

ベクトル解析

9 回目講義

畠中 英里

本日の講義の流れ

- 前回の復習
- 本日の講義内容
 - ・ スカラーの線積分の性質
 - ・ ベクトルの線積分
 - ・ ポテンシャルと線積分、循環
 - ・ 面積素
 - ・ スカラーの面積分、ベクトルの面積分

前回の復習 (1)

3 次元空間で連続的に動く点の軌跡を **空間曲線** という。

空間曲線 C 上の点は位置ベクトルで表される。

$$C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

これを **ベクトル方程式**とよぶ。変数 t を **媒介変数** という。

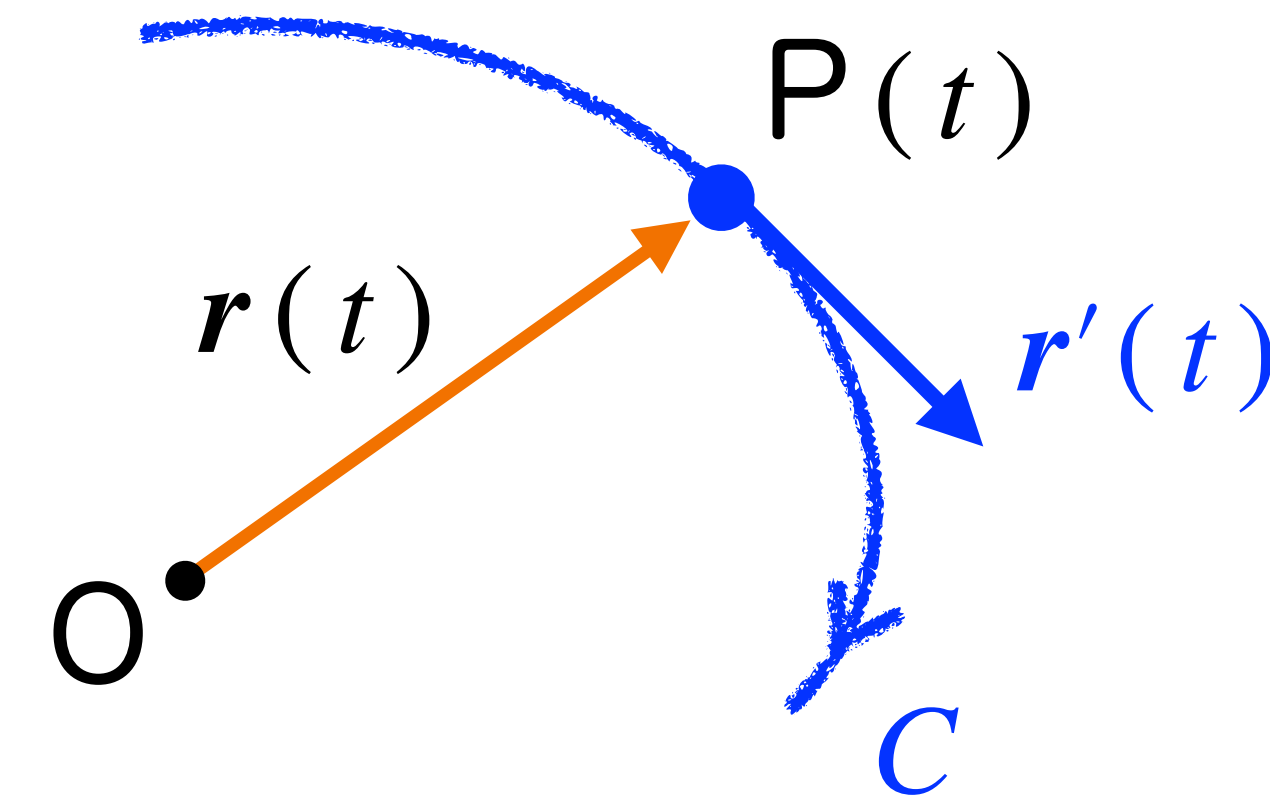
同じ曲線 C を表すのでも、媒介変数 t の選び方は無数にある。

$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ は点 $P(t)$ における C の **接ベクトル** であり、

曲線 C の接線上の向きを与える。

媒介変数 t を時刻と思えば、 $\mathbf{r}'(t)$ は **速度ベクトル** とも呼ばれる。

接ベクトルの大きさ $|\mathbf{r}'(t)|$ も、媒介変数の選び方に依存することに注意する。



前回の復習 (2)

空間曲線 $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ について
 $a \leq t \leq b$ としたときの **弧長** はつぎの式で求まる。

$$s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

曲線 C の点 $P(a)$ から点 $P(t)$ までの弧の長さを $s = s(t)$ とすると

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} du = \int_a^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right| du$$

$s(t)$ は狭義単調増加で、 $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| > 0$ としているので逆関数 $t = t(s)$ が存在する。

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ に $t = t(s)$ を代入し、 C を **弧長パラメータ** s で表すことができる。

$$C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$$

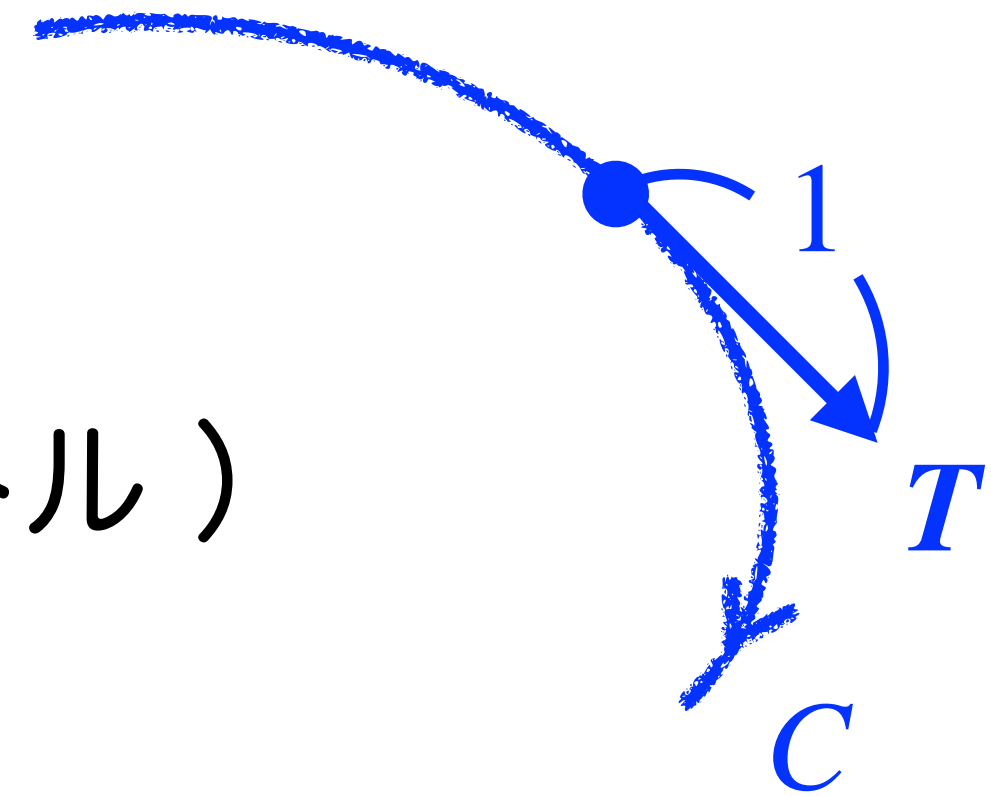
前回の復習 (3)

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \text{ であること、および } s(t) = \int_a^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right| du, \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \text{ より}$$

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \frac{dt}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| / \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| / \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = 1 \text{ であることより}$$

空間曲線 C の **接単位ベクトル** T をつぎで定める。

$$T = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \quad (\text{各点で曲線 } C \text{ に接する単位ベクトル})$$



さらに、空間曲線 C の **曲率** κ をつぎの値で定める。

$$\kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right| \geq 0 \quad (s \text{ の増加にともなう } T \text{ の回転の割合} = C \text{ の曲がり具合})$$

前回の復習 (4)

