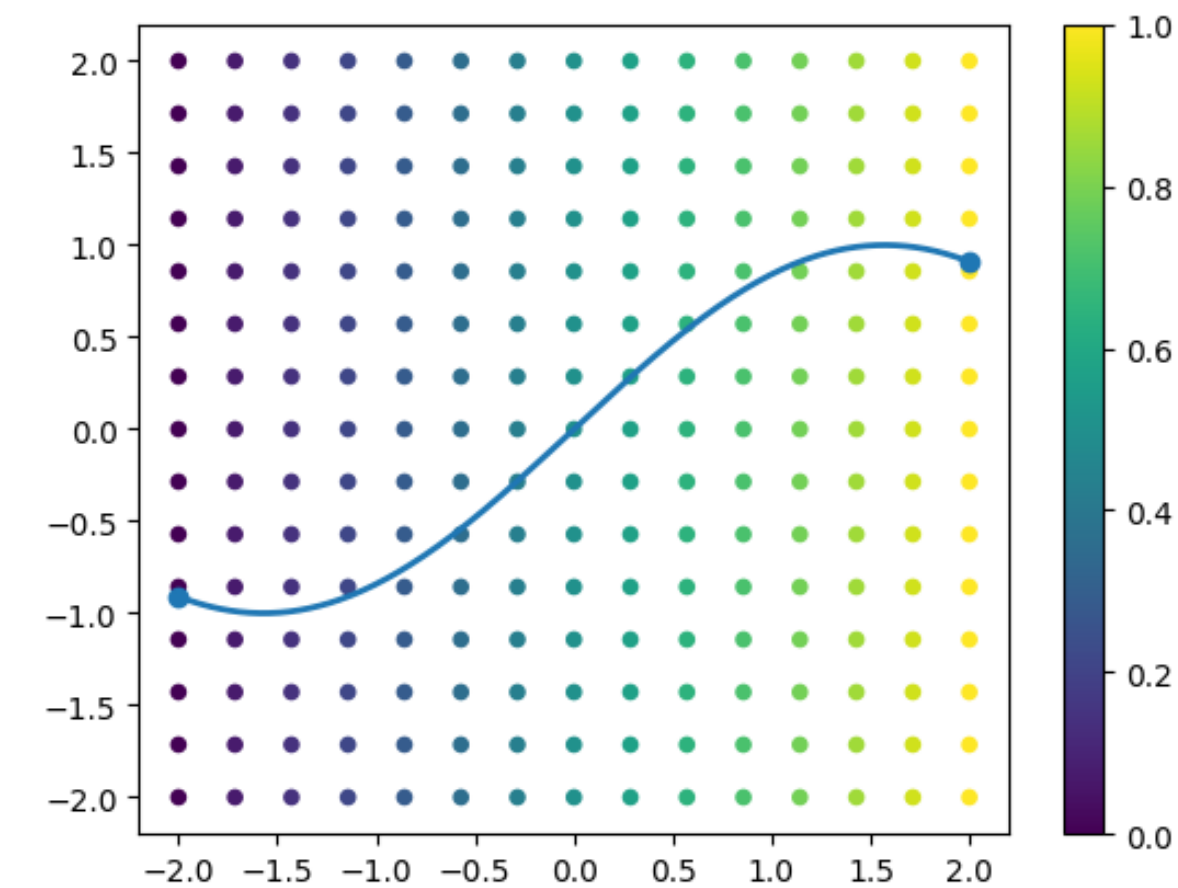
を考える。この値は、媒介表示 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ の取り方に依存する。

一方、弧長要素 ds を用いるスカラー線積分を

$$\int_C \varphi ds = \int_a^b \varphi(\mathbf{r}(t)) \frac{ds}{dt} dt = \int_a^b \varphi(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

と定める。この値は曲線 C の媒介表示の取り方や向きに依存しない。

$$\int_{-C} \varphi ds = \int_C \varphi ds$$



前回の復習 (2)

○ ベクトルの線積分

ベクトル場 $A = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$

ベクトル線積分の定義では、空間曲線 C を弧長パラメータ s で表した。

$$C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \quad (a \leq s \leq b)$$

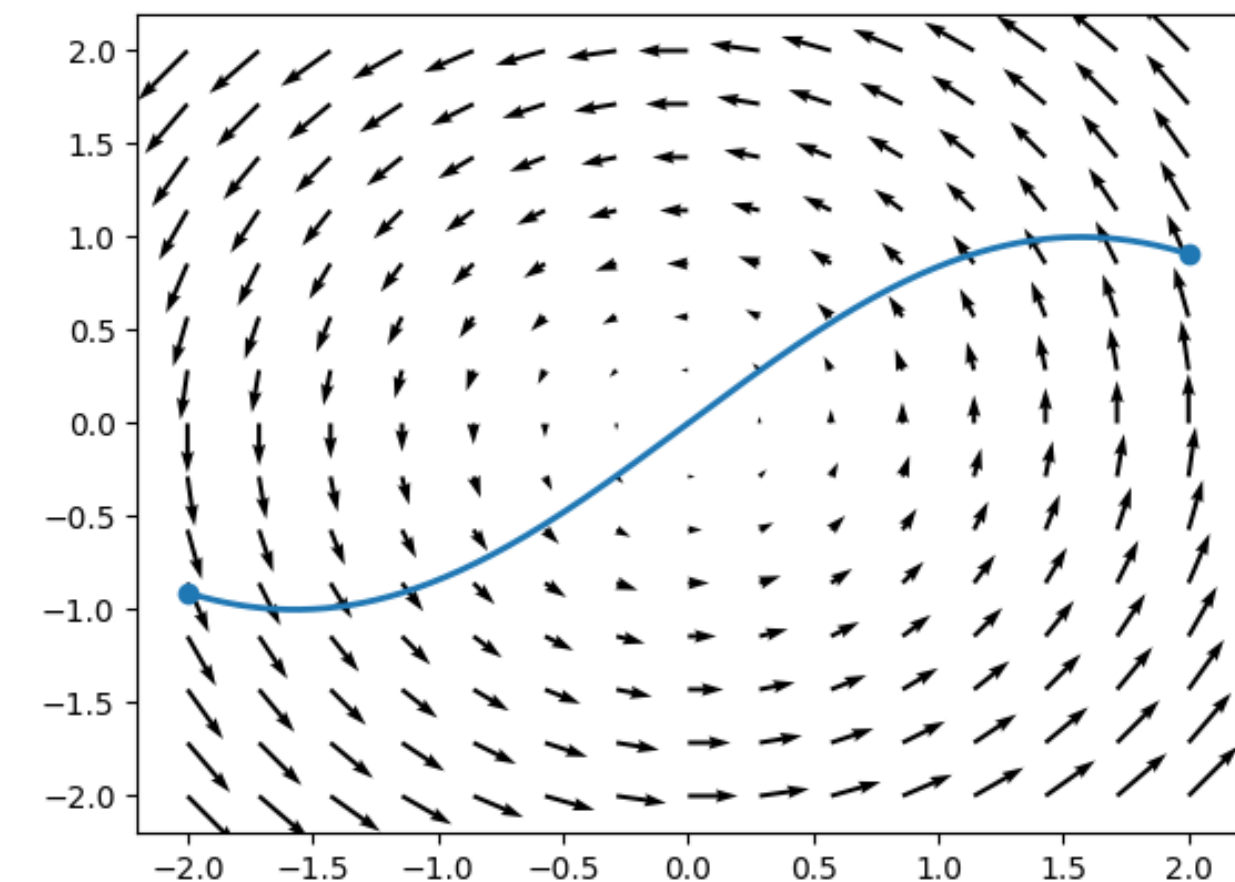
$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad \left(\mathbf{T} ds = \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = d\mathbf{r} \text{ となることより} \right)$$

実際の計算では、一般の媒介変数 t で表される空間曲線の表示を使う。

$$C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

とすればつぎのように t による 1 変数の積分で計算できる。

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$$



前回の復習 (3)

