

ベクトル解析

8 回目講義

畠中 英里

本日の講義の流れ

○ 本日の講義内容

- ・ 空間曲線
- ・ 接ベクトル
- ・ 弧長、弧長パラメータ
- ・ 接単位ベクトル
- ・ 曲率
- ・ スカラーの線積分

今日の講義

空間曲線

空間曲線

3次元空間で点が連続的に動くとき、その軌跡は曲線をなす。

これを **空間曲線** という。

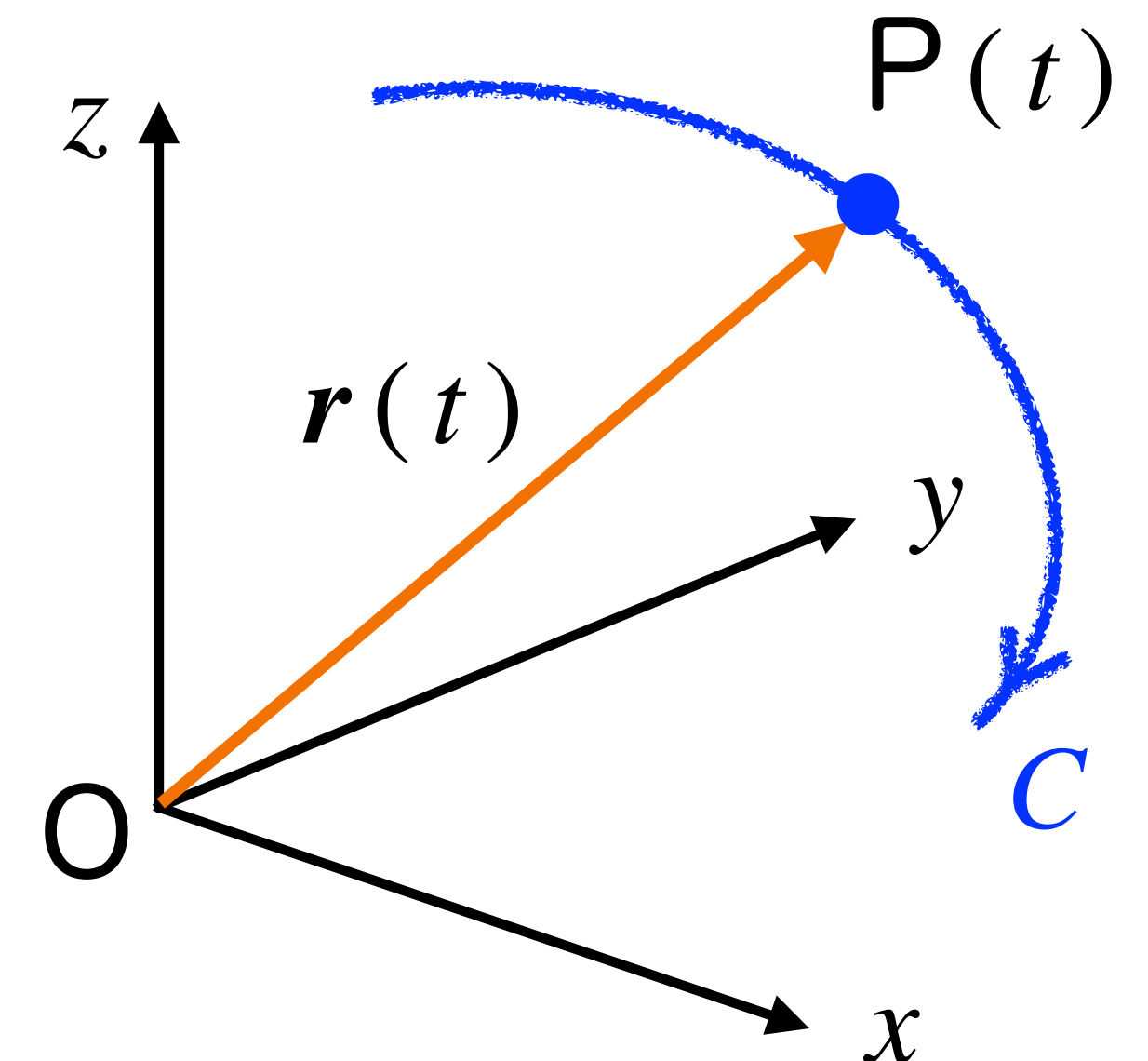
変数 t が動くのにもなって、空間内の点 $P(t)$ が動き、曲線 C を描くとき、点 $P(t)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP(t)}$ は t のベクトル関数となる。