スカラー場 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ および

空間曲線 $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (a \leq t \leq b)$

選んだ媒介表示 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ に対して、媒介変数 t による積分

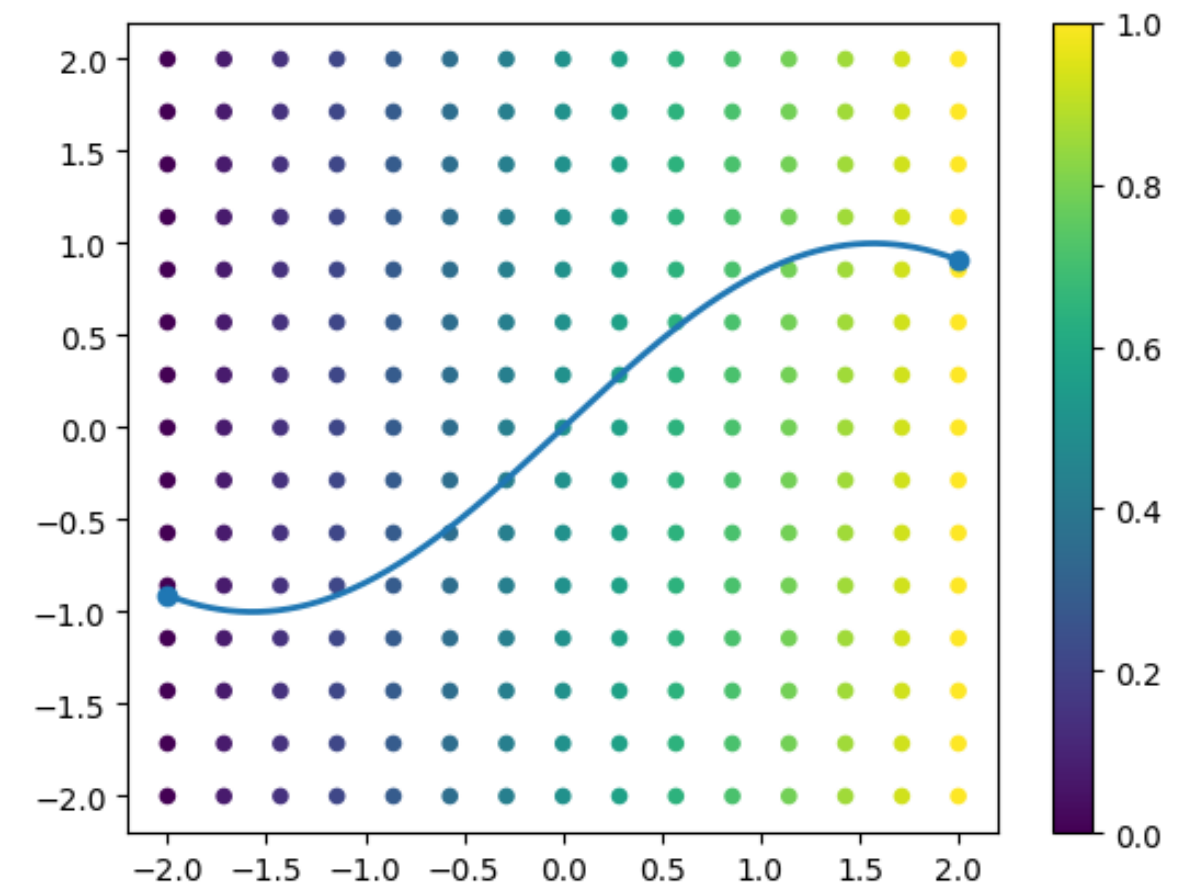
$$\int_C \varphi dt = \int_a^b \varphi(x(t), y(t), z(t)) dt$$

を考える。この値は媒介表示 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ の取り方に依存する。

一方、弧長要素 ds を用いる**スカラー線積分**をつぎで定める。

$$\int_C \varphi ds = \int_C \varphi \frac{ds}{dt} dt = \int_a^b \varphi \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_a^b \varphi(\mathbf{r}(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

$\varphi = 1$ のとき、線積分 $\int_C \varphi ds$ の値は空間曲線 C の弧長に等しい。



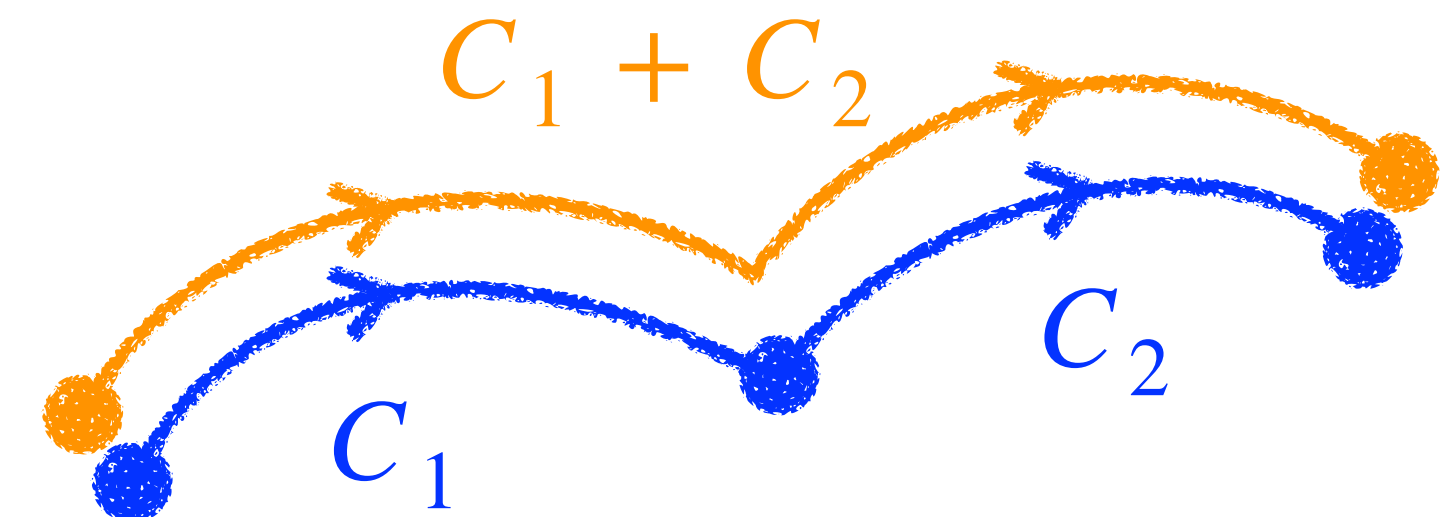
本日の講義

線積分・面積分

スカラー線積分の性質

向きづけられた空間曲線 C_1 , C_2 を順につないで得られる曲線を $C_1 + C_2$ と表す。このとき、スカラーの線積分は和に関して加法的である。

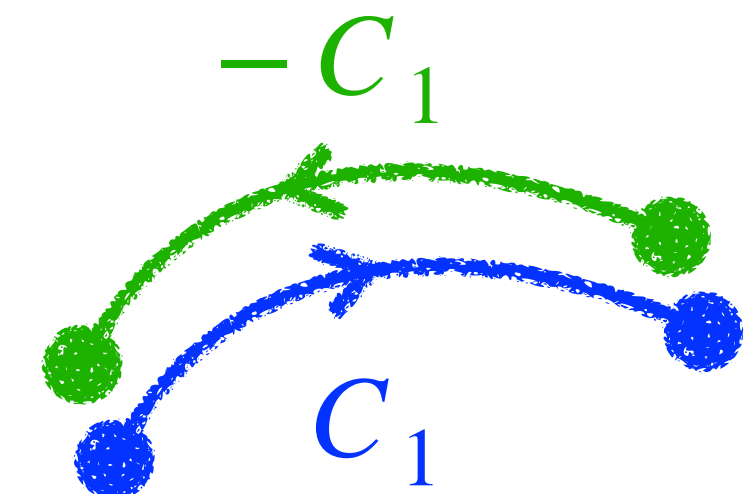
$$\int_{C_1 + C_2} \varphi \, ds = \int_{C_1} \varphi \, ds + \int_{C_2} \varphi \, ds$$



空間曲線 C の向きを逆にしたものを $-C$ と書く。

弧長要素 ds によるスカラー線積分では、向きを逆にしても値は変わらない。

$$\int_{-C} \varphi \, ds = \int_C \varphi \, ds$$



媒介変数による積分と線積分の比較 (1) 9

スカラー場 $\varphi(x, y, z) = z$, 空間曲線 $C : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ($0 \leq t \leq 1$)