○曲面の媒介変数表示

2つの変数 u, v を用いて曲面 S をつぎのように表す。

$$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

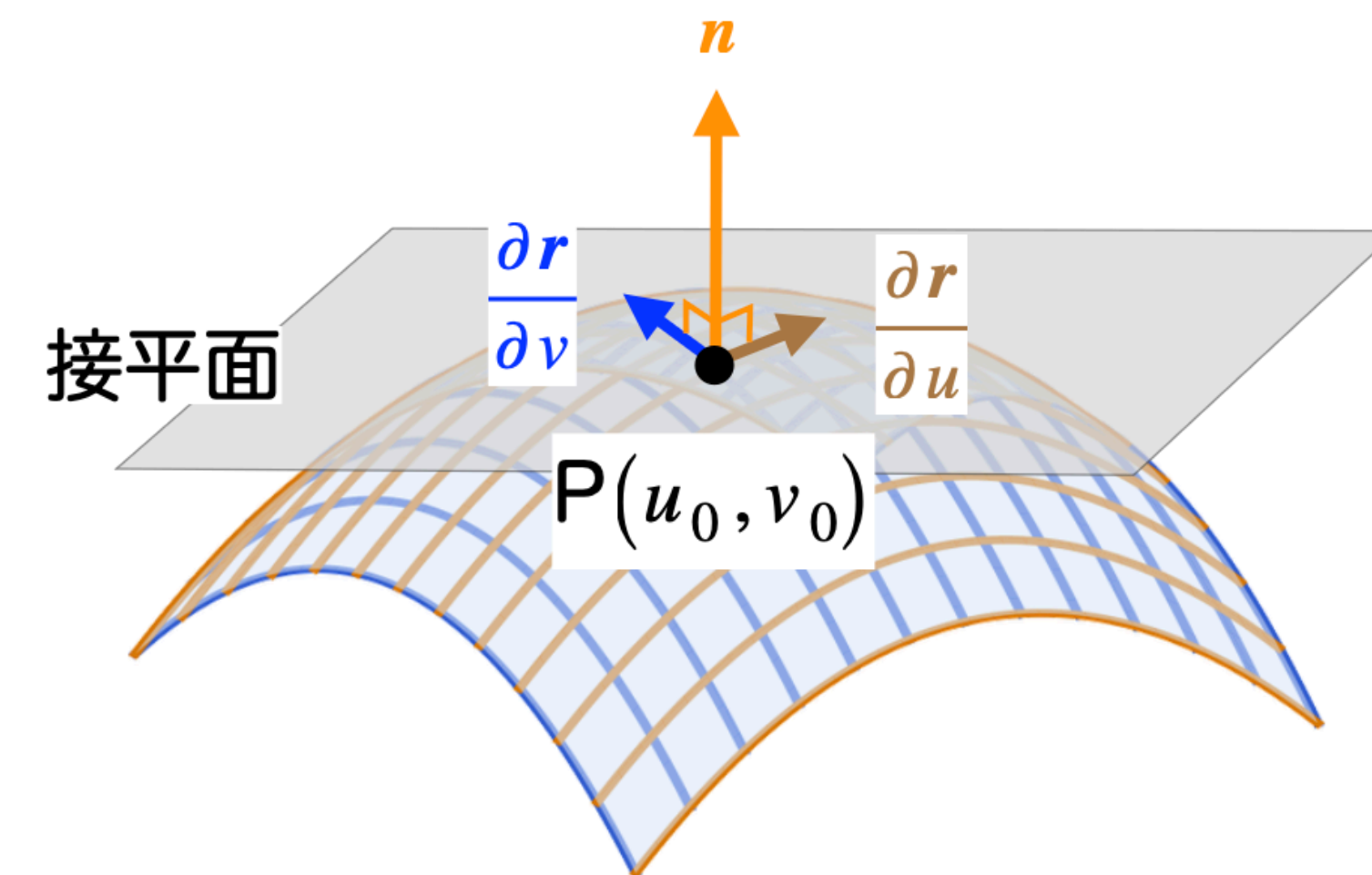
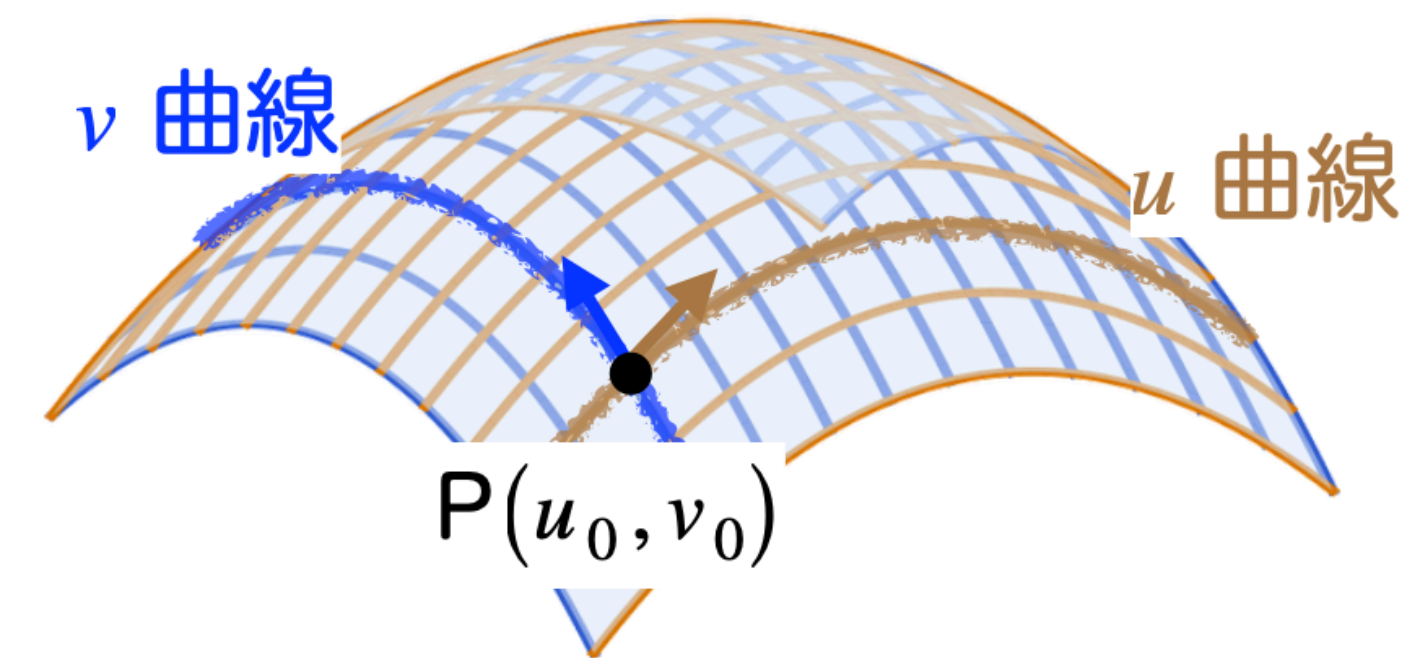
$v = v_0$ と固定して得られる S 上の曲線を u 曲線

$u = u_0$ と固定して得られる S 上の曲線を v 曲線 とよぶ。

点 P における接ベクトル $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ は P の 接平面 を張る。

また、外積 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ は点 P での接平面に垂直なベクトル。

正規化して、 $\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}$ を 法単位ベクトル という。



前回の復習 (4)

○ スカラーの面積分

スカラー場 $\varphi = \varphi(x, y, z)$, 曲面 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$

$$\iint_S \varphi dS = \iint_D \varphi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

○ ベクトルの面積分

ベクトル場 $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$, 曲面 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad \left(d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS, dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv, \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \right) \\ &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv = \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv \end{aligned}$$

いずれも、 D は uv 平面上の媒介変数領域である。

本日の講義

面積分の計算・体積分

スカラーの面積分の計算例（１）

平面 $z = 2x - y + 1$ のうち、

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$$

に対応する部分を S とする。

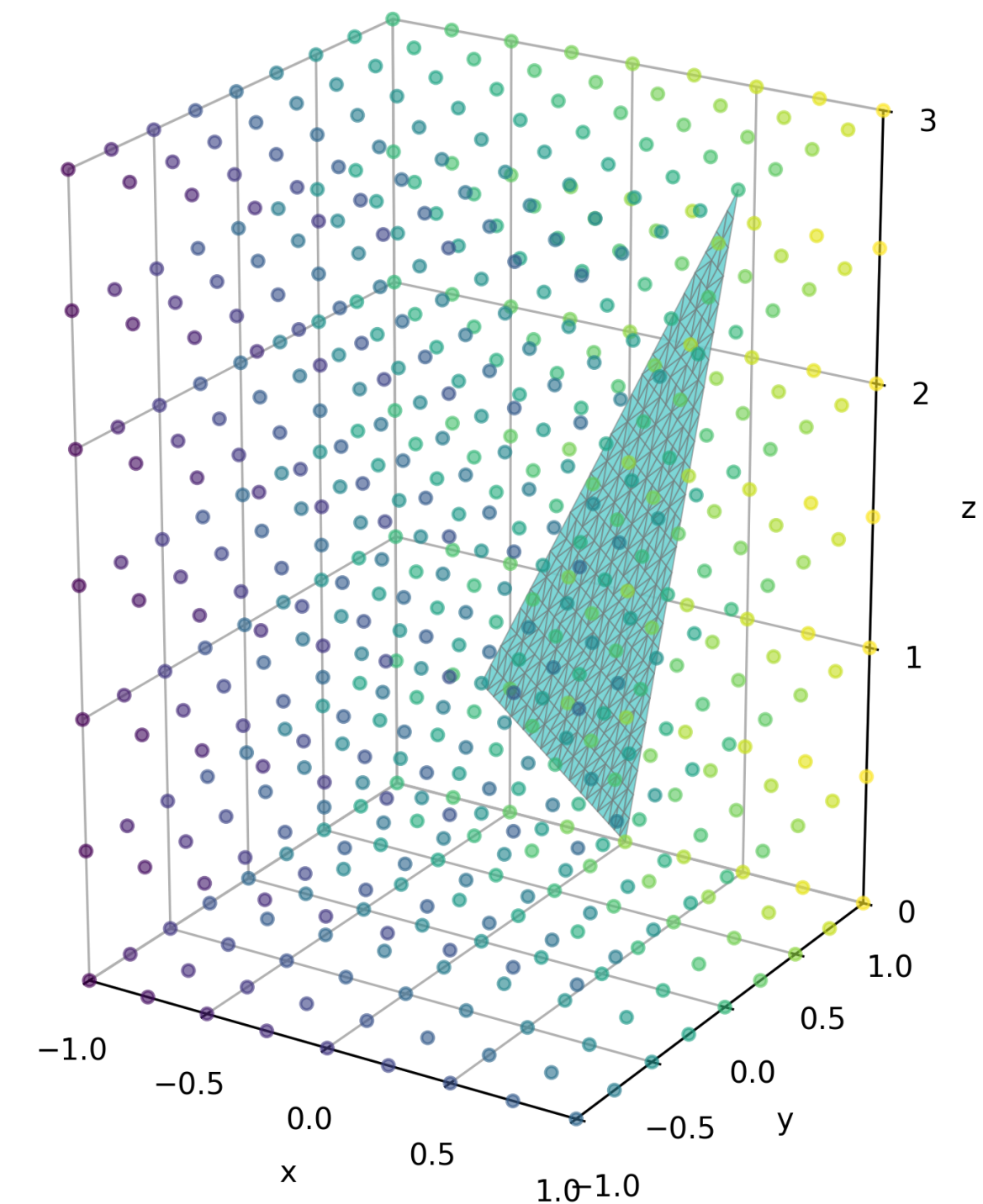
スカラー場 $\varphi(x, y, z) = x + 2y$ について、

φ の S 上での面積分 $\iint_S \varphi dS$ を求めよう。

まず、 S を 2 変数 u, v を用いて表そう。いま、 $u = x, v = y$ とおけば

$$S : \mathbf{r}(u, v) = (u, v, 2u - v + 1), 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u$$