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$$

これを曲線 C の **ベクトル方程式** とよぶ。

変数 t のことを **媒介変数、パラメータ** という。

t が増加する向きに沿って、曲線 C には向きが定まる。



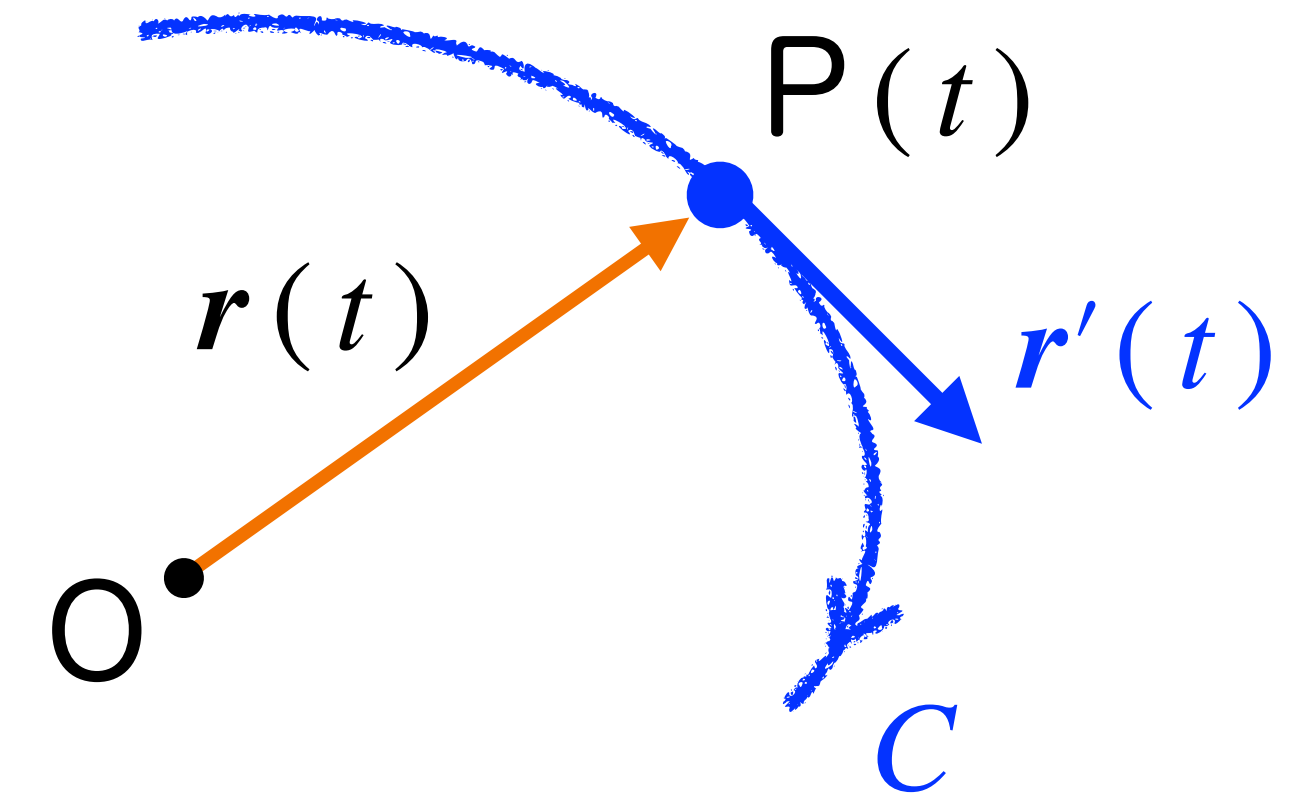
接ベクトル

t の区間を $a \leq t \leq b$ と指定すれば、曲線の一部（弧）を表す。

また、同じ曲線 C であっても、媒介変数 t の選び方は無数にあることに注意。

以降、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ は t で何回でも微分可能で、さらにすべての t でつぎが成り立つとする。

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \neq \mathbf{0}$$



3回目講義でみたとおり、

位置ベクトル $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ の微分 $\mathbf{r}'(t)$ は点 $P(t)$ における C の接ベクトルである。

媒介変数 t を時刻とみなすとき、 $\mathbf{r}'(t)$ を速度ベクトル $\mathbf{v}(t)$ というのであった。

空間曲線の例 1

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} = (a \cos t, a \sin t, 0) \quad (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$$