媒介変数による積分と、弧長要素 ds によるスカラー線積分を比較してみよう。

まずは媒介変数 t による積分について、 $\varphi(x(t), y(t), z(t)) = t$ であるから

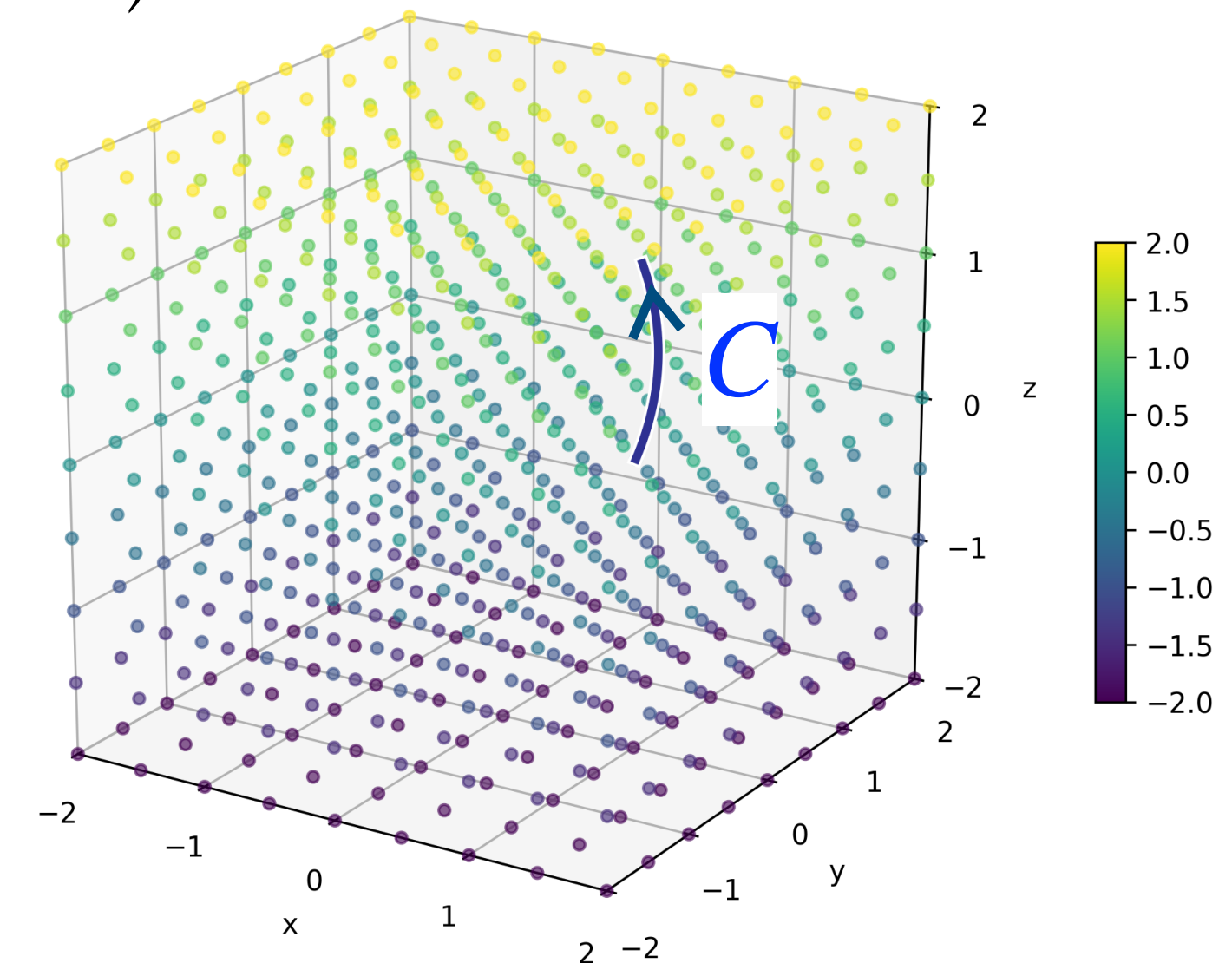
$$\int_C \varphi dt = \int_0^1 t dt = \underline{\frac{1}{2}}$$

同じ空間曲線 C を下のような別の媒介表示で表すと、

$$\tilde{\mathbf{r}}(u) = \left(\cos \frac{u}{2}, \sin \frac{u}{2}, \frac{u}{2} \right) \quad (0 \leq u \leq 2)$$

$$\varphi(\tilde{\mathbf{r}}(u)) = \frac{u}{2} \text{ であるから } \int_0^2 \varphi(\tilde{\mathbf{r}}(u)) du = \int_0^2 \frac{u}{2} du = \underline{1}$$

同じ曲線 C であっても、媒介表示の取り方によって値が異なることに注意する。



媒介変数による積分と線積分の比較 (2)

10

つぎに、弧長要素 ds によるスカラー線積分を求めよう。

$$\int_C \varphi ds = \int_0^1 \varphi(\mathbf{r}(t)) \frac{ds}{dt} dt = \int_0^1 \varphi(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt \text{ であった。}$$

$$\varphi(\mathbf{r}(t)) = t, \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t, \cos t, 1), \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1^2} = \sqrt{2} \text{ であるから}$$

$$\int_C \varphi ds = \int_0^1 t\sqrt{2} dt = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$\int_{-C} \varphi ds$ を求めるには、 $-C$ の向きに沿って媒介変数 u が増加するように

別の媒介表示をとる。

$$-C : \tilde{\mathbf{r}}(u) = \mathbf{r}(1-u) = (\cos(1-u), \sin(1-u), (1-u)) \quad (0 \leq u \leq 1)$$

媒介変数による積分と線積分の比較 (3) 11

このとき $\varphi(\tilde{\mathbf{r}}(u)) = 1 - u$, $\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{du} = (\sin(1 - u), -\cos(1 - u), -1)$,

また $\left| \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{du} \right| = \sqrt{\sin^2(1 - u) + \cos^2(1 - u) + 1} = \sqrt{2}$ となるから

$$\int_{-C} \varphi ds = \int_0^1 \varphi(\tilde{\mathbf{r}}(u)) \frac{ds}{du} du = \int_0^1 (1 - u) \sqrt{2} du = \sqrt{2} \left[u - \frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

これより、弧長要素 ds による線積分の値は空間曲線 C の向きに依存しない。

$$\int_{-C} \varphi ds = \int_C \varphi ds$$

弧長要素 ds による線積分の値は、空間曲線 C の媒介表示の取り方によらないことから従う。

ベクトルの線積分

ベクトル場 $A = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ が定義された空間内に空間曲線 C があるとする。

(A_x, A_y, A_z は、それぞれが x, y, z による 3 変数関数であった。)