と表せる。



スカラーの面積分の計算例（２）

$$\iint_S \varphi \, dS = \iint_D \varphi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv \text{ であつた。}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (1, 0, 2), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 1, -1) \text{ となることより、}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-2, 1, 1), \quad \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{6},$$

また、 $\varphi(\mathbf{r}(u, v)) = \varphi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = u + 2v$ より

$$\iint_S \varphi \, dS = \int_0^1 \int_0^{1-u} (u + 2v) \sqrt{6} \, dv du = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

と求まる。

スカラーの面積分のイメージ

スカラー場 φ の曲面 S 上での面積分は

$$\iint_S \varphi \, dS = \iint_D \varphi (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

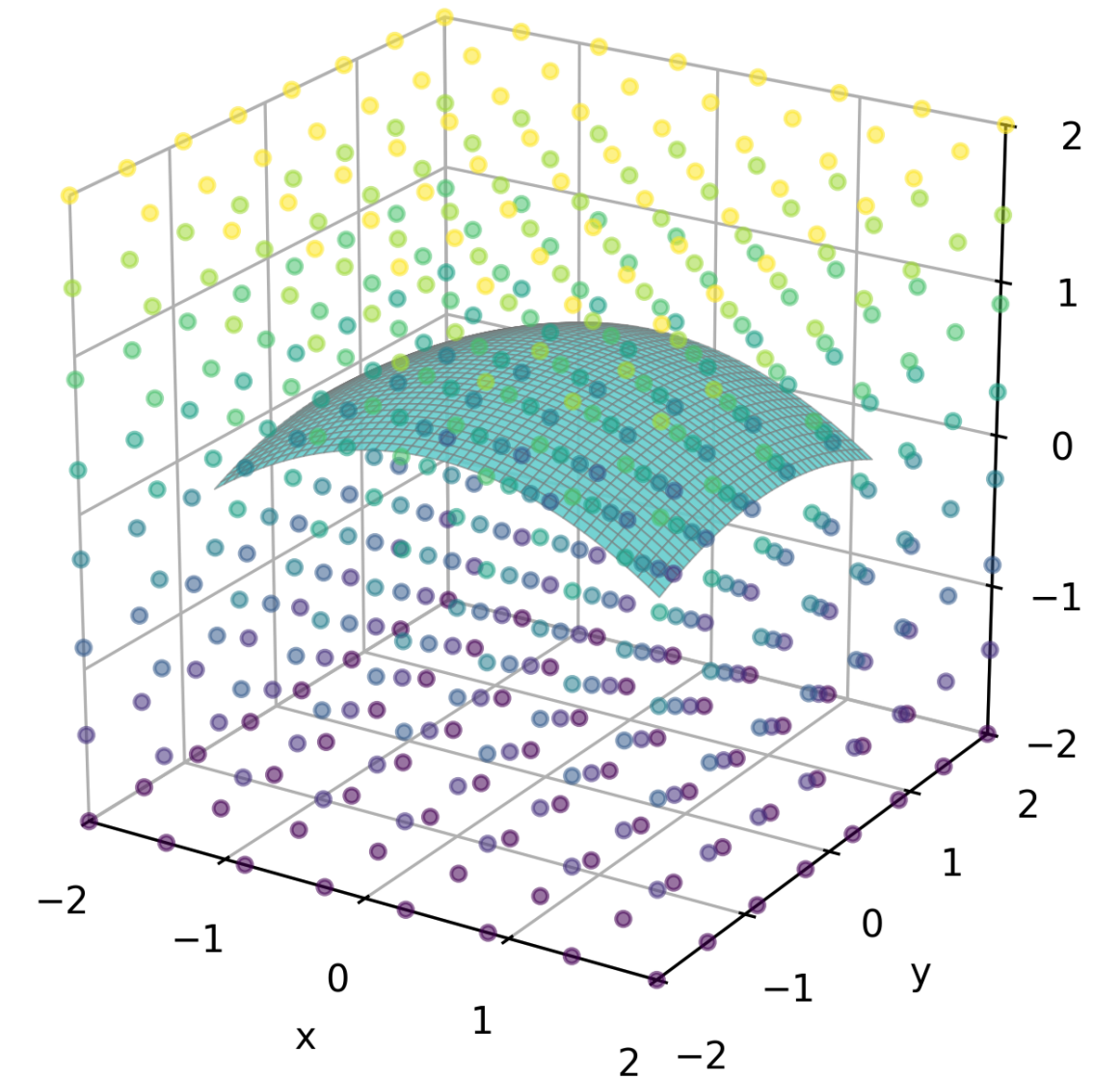
これは、曲面 S を細かく分割し、
各微小面の面積を ΔS_i 、代表点を P_i として

和 $\sum_{i=1}^n \varphi(P_i) \Delta S_i$ を考え、

分割の最大径を 0 に近づけた極限 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varphi(P_i) \Delta S_i$ に等しいのであった。

φ によって表される S 上の各点での「重み」をすべて足し合わせるイメージ。

なお、スカラーの面積分は曲面 S の向き（法線ベクトルの向き）に依存しない。



ベクトルの面積分の計算例 (1)

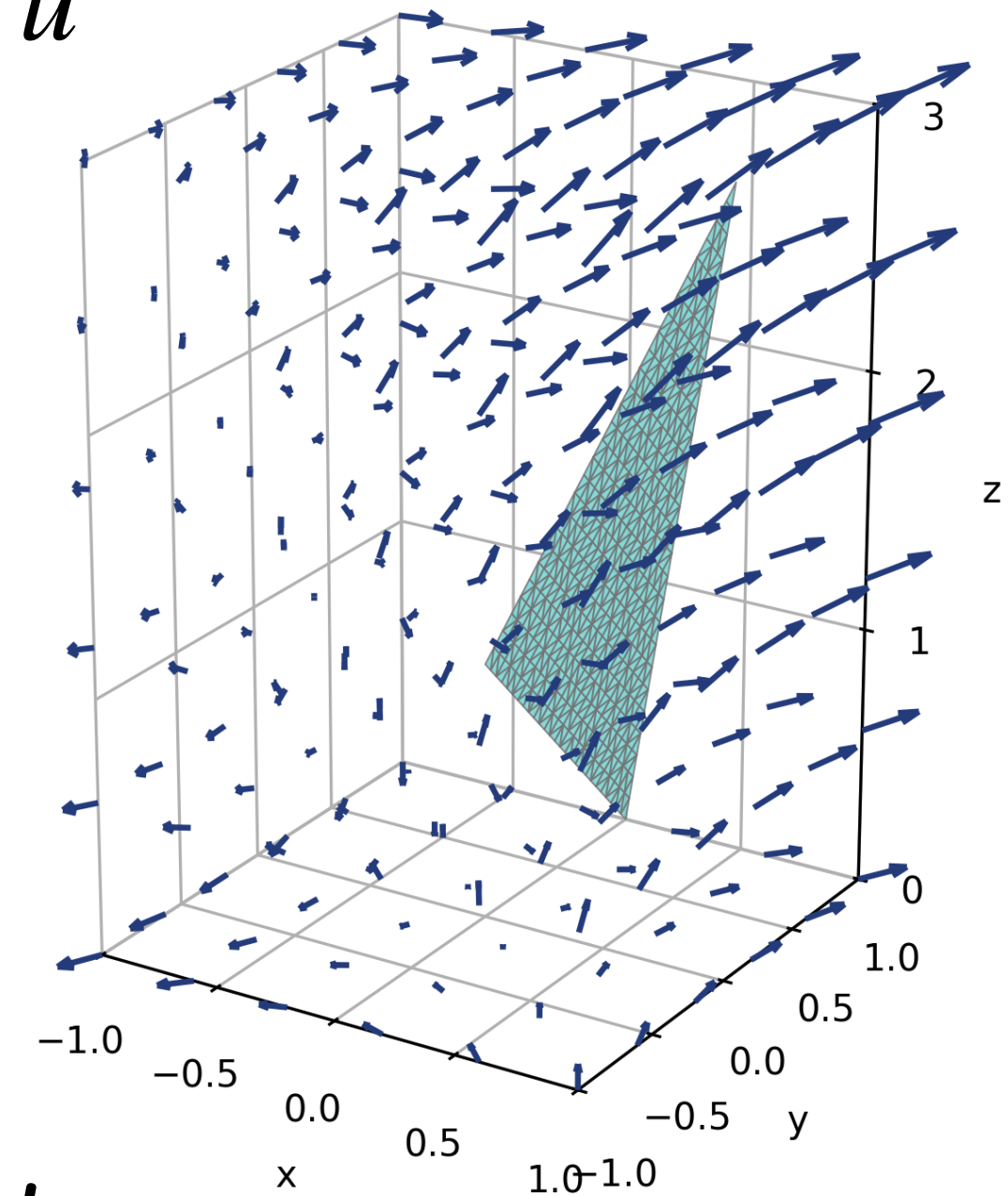
8 ページと同じ曲面 S を用いる。

$$S : \mathbf{r}(u, v) = (u, v, 2u - v + 1), 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u$$