空間曲線 C は、 xy 平面上で原点 O を中心とした半径 a の円となる。

接ベクトル（媒介変数を時刻とみなせば速度ベクトル）は

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, 0)$$

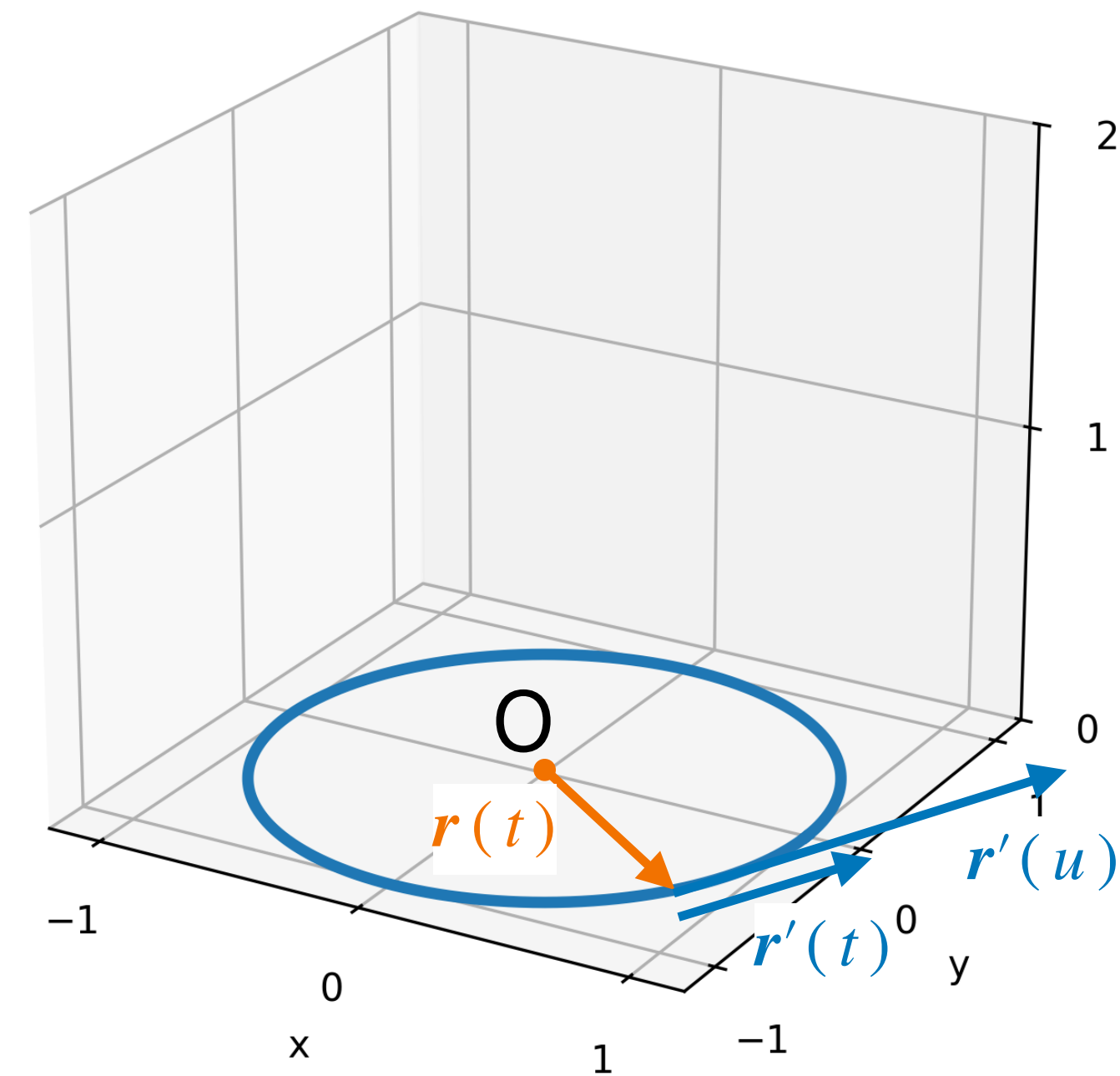
速さ（ $= |\mathbf{v}(t)|$ ）は、 $|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = a$ （一定）

同じ曲線 C を別の媒介変数 u で表してみよう。

$$\mathbf{r}(u) = (a \cos 2u, a \sin 2u, 0) \quad (0 \leq u \leq \pi)$$

このとき $\mathbf{r}'(u) = (-2a \sin 2u, 2a \cos 2u, 0)$ となることから $|\mathbf{r}'(u)| = 2a$ 。