空間曲線 C は、弧長パラメータ s を用いる。

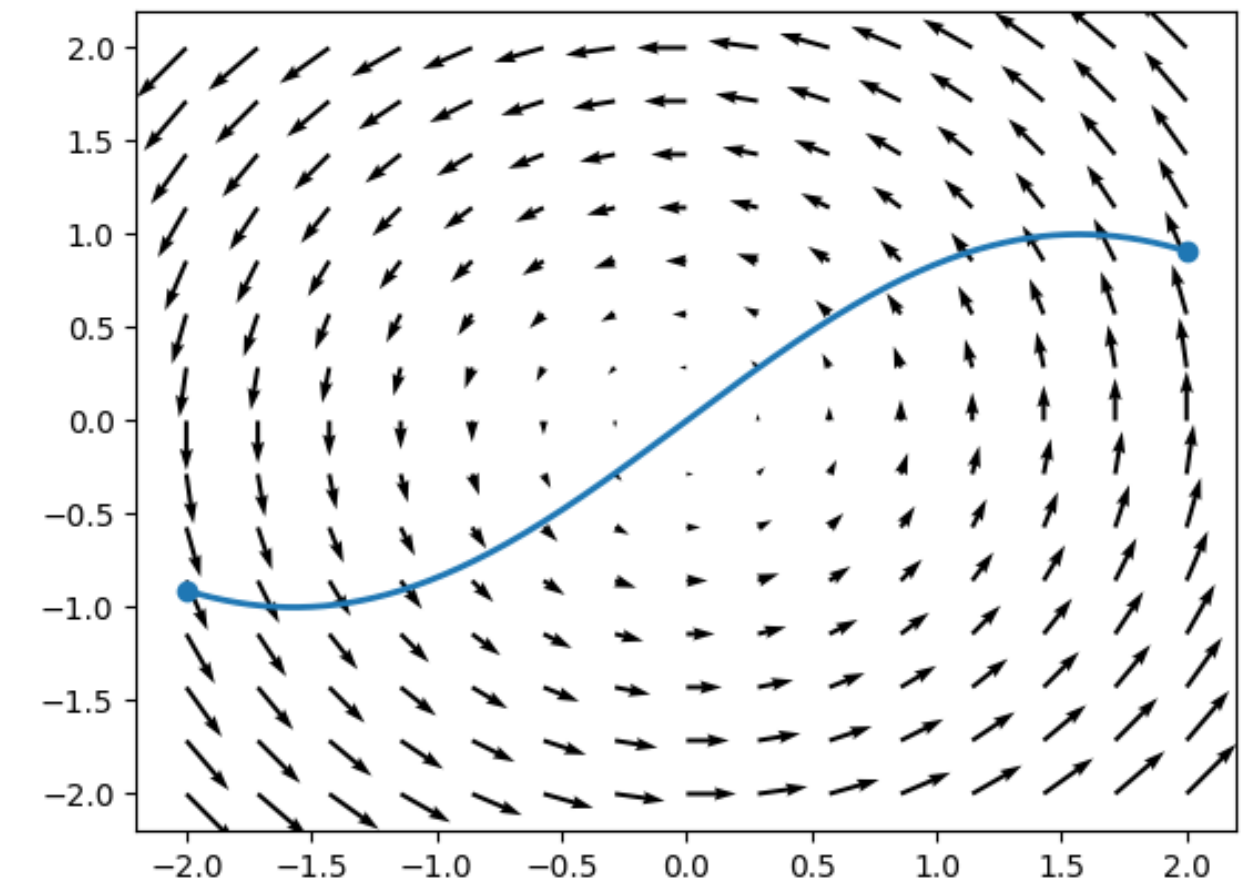
$$C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad (a \leq s \leq b)$$

C の接単位ベクトル T を考える。

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx(s)}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy(s)}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz(s)}{ds}\mathbf{k}$$

つぎの定積分をベクトル場 A の C に沿った **線積分** という。

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b \mathbf{A}(x(s), y(s), z(s)) \cdot \mathbf{T}(s) ds = \int_a^b \left(A_x \frac{dx}{ds} + A_y \frac{dy}{ds} + A_z \frac{dz}{ds} \right) ds$$



仕事量

$\mathbf{T} \, ds = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \, ds = d\mathbf{r}$ となることより、ベクトルの線積分はつぎの式でも表される。

$$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \, ds = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

ベクトルの線積分の例として、**仕事量** が挙げられる。

質量を持つ質点が力 $\mathbf{F}$ で運動し、その運動が $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ で表されるとする。

媒介変数 t は時間を表すとすれば、速度ベクトルは $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ であった。

質点の軌道を C として、時刻 t_0 から t_1 の間に力 $\mathbf{F}$ がこの質点に与える仕事量は

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{v} \, dt$$

ベクトル線積分の計算法

ベクトル場を $A = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ とし、

空間曲線 C は、一般の媒介変数 t で与えられているとする。

$$C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k} \quad (a \leq t \leq b)$$

実際のベクトル線積分は、つぎのように t による 1 変数の積分で求められる。

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} ds &= \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_a^b \left(A_x(x(t), y(t), z(t)), A_y(x(t), y(t), z(t)), A_z(x(t), y(t), z(t)) \right) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left(A_x(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + A_y(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + A_z(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \right) dt \end{aligned}$$

ベクトル線積分の計算例 1 (1)

ベクトル場 $A = (x + z) \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$,

空間曲線 $C : \mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + (1 - t) \mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 1)$ とする。

ベクトル線積分 $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} ds = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ を求めよう。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) = \left(A_x(x(t), y(t), z(t)), A_y(x(t), y(t), z(t)), A_z(x(t), y(t), z(t)) \right) = (1, 2t, t)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (1, 2, -1)$$

となることより、前ページの計算法を使えばつぎのように求まる。

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (1, 2t, t) \cdot (1, 2, -1) dt = \int_0^1 (1 + 3t) dt = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

ベクトル線積分の計算例 1 (2)

前ページと同じベクトル場 $A = (x + z) \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$ と空間曲線 C について、 C の媒介変数の取り方を変えてベクトル線積分 $\int_C A \cdot d\mathbf{r}$ を計算してみよう。

$$C : \tilde{\mathbf{r}}(u) = \mathbf{r}\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{u}{2} \mathbf{i} + u \mathbf{j} + \left(1 - \frac{u}{2}\right) \mathbf{k} \quad (0 \leq u \leq 2) \text{ とする。}$$

$$A(\tilde{\mathbf{r}}(u)) = \left(1, u, \frac{u}{2}\right), \quad \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{du} = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

であるから、ベクトル線積分の値はつぎのとおり求まる。

$$\int_C A \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \left(1, u, \frac{u}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right) du = \int_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}u\right) du = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

このように、ベクトル線積分の値は空間曲線 C の媒介変数の取り方によらない。

ベクトル線積分の計算例 1 (3)

17

15ページと同じベクトル場 $A = (x + z) \mathbf{i} + y \mathbf{j} + x \mathbf{k}$ と空間曲線 C について、
今度は C の向きを逆にした $-C$ のベクトル線積分 $\int_{-C} A \cdot d\mathbf{r}$ を計算してみよう。

$-C$: $\hat{\mathbf{r}}(u) = \mathbf{r}(1 - u) = (1 - u) \mathbf{i} + (2 - 2u) \mathbf{j} + u \mathbf{k}$ ($0 \leq u \leq 1$) とする。

$$A(\hat{\mathbf{r}}(u)) = (1, 2 - 2u, 1 - u), \quad \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{du} = (-1, -2, 1)$$

だから、ベクトル線積分の値は

$$\int_{-C} A \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (1, 2 - 2u, 1 - u) \cdot (-1, -2, 1) du = \int_0^1 (-4 + 3u) du = -\frac{5}{2}$$

ベクトル線積分では、曲線の向きを逆にするると $\int_{-C} A \cdot d\mathbf{r} = - \int_C A \cdot d\mathbf{r}$ となる。

線積分まとめ

空間曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, スカラー場 φ , ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ について

★ 媒介変数 t による積分 :
$$\int_C \varphi dt = \int_a^b \varphi(\boldsymbol{r}(t)) dt$$

その値は C の媒介変数 t の取り方に依存する。

★ 弧長要素 ds によるスカラー線積分 :
$$\int_C \varphi ds$$

その値は C の媒介表示や向きに依存しない。
$$\int_{-C} \varphi ds = \int_C \varphi ds$$

★ ベクトル線積分 :
$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T} ds = \int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} \quad (C \text{ の媒介変数 } t \text{ の積分で計算可能})$$

その値は C の向きを保つ媒介表示 の取り方に依存しない。

また、曲線の向きを逆にすると
$$\int_{-C} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = - \int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$$

ポテンシャルと線積分

ベクトル場 $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ に対し、スカラー場 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ があって、

$\mathbf{A} = -\nabla \varphi \left(= - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right) \right)$ となるとき、**ポテンシャル**というのであった。

φ が $\mathbf{A}$ のポテンシャルであるとき、空間曲線 $C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ に対して

$\mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\nabla \varphi(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{d\varphi(\mathbf{r}(t))}{dt}$ となるので、ベクトル線積分は

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = - \int_a^b \frac{d\varphi(\mathbf{r}(t))}{dt} dt = - \left[\varphi(\mathbf{r}(t)) \right]_a^b \\ &= -\varphi(\mathbf{r}(b)) + \varphi(\mathbf{r}(a)) \end{aligned}$$

となる。この値は始点と終点の情報のみで決まり、積分経路 C に依存しない。

ポテンシャルと線積分の計算例

ベクトル場 $A = -2xi - 2yj - k$, スカラー場 $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$

とすると $A = -\nabla\varphi$ が成り立つ。すなわち φ は A のポテンシャルである。

空間曲線 $C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (1-t)\mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 1)$ とする。

$A(\mathbf{r}(t)) = (-2t, -2t, -1)$, $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (1, 1, -1)$ となることより

$$\int_C A \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (-2t, -2t, -1) \cdot (1, 1, -1) dt = \int_0^1 (1 - 4t) dt = -1$$