ベクトル場を $\mathbf{A}(x, y, z) = (x + y, z, x)$ とし、

曲面の向きは、 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ が定める向きに従うとする。

$\mathbf{A}$ の S 上での面積分 $\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ を求めよう。



$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D \mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv \text{ であった。}$$

$$\left(\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \bigg/ \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|, dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv \text{ より従う。} \right)$$

ベクトルの面積分の計算例 (2)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) = \mathbf{A}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u + v, 2u - v + 1, u),$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-2, 1, 1) \text{ であったから、}$$

$$\mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = (u + v, 2u - v + 1, u) \cdot (-2, 1, 1) = u - 3v + 1$$

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^{1-u} (u - 3v + 1) dv du = \frac{1}{6} \text{ と求まる。}$$

一般にベクトル面積分では、曲面 S の向きを逆にすると符号が反転する。

$$\iint_{-S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = - \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

曲面の向き

曲面 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ の向きは $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ の向きで定まるのであった。

空間曲線 C について、向きを逆にしたものを $-C$ と表したのと同様に、

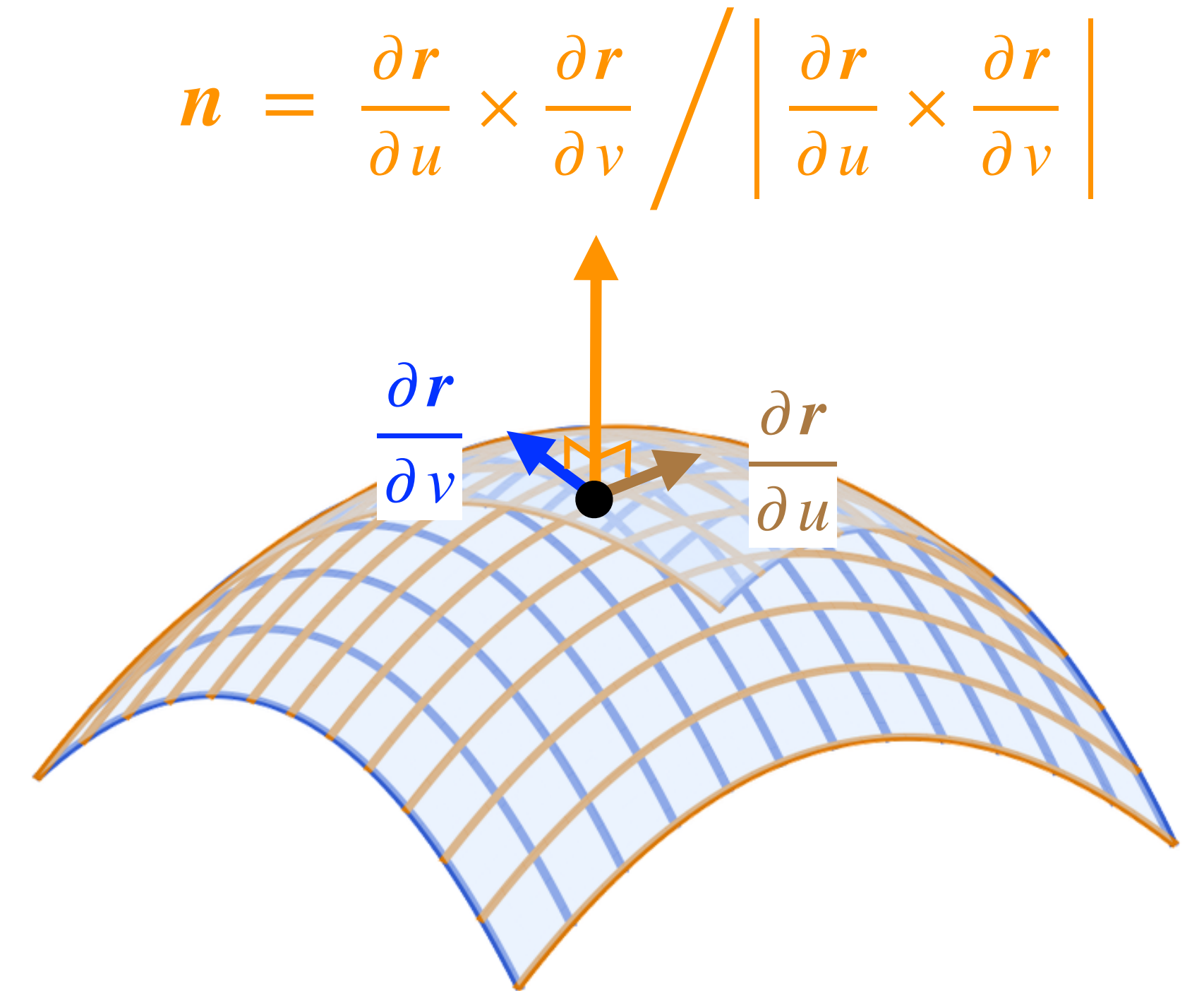
曲面 S の向きを逆にしたものを $-S$ と表そう。

曲面では、媒介変数の順序を入れ替えると向きが反転する。

外積の性質より

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

が成り立つことから、媒介変数の順序を入れ替えると法線方向が反転する。



曲面の向きを逆にした場合の計算法

曲面 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ の向きは $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ の向きで定まる。

したがって、向きを逆にした曲面 $-S$ では、ベクトル面積素を

$$d\mathbf{S}_{-S} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) du dv = - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv$$

ととればよい。よって

$$\iint_{-S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) du dv = - \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

となる。

ベクトル面積分の計算（向きを逆にした場合）¹⁵

$$S : \mathbf{r}(u, v) = (u, v, 2u - v + 1), 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u$$

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (x + y, z, x)$$

曲面 S の向きを逆にした $-S$ について、改めてベクトルの面積分を計算しよう。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) = \mathbf{A}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u + v, 2u - v + 1, u)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-2, 1, 1) \text{ より } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -(-2, 1, 1)$$

$$\mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) = - \mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = - (u + v, 2u - v + 1, u) \cdot (-2, 1, 1) = - (u - 3v + 1)$$

$$\iint_{-S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) du dv = \int_0^1 \int_0^{1-u} - (u - 3v + 1) dv du = -\frac{1}{6} \blacksquare$$

ベクトルの面積分のイメージ

ベクトル場 A の曲面 S 上での面積分は

$$\iint_S A \cdot dS = \iint_S A \cdot \boldsymbol{n} dS = \iint_D A \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right) du dv$$