媒介変数を変えると速さが変わる。また $\mathbf{r}(-t)$ は $\mathbf{r}(t)$ に対し逆向きの曲線となる。



空間曲線の例 2

7

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + b t \mathbf{k} = (a \cos t, a \sin t, b t) \quad (a, b > 0)$$

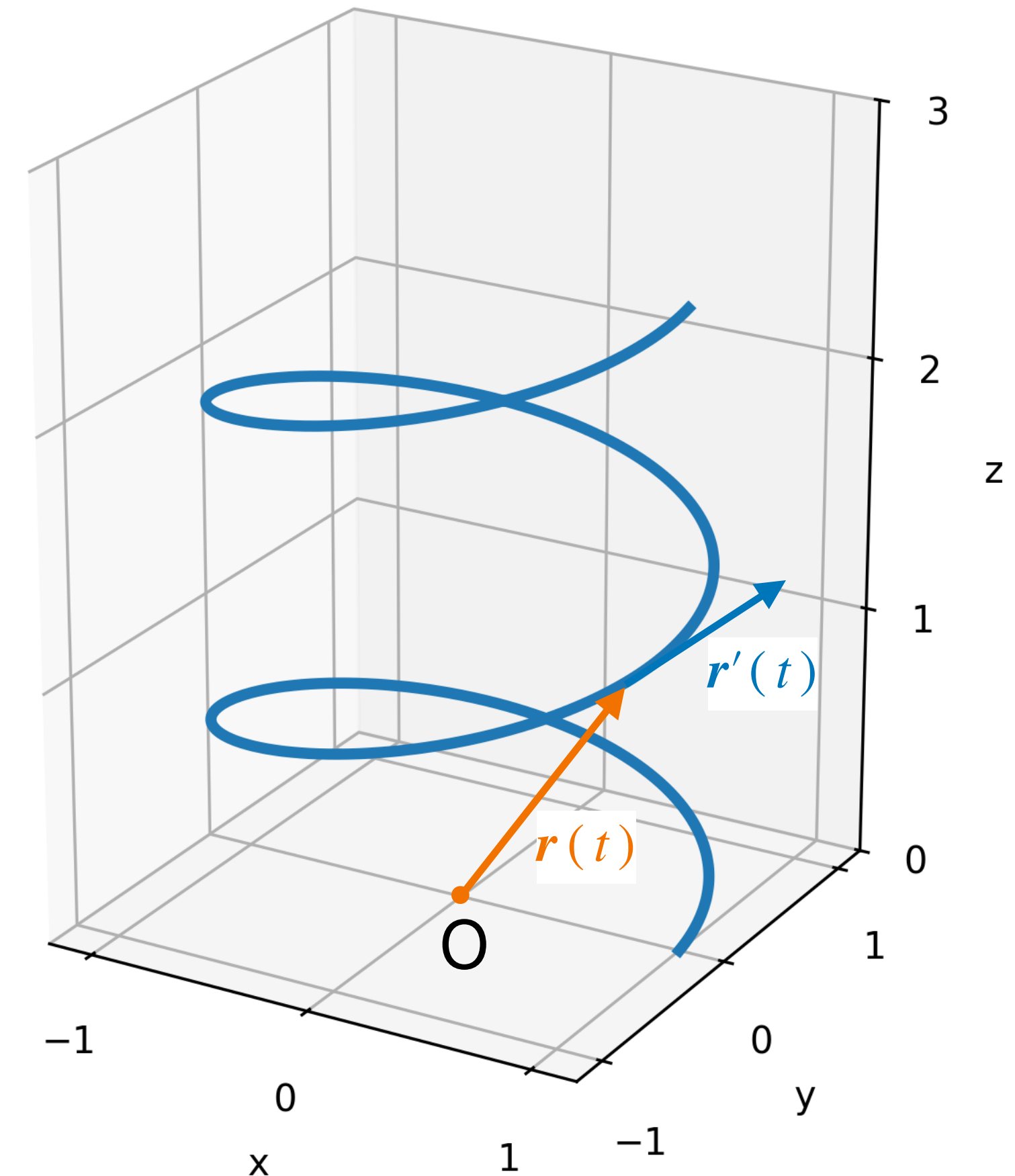
空間曲線 C は、 xy 平面上で円を描きながら z 方向に上昇していく。

この曲線を **らせん（ヘリックス）** とよぶ。

$$\mathbf{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

速さは $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$ （一定）

t が増える向きに曲線 C の向きが定まる。



曲線の分割

空間曲線 $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \quad (a \leq t \leq b)$