一方、 $\varphi(\mathbf{r}(1)) = 1^2 + 1^2 + 0 = 2$, $\varphi(\mathbf{r}(0)) = 0^2 + 0^2 + 1 = 1$ より

$-\varphi(\mathbf{r}(1)) + \varphi(\mathbf{r}(0)) = -2 + 1 = -1$ となるので、

たしかに $\int_C A \cdot d\mathbf{r} = -\varphi(\mathbf{r}(1)) + \varphi(\mathbf{r}(0))$ が成り立つことがわかる。

循環

始点と終点が一致する曲線を **閉曲線** という。

閉曲線 C に沿ったベクトルの線積分は、特につぎのように表す。

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

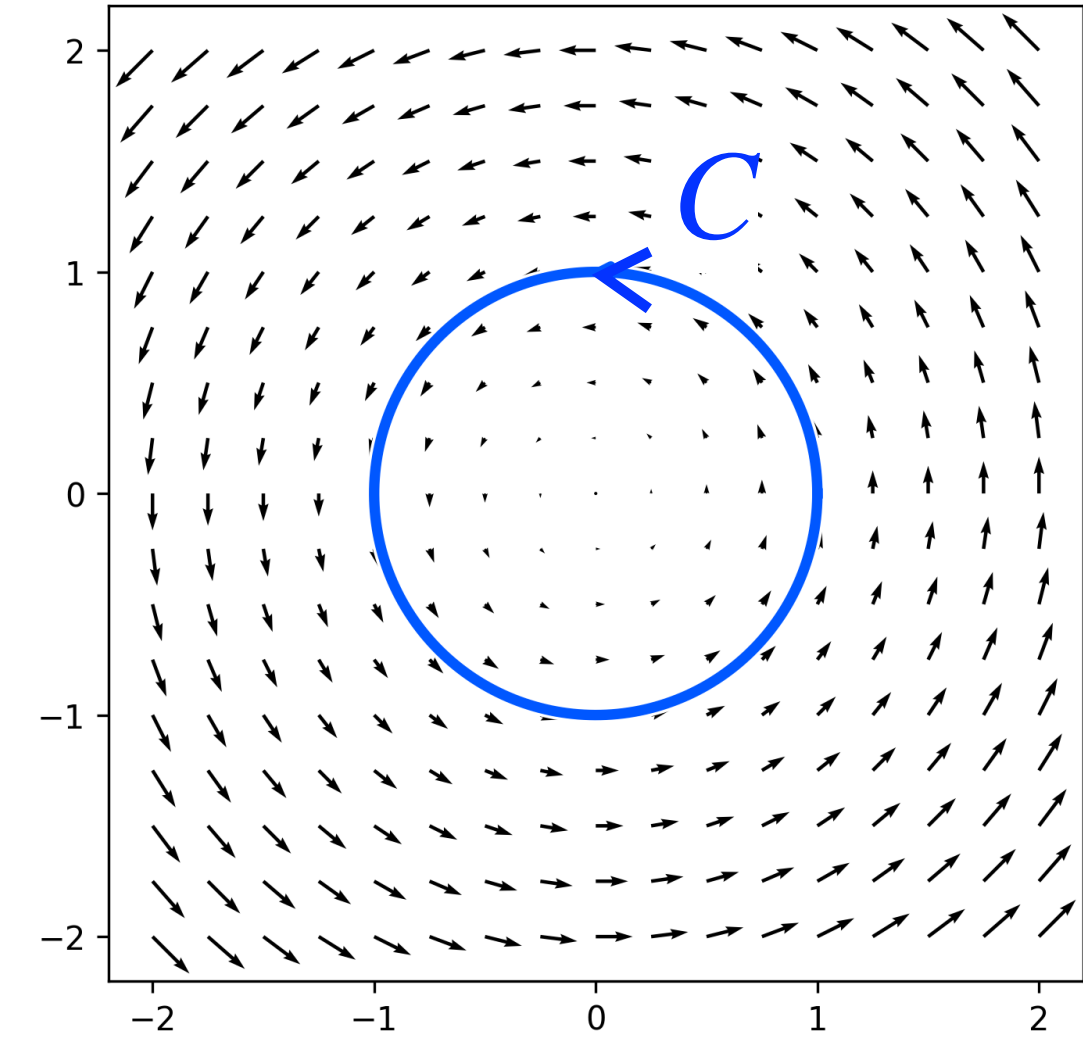
これをベクトル場 $\mathbf{A}$ の **循環** という。

循環は、ベクトル場の C に沿う接線方向成分を1周しながら足し合わせた量である。

ポテンシャル場では $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -\varphi(\text{終点}) + \varphi(\text{始点})$ であったので、

閉曲線 C では $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = -\varphi(\text{終点}) + \varphi(\text{始点}) = 0$ となる。

閉曲線について $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ となれば、 $\mathbf{A}$ はその領域でポテンシャルを持たない。



循環の計算例

20ページの例で用いたポテンシャル場（ポテンシャルを持つベクトル場）

$$\mathbf{A} = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$$

について、つぎの閉曲線 C に関するベクトル線積分 $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$ を求めてみよう。

$$C : \mathbf{r}(t) = (2 + \cos t)\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) = (-2(2 + \cos t), -2\sin t, -1), \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-\sin t, \cos t, 0) \text{ となることより}$$

$$\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 4\sin t, \quad \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} 4\sin t \, dt = 0. \text{ また、} \varphi(\mathbf{r}(t)) = 5 + 4\cos t.$$

$$\mathbf{r}(2\pi) = \mathbf{r}(0) \text{ より } -\varphi(\mathbf{r}(2\pi)) + \varphi(\mathbf{r}(0)) = 0 \text{ となることから従う。}$$

曲面の媒介変数表示

空間曲線が1つの媒介変数で表されたのに対し、曲面は2つの変数で表される。

2つの変数 u, v を用いて曲面 S をつぎのように表す。

$$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$$

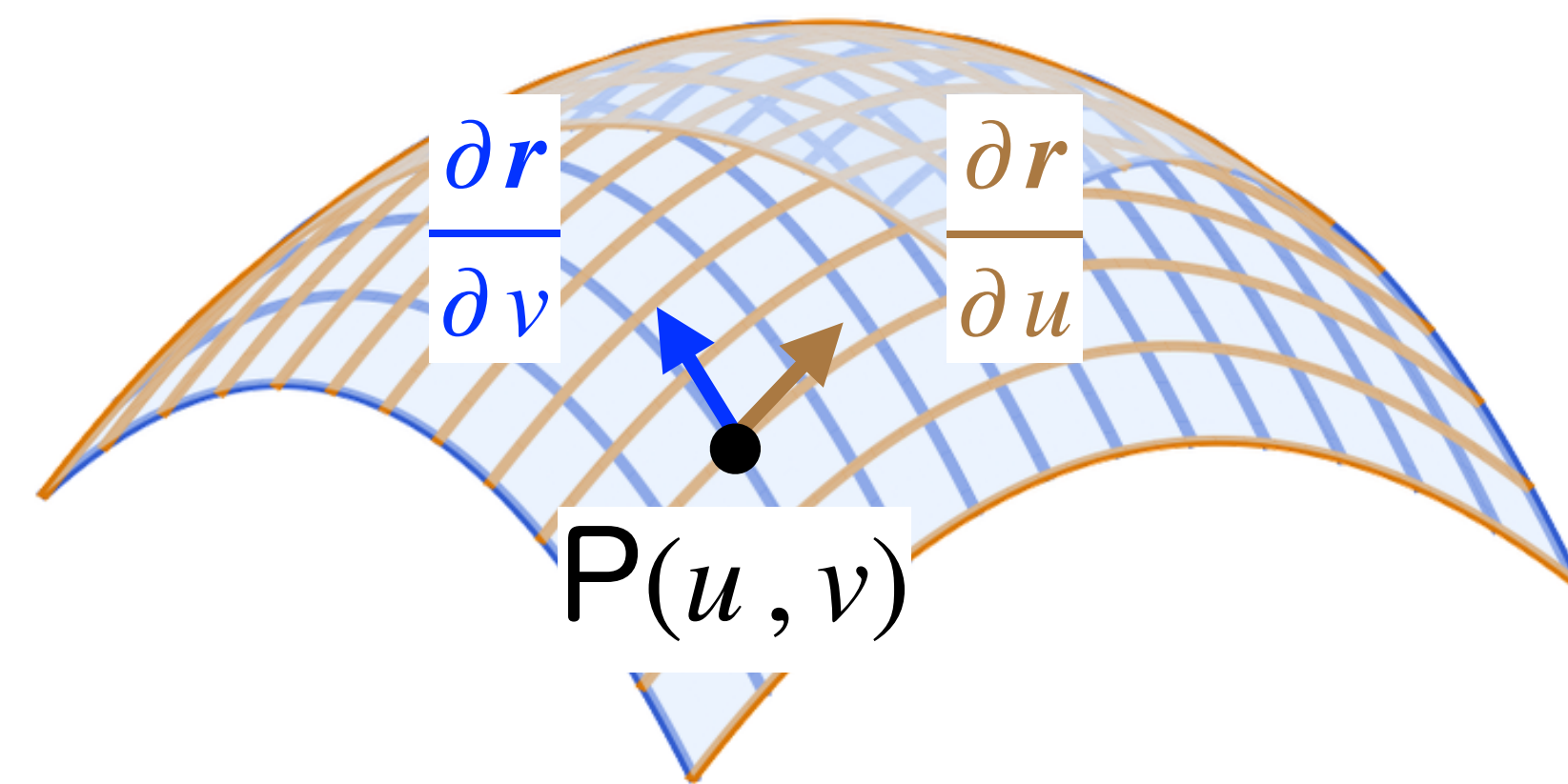
これを曲面 S の **媒介変数表示** という。 u と v のことを **媒介変数** とよぶ。