これは、ベクトル場 A が曲面 S を貫く量を表している。

この量を **流束** とよぶ。

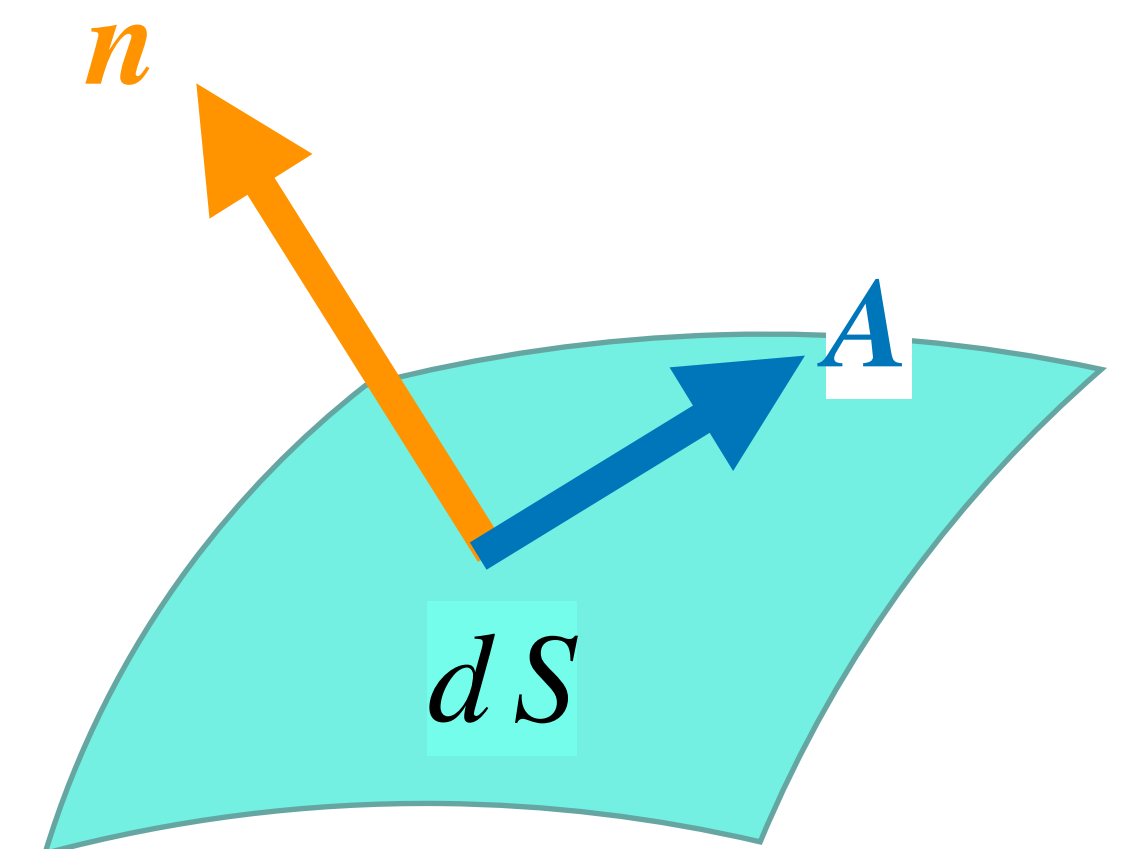
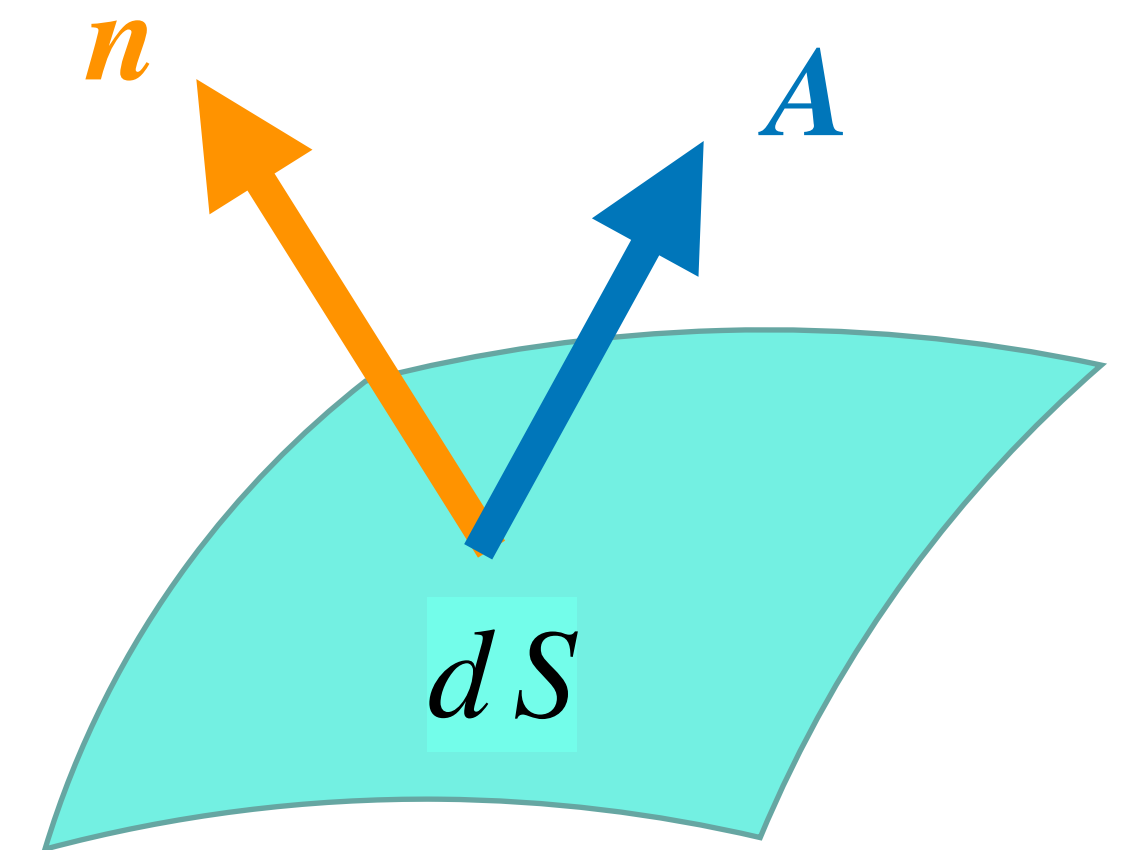
$A \cdot \boldsymbol{n}$ は、ベクトル場 A の法線方向成分であるから、

$\iint_S A \cdot \boldsymbol{n} dS$ は $A \cdot \boldsymbol{n} dS$ を各微小面について

足し合わせたものの極限である。

例えば、 A が曲面に沿って流れるだけで、

法線方向成分を持たなければ、 $A \cdot \boldsymbol{n} = 0$ となるから、流束も 0 である。



閉曲面の法線ベクトル

立体 V を考え、その境界を ∂V で表す。
 立体 V の境界 ∂V のような閉じた曲面を、
閉曲面 とよぶ。

閉曲面では通常、外向きの法単位ベクトル n をとる。

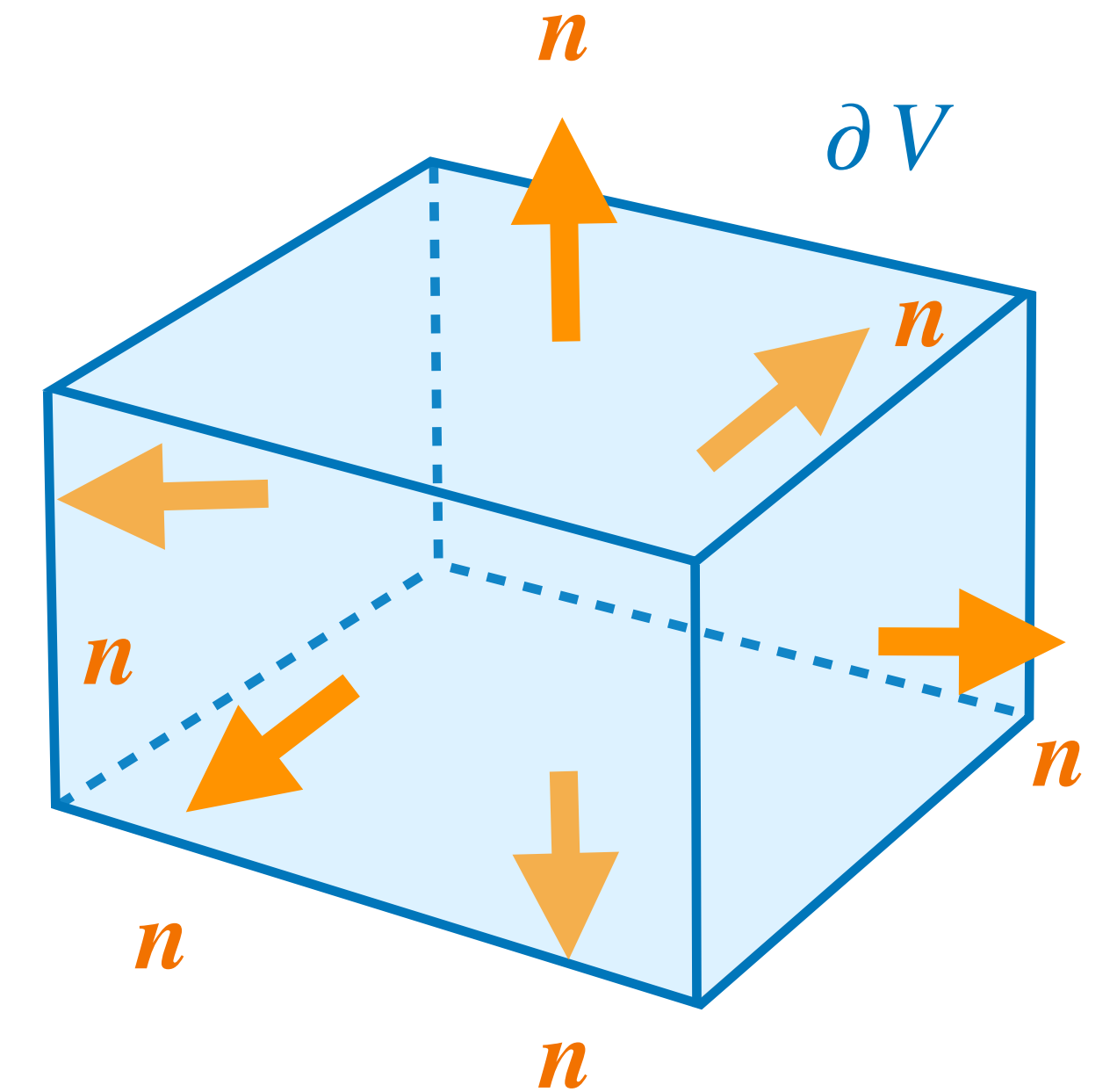
このとき、ベクトルの面積分 $\iint_{\partial V} A \cdot dS$ は