特に断りがない限り、 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq \mathbf{0}$ であるとする。

すなわち、2つのベクトル $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ は

いずれも $\mathbf{0}$ ではなく、また平行でもない。

また、媒介変数表示 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ を持つ曲面の向きは $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ が定める向きに従う。



u 曲線と v 曲線

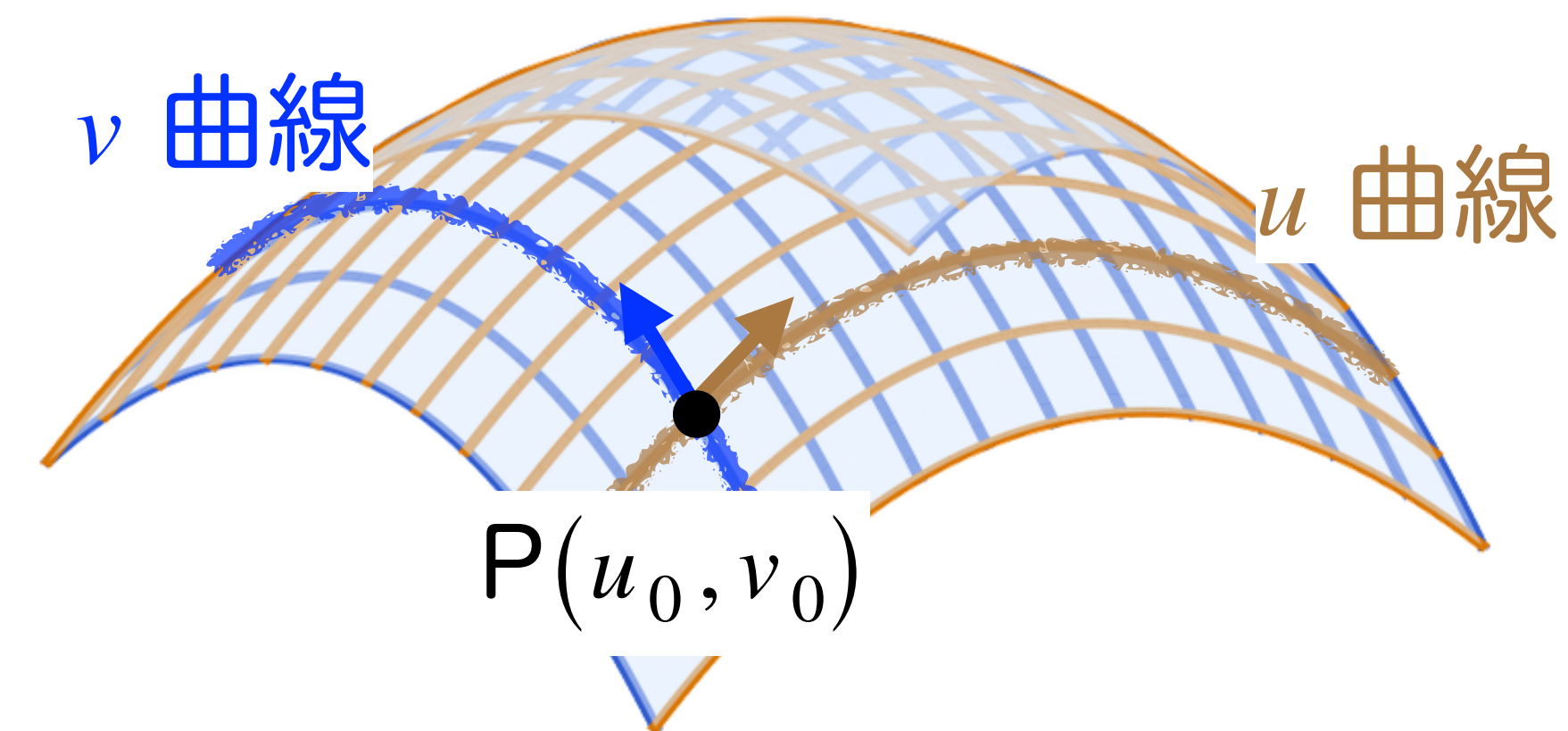
曲面 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ において、
 v_0 を定数とし、 $v = v_0$ と固定して u だけ変化させると、
 S 上のひとつの曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$ が得られる。

これを u 曲線 とよぶ。

同様に、 u_0 を定数として $u = u_0$ と固定することで
 v 曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ が得られる。

点 $P(u_0, v_0)$ において、 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ は、

それぞれ u 曲線、 v 曲線の接ベクトルである。



接平面

点 $P(u_0, v_0)$ における接ベクトル $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$ は

いずれも $\mathbf{0}$ ではなく、また平行でもないのであったから、

点 $P(u_0, v_0)$ に接する平面を張る。

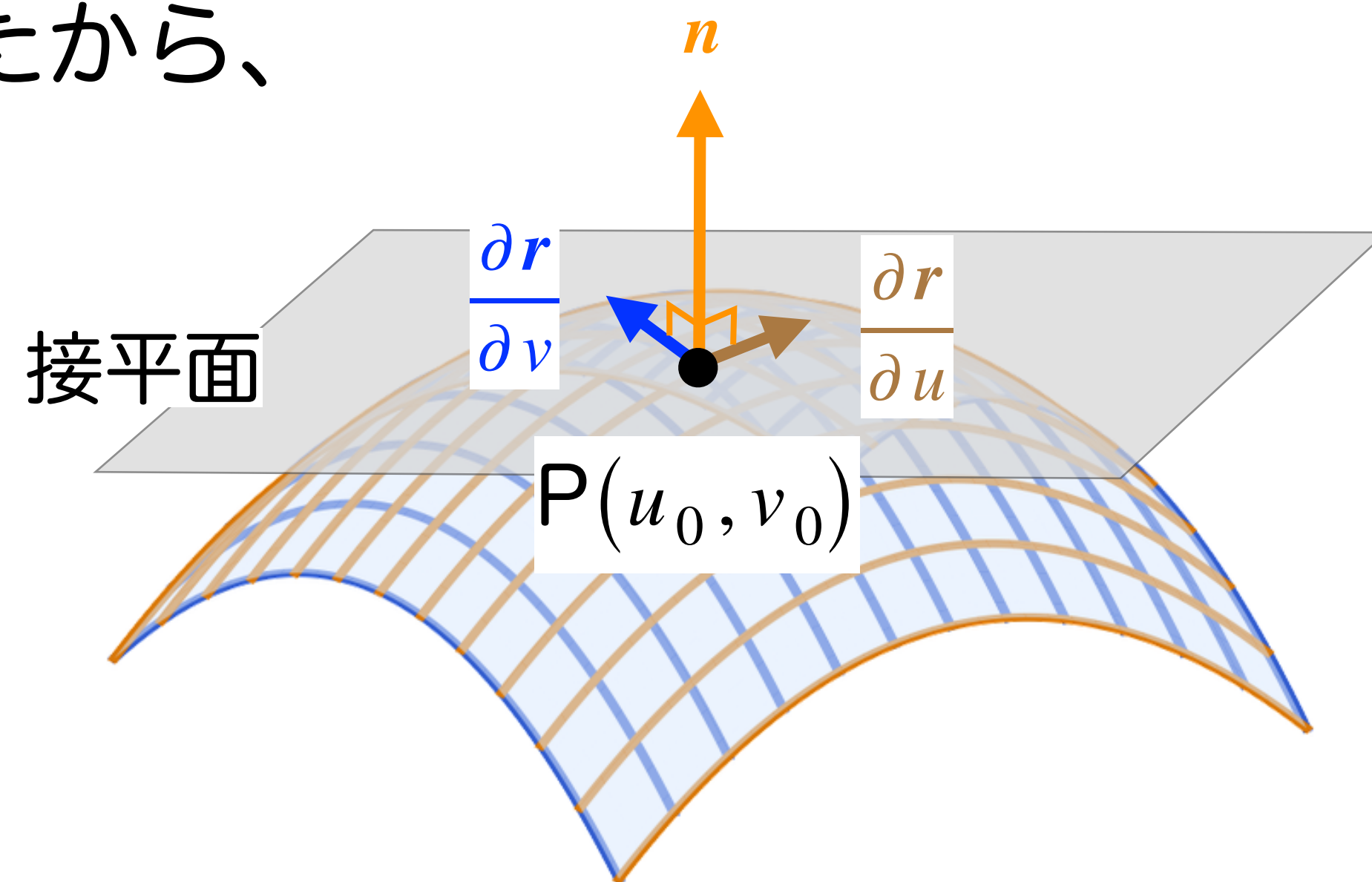
これを **接平面** とよぶ。

外積 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ は、 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ と $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ に垂直で、

右手系に従う向きのベクトルであった。

したがって、 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ は点 P での接平面に垂直なベクトルである。

これを正規化して、 $\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|}$ を **法単位ベクトル** という。



面積素

曲面 $S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ において、
十分近い2本の u 曲線と v 曲線で囲まれた
微小な四辺形 PQTR を考えよう。
この四辺形の面積を dS とすると、

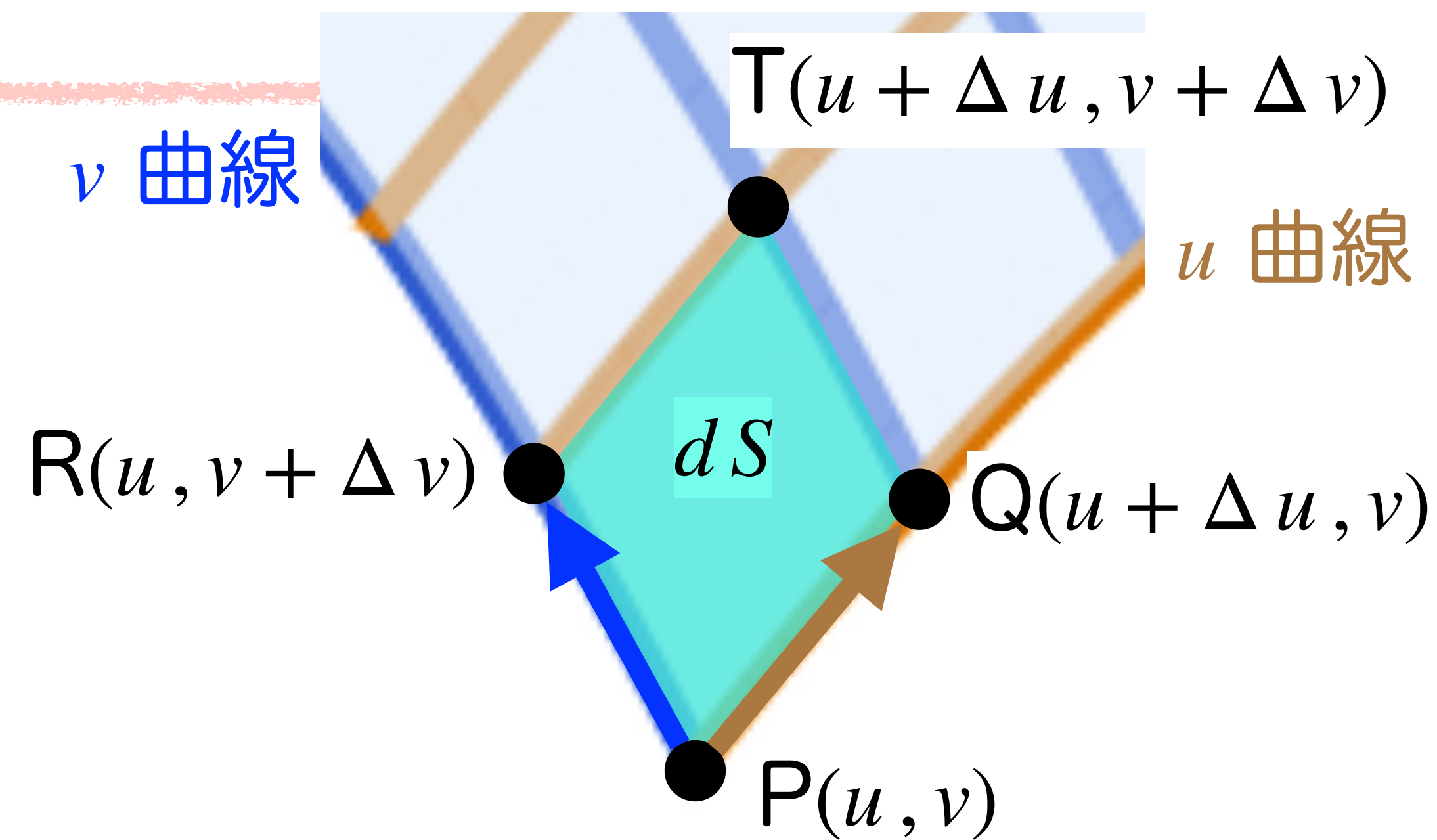
$dS \doteq \left| \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \right|$ と近似できる。さらに、

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{r}(u + \Delta u, v) - \mathbf{r}(u, v) \doteq \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u, \quad \overrightarrow{PR} = \mathbf{r}(u, v + \Delta v) - \mathbf{r}(u, v) \doteq \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v$$

と近似できる。 $\Delta u, \Delta v > 0$ を微小量 du, dv とみなせば、極限として次式を得る。

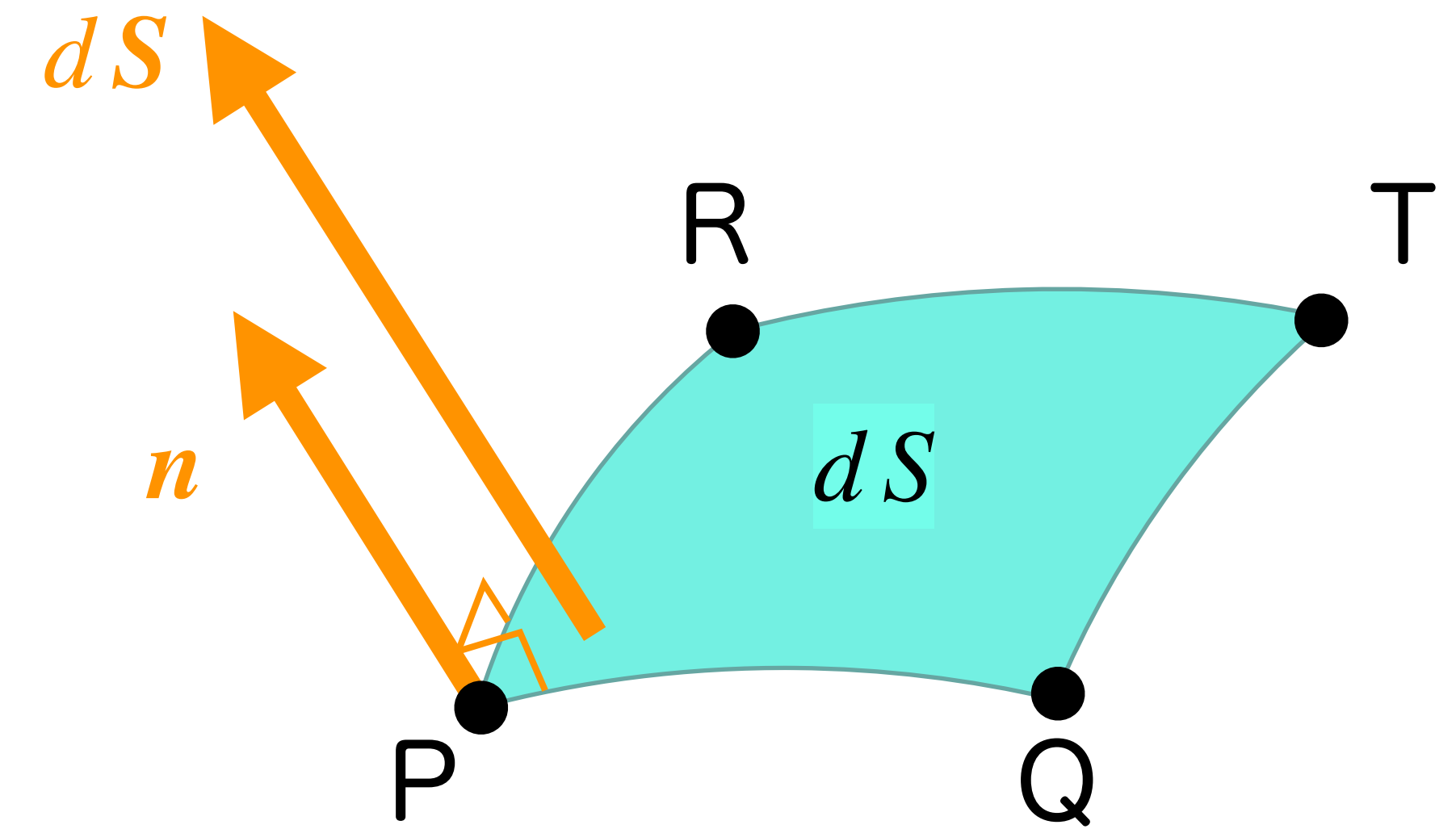
$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