ベクトル場 A が立体 V の外へ流れ出る正味の量（外向き流束）を表す。

この考え方は、あとで学習する発散定理

$$\iiint_V \operatorname{div} A \, dV = \iint_{\partial V} A \cdot dS$$

につながる。



閉曲面の流束の計算例（１）

ベクトル場を $A(x, y, z) = (x, y, z)$ とする。

立体を $V = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ （立方体）とし、

その境界 ∂V となる各面に外向きの法線ベクトルをとる。

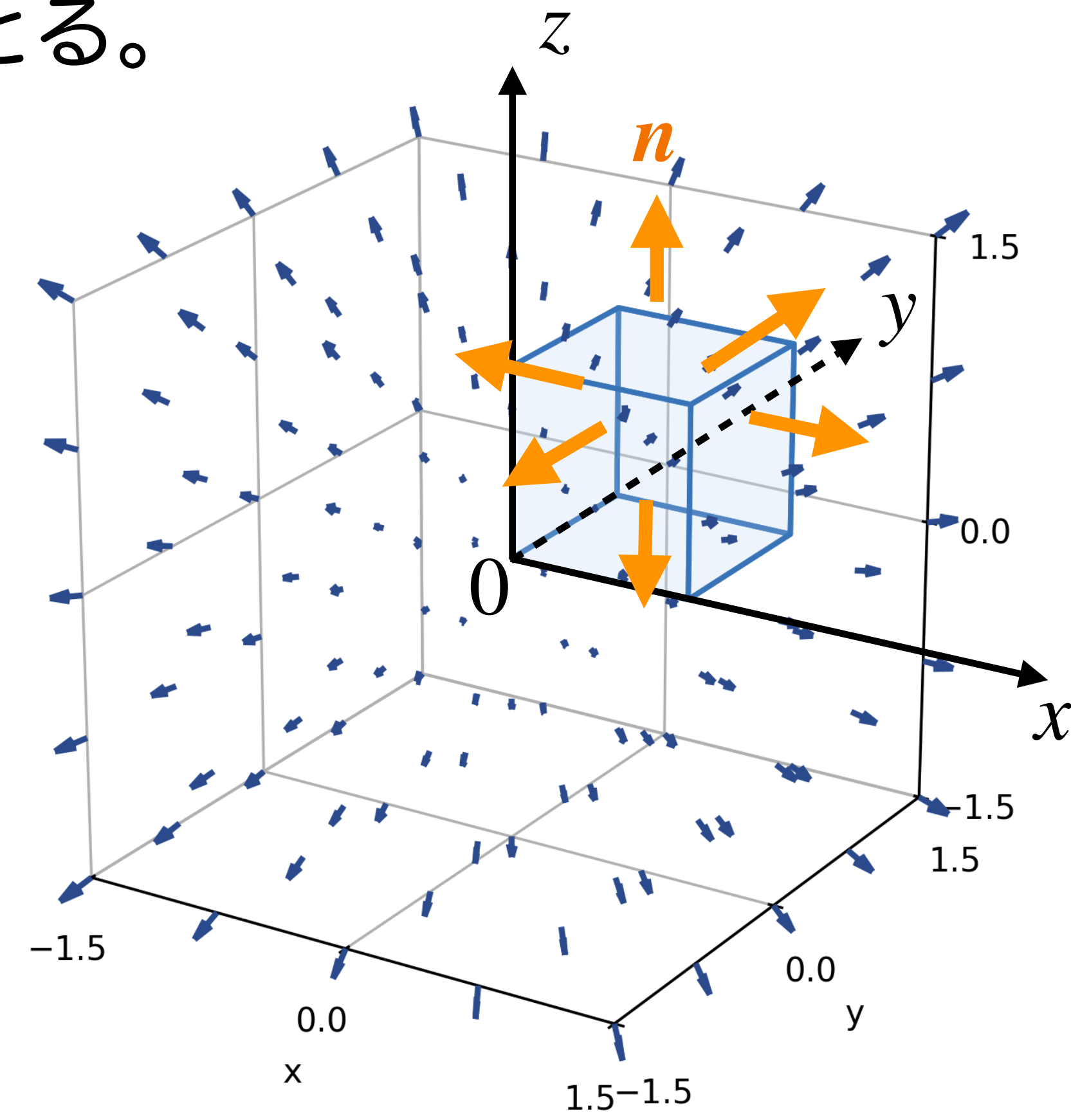
流束（＝ベクトル面積分） $\iint_{\partial V} A \cdot dS$ を求めよう。

各面ごとに分けて計算する。

$x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$

の6面を順に調べればよい。

図形の対称性も利用しよう。



閉曲面の流束の計算例 (2)

まずは $x = 0$ の面から始めよう。この面を外向き法線が得られるように

$S_{x=0} : \mathbf{r}(u, v) = (0, v, u), 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ と表す。

$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (0, 0, 1), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 1, 0), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-1, 0, 0)$ となるので、

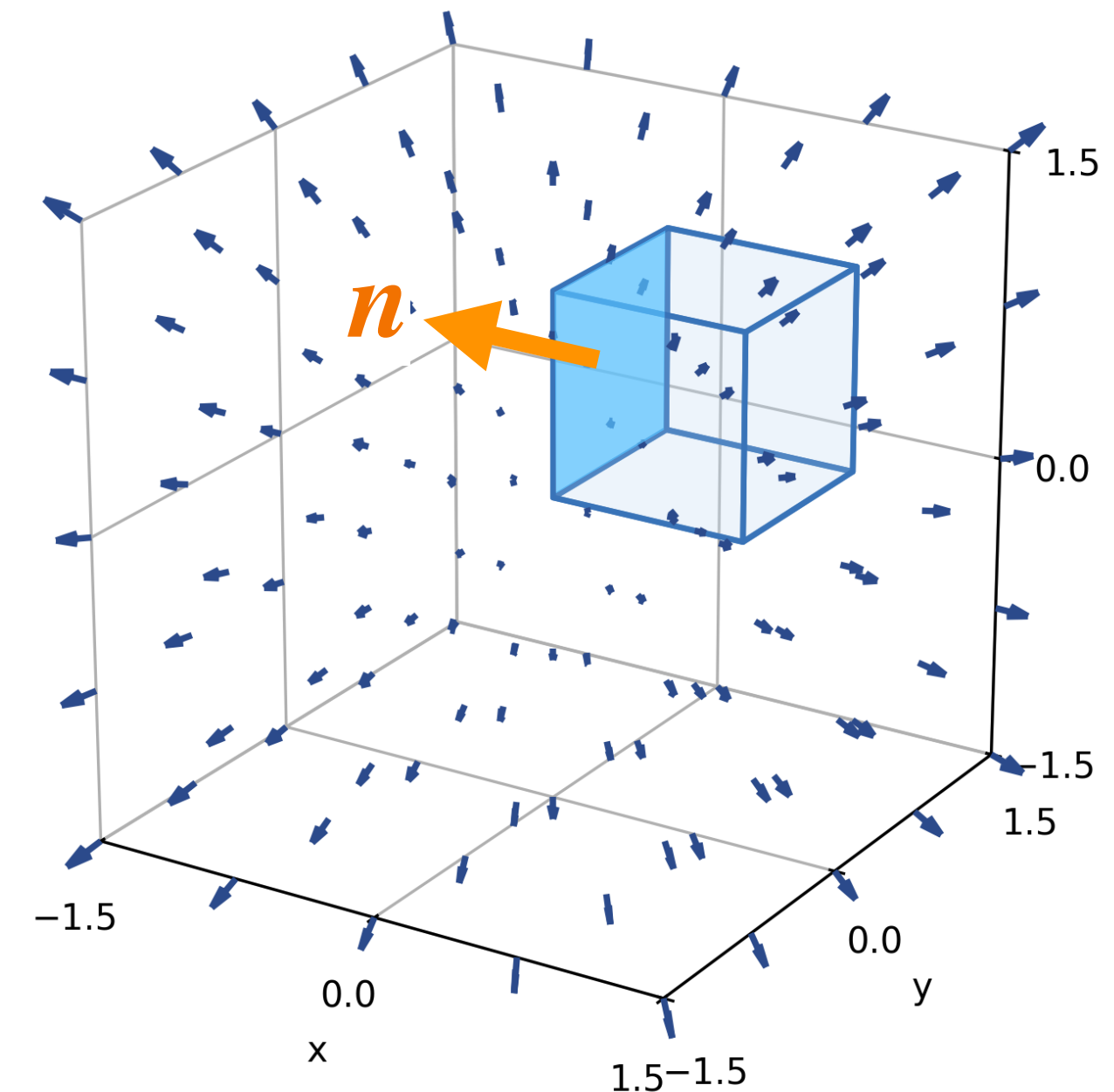
この媒介変数表示は確かに外向き法線方向である。

$\mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) = (0, v, u)$ より

$\mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = (0, v, u) \cdot (-1, 0, 0) = 0$, したがって

$$\iint_{S_{x=0}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 0 \, du \, dv = 0 \text{ となる。}$$

同様に、 $y = 0, z = 0$ の面についても流束は 0 となる。



閉曲面の流束の計算例 (3)

つぎに、 $x = 1$ の面について計算しよう。

$S_{x=1} : \mathbf{r}(u, v) = (1, u, v), 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ とおけば、

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (0, 1, 0), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 0, 1), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (1, 0, 0) \text{ となり、}$$

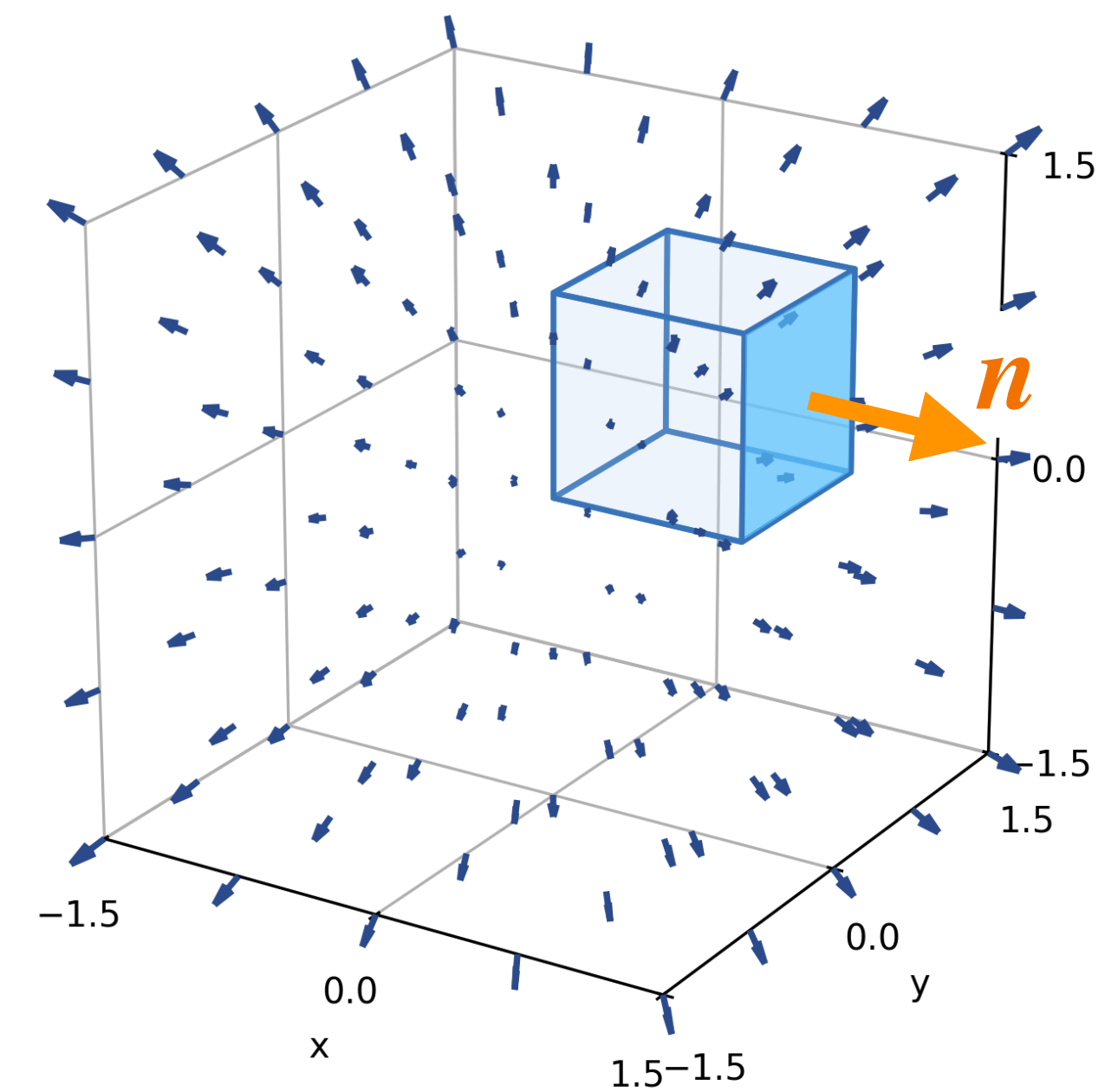
この媒介変数表示も外向き法線方向となる。また、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) = (1, u, v) \text{ より}$$