この微小な面積の極限を **面積素** とよぶ。



ベクトル面積素

点 P での法単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ は
 点 P における接平面に垂直であった。
 微小な四辺形 $PQTR$ は近似的に
 この接平面上にあるとみなし、
 つぎの微小なベクトルを考える。



$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} dS = \boldsymbol{n} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| du dv = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right|} \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| du dv = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} du dv$$

これを **ベクトル面積素** という。曲面 S の面積はつぎの 2 重積分で求まる。

$$\iint_D \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| du dv \quad (\text{ただし、} D \text{ は } uv \text{ 平面上の領域で、曲面 } S \text{ と対応するもの})$$

曲面の面積公式

xyz 空間において、 $z = f(x, y)$ で表される曲面 S の面積を求めてみよう。

x と y を媒介変数とみれば、曲面 S はつぎのように表される。

$$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}$$

このとき、 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = (1, 0, f_x(x, y))$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (0, 1, f_y(x, y))$ となることから

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1), \quad \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$

曲面 S の面積はつぎの式によって求まる。右辺は微積分IIで学習した面積公式である。

$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right| dx dy = \iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dx dy$$

ただし、 D は xy 平面上で f が定義され、曲面 S に対応する領域である。

スカラーの面積分

スカラー場 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ が定義された空間内に曲面 S があるとする。

$$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

φ の S 上での **面積分** をつぎの 2 重積分で定める。

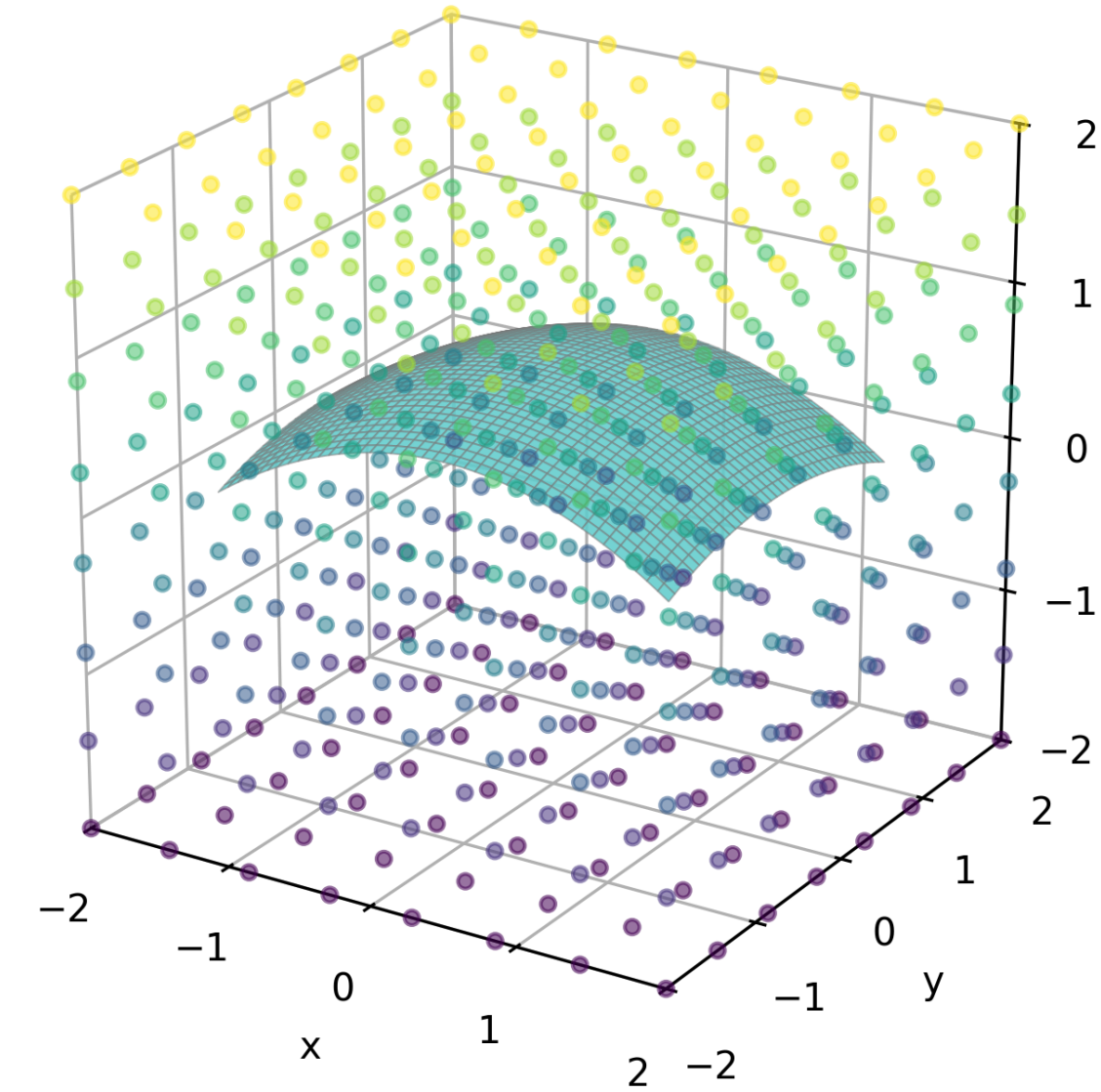
$$\iint_S \varphi dS = \iint_D \varphi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv$$

ここで、 D は uv 平面上の媒介変数領域である。

S を細かく分割し、各微小面の面積を ΔS_i 、代表点を P_i として和 $\sum_{i=1}^n \varphi(P_i) \Delta S_i$

を考え、分割の最大幅を 0 に近づけた極限 $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \varphi(P_i) \Delta S_i$ に等しい。

弧長要素 ds によるスカラー線積分 $\int_C \varphi ds = \int_a^b \varphi \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$ の 2 次元版である。



ベクトルの面積分

ベクトル場 $A = A(x, y, z) = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ と、向きづけられた曲面

$$S : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

を考える。 S の向きは、法線ベクトル $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ が定める向きを採用する。

A の S 上での **面積分** をつぎの 2 重積分で定める。

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad \left(d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS, dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv, \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \right) \\ &= \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv = \iint_D \mathbf{A}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv \end{aligned}$$

D は uv 平面上の媒介変数領域である。 S の向きを逆にすると、符号が反転する。
すなわち、 S の各微小面においてベクトル場 A を法単位ベクトル方向に射影し、面積素をかけて足し合わせたものの極限である。