$$\mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = (1, u, v) \cdot (1, 0, 0) = 1$$

$$\iint_{S_{x=1}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 1 \, du \, dv = 1 \text{ を得る。}$$

対称性より、 $y = 1, z = 1$ の面についても同様に流束は 1 となる。

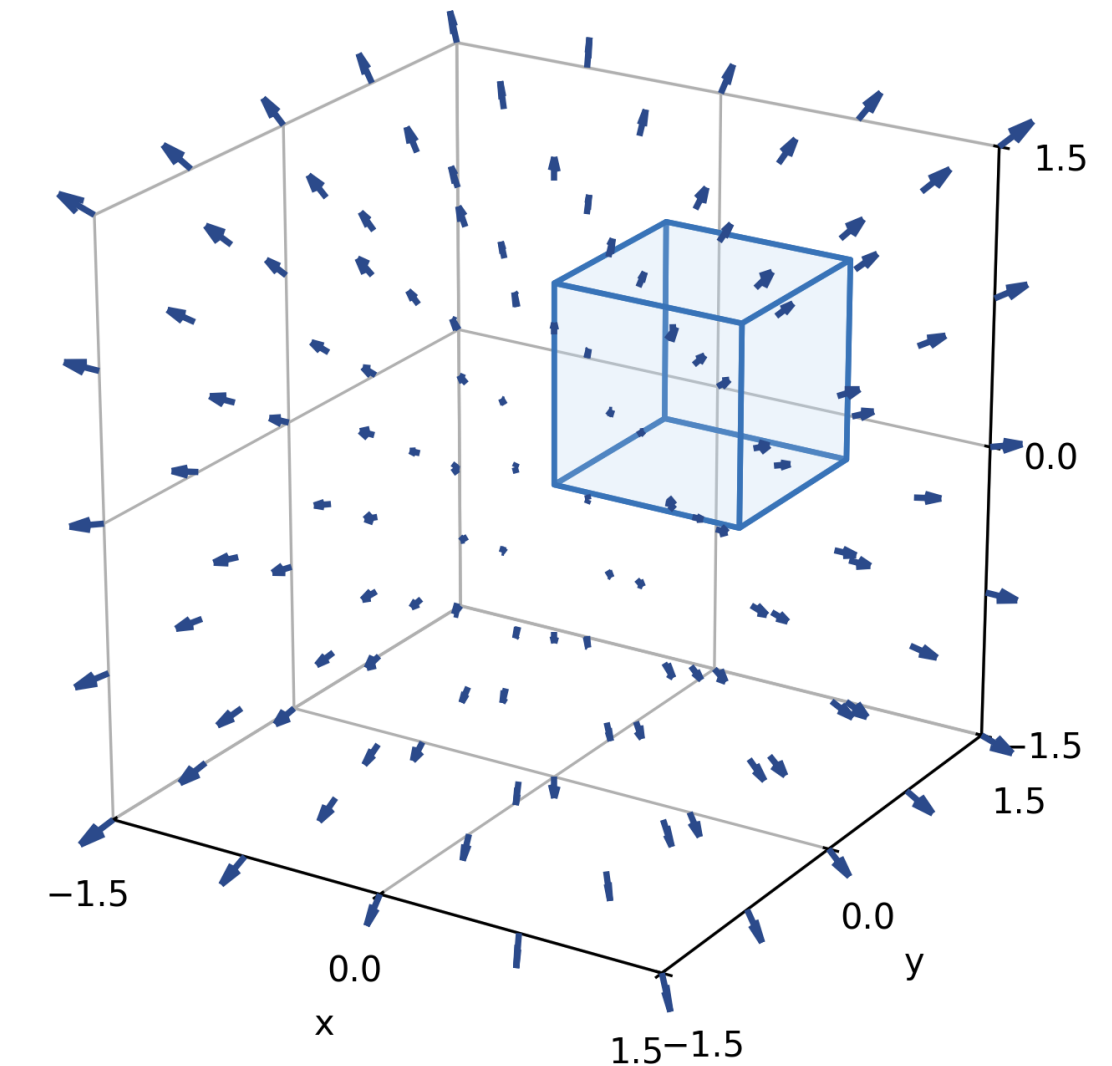


閉曲面の流束の計算例（４）

以上より、各面での流束はつぎのとおり。

$$\iint_{S_{x=0}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \iint_{S_{y=0}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \iint_{S_{z=0}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

$$\iint_{S_{x=1}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 1, \quad \iint_{S_{y=1}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 1, \quad \iint_{S_{z=1}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 1$$



したがって、閉曲面 ∂V 全体での流束は、これらを足し合わせてつぎが求まる。

$$\iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 = 3$$

ベクトル場 $\mathbf{A} = (x, y, z)$ の閉曲面 ∂V を通る正味の外向き流束は 3 である。

この値は、のちに学ぶ発散定理 $\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV = \iint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ によっても求められる。

方程式 $F(x, y, z) = 0$ で与えられた曲面

曲面は、媒介変数表示 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ や $z = f(x, y)$ による表示だけでなく、方程式 $F(x, y, z) = 0$ によって与えられることもある。

例： $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ （原点 O 中心、半径 1 の球面）

$$z - x - y = 0 \quad (\text{平面})$$

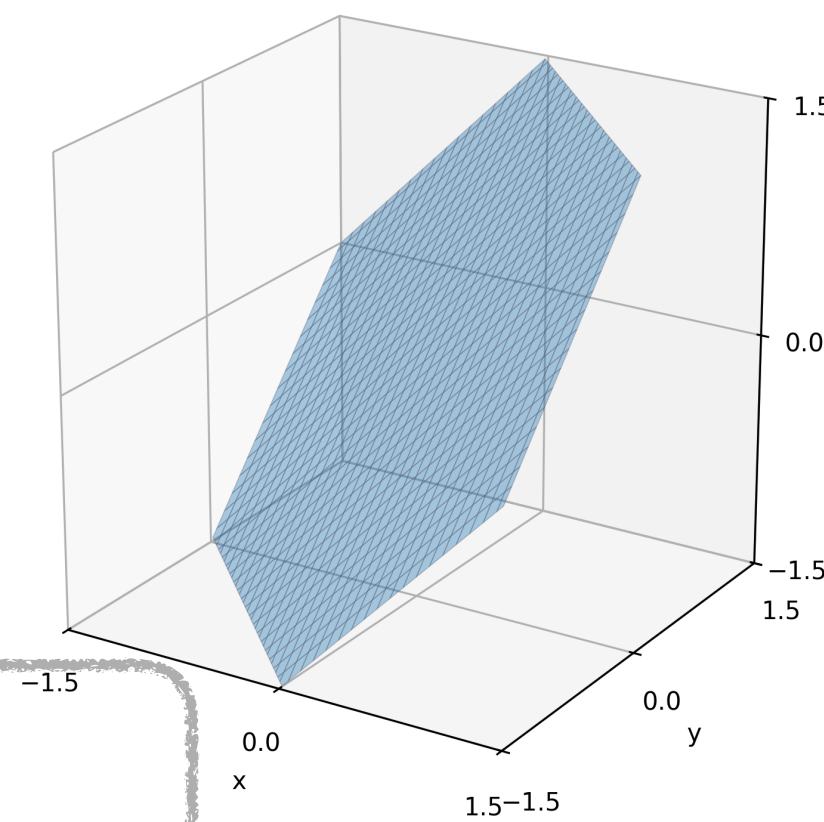
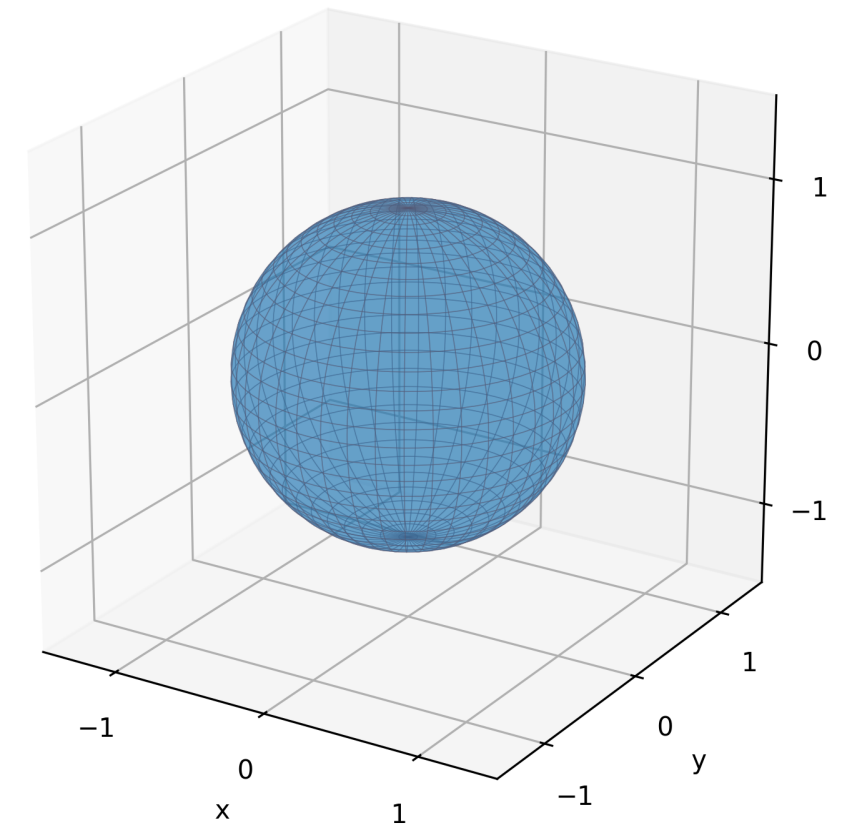
これらはいずれも曲面を表す。

$F(x, y, z) = 0$ で与えられる曲面上の点 P において

$\nabla F(P) \neq \mathbf{0}$ ならば、 $\nabla F(P)$ は法線ベクトルである。

スカラー場 φ に対して、勾配 $\nabla \varphi$ は $\mathbf{0}$ でないとき

等位面 $\varphi = c$ の法線ベクトルを表すのであった。（4回目講義 p.22）



法線ベクトル ∇F

曲面 S がつぎのように方程式によって与えられているとする。

$$S : F(x, y, z) = 0$$

S 上の点 P を通る、 S 上の任意の曲線を $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ とすると S 上にあることから、 $F(c(t)) = F(x(t), y(t), z(t)) = 0$ が成り立つ。

この両辺を t で微分すると、合成関数の微分を用いてつぎを得る。

$$\frac{d}{dt} F(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial F}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} z'(t) = \nabla F(c(t)) \cdot c'(t) = 0$$

特に $c(t_0) = P$ とすれば $\nabla F(P) \cdot c'(t_0) = 0$ を得る。

ここで、 $c'(t_0)$ は点 P における曲面 S の接ベクトルであるから、

$\nabla F(P) \neq \mathbf{0}$ ならば、 $\nabla F(P)$ は点 P における曲面 S の法線ベクトルである。

$F(x, y, z) = 0$ で与えられた曲面の計算例 (1)

曲面 $S : F(x, y, z) = x - y^2 = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$

ベクトル場 $A(x, y, z) = (x, 0, z)$

について、 S 上でのベクトル面積分 $\iint_S A \cdot dS$ を求めよう。

曲面 S の媒介変数表示をつぎのようにとる。

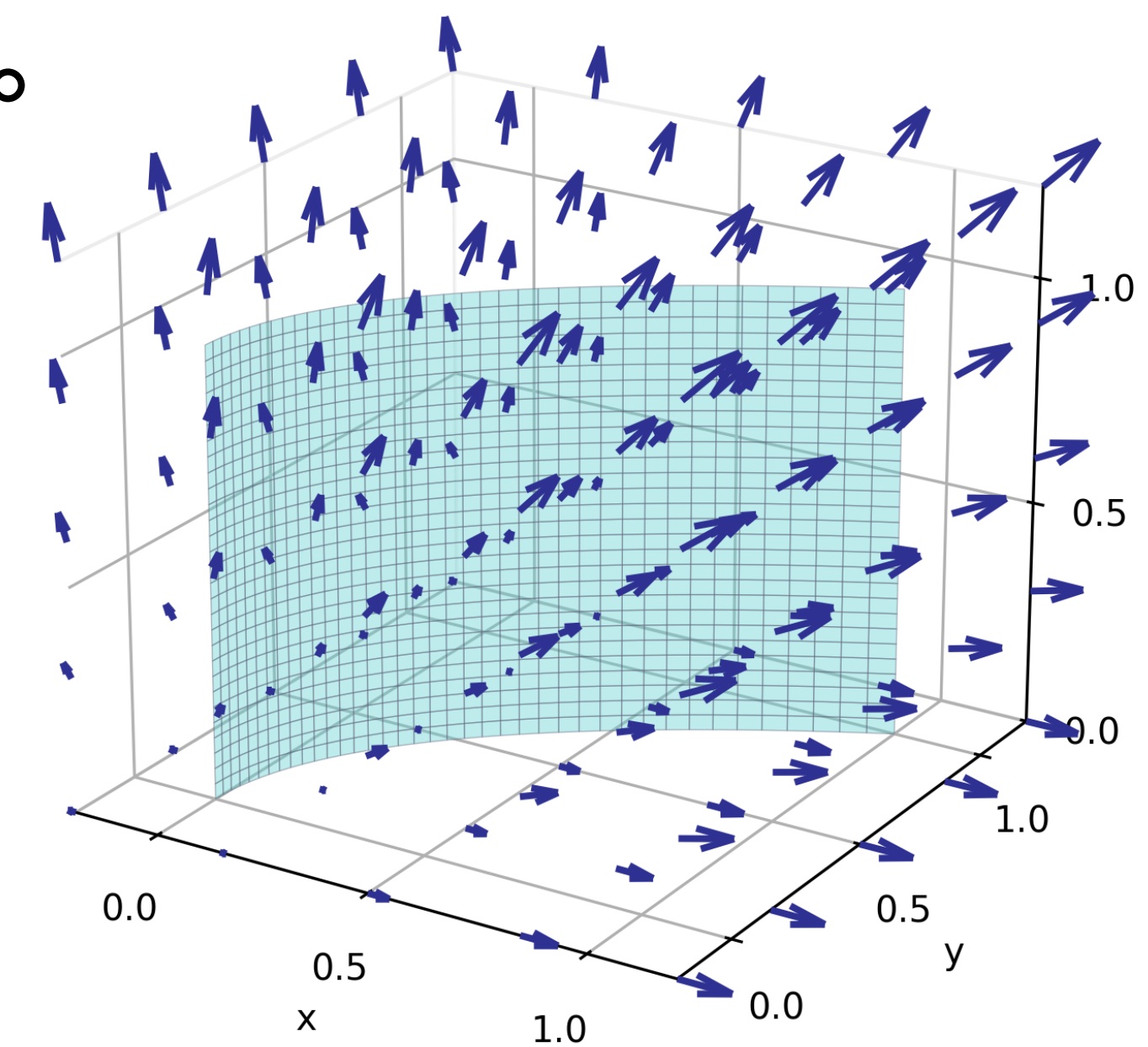
$S : \mathbf{r}(u, v) = (u^2, u, v), 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$

このとき

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (2u, 1, 0), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, 0, 1), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (1, -2u, 0)$$

媒介表示の取り方によって、曲面に誘導される向きが反転することがある。

曲面の向きが変わると、ベクトル面積分の値の符号が反転する。



$F(x, y, z) = 0$ で与えられた曲面の計算例 (2)

いま、曲面の向きは $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ が定める向きにとるとする。

また、 $\mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) = (u^2, 0, v)$ であるから

$$\mathbf{A} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) = (u^2, 0, v) \cdot (1, -2u, 0) = u^2,$$

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^1 \int_0^1 u^2 dv du = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3} \text{ と求まった。}$$

(注) $F(x, y, z) = 0$ によって曲面が与えられているとき、
法線ベクトルは ∇F によって求まるのであった (22ページ)。

いま、 $\nabla F = (1, -2y, 0)$ となり $y = u$ とすれば $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ に一致する。

体積分

線積分（曲線上の和の極限）、面積分（曲面上の和の極限）を考えたように体積分も定義される。

スカラー場 φ ，立体 V に対し、つぎで定まる値を V 上の **体積分** という。

$$\iiint_V \varphi \, dV$$

立体 V を微小な小領域 V_i に分割し、その体積を ΔV_i とする。

各 V_i に代表点 P_i をとり、和 $\sum_i \varphi(P_i) \Delta V_i$ を考える。

体積分 $\iiint_V \varphi \, dV$ の値は、分割の最大径を 0 に近づけた極限值に等しい。

$\varphi = 1$ のとき、体積分 $\iiint_V dV$ の値は立体 V の体積に等しい。

体積分の座標表示

$x y z$ 直交座標空間では、体積要素は

$$dV = dx dy dz$$

と書ける。したがって、

$$\iiint_V \varphi dV = \iiint_V \varphi(x, y, z) dx dy dz$$

これは、微積IIで学習した3変数関数の累次積分によって計算することができる。

体積要素 dV には、ベクトル面積素 dS のような向きはない。

体積分の計算例

$V : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 2$ (三角柱)

スカラー場 $\varphi(x, y, z) = x + y$

として、体積分 $\iiint_V \varphi dV$ を求めよう。

z, y, x の順番に累次積分すればつぎを得る。

$$\iiint_V \varphi dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^2 (x + y) dz dy dx = \frac{2}{3}$$