について、 $t = a, b$ のとき対応する点をそれぞれ A, B とする。

区間 $[a, b]$ を n 個の小区間に分割し、その分点を

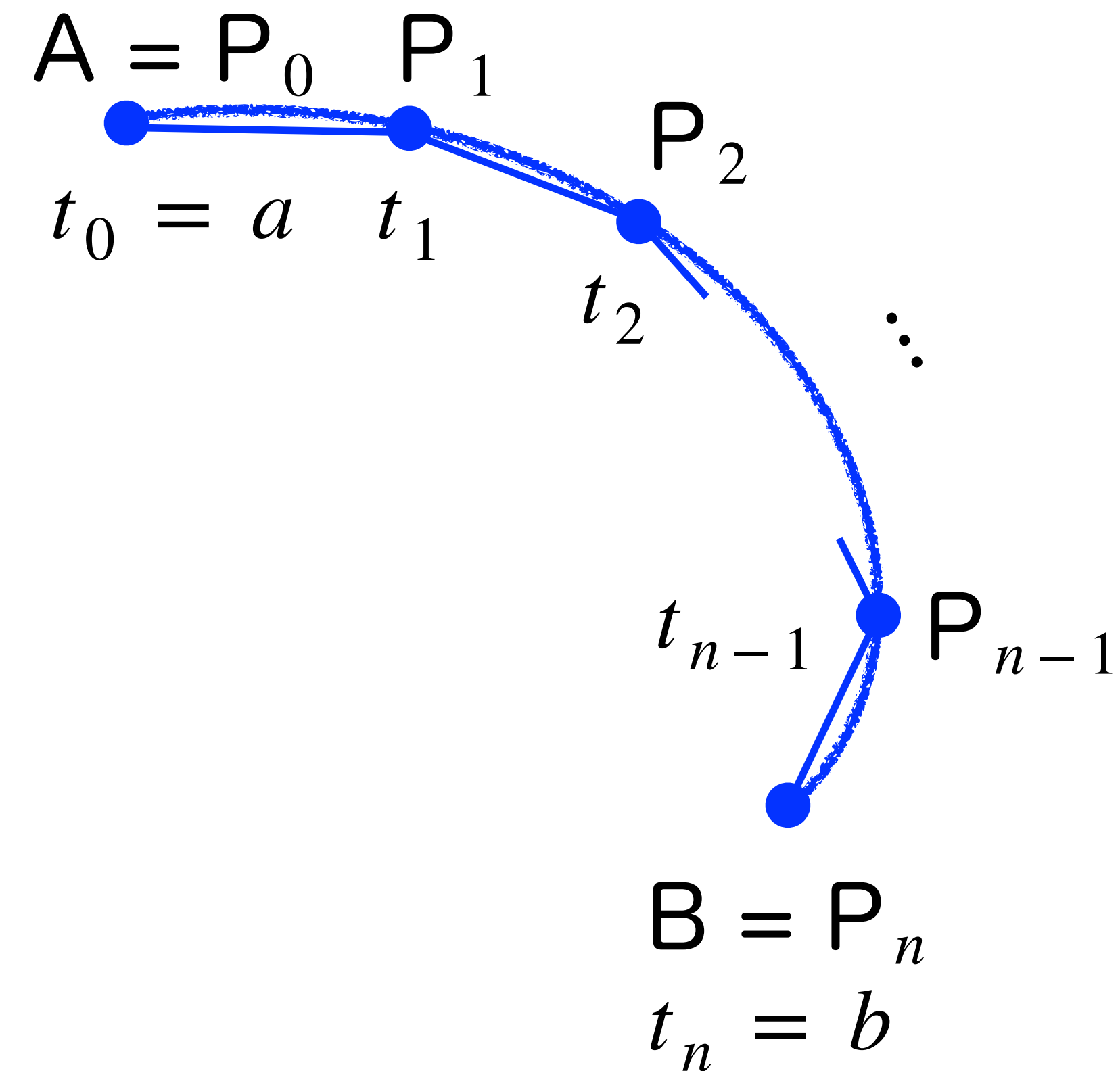
$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

とする。これに対応する C 上の点を

$$A = P_0, P_1, P_2, \dots, P_n = B$$

とする。折れ線 $P_0 P_1 P_2 \cdots P_n$ の長さを s_n とする。

$$s_n = \overline{P_0 P_1} + \overline{P_1 P_2} + \cdots + \overline{P_{n-1} P_n}$$



弧長

この分割の最大幅 $\max_i \Delta t_i$ を 0 に近づけると、 $\mathbf{r}(t)$ は何回でも微分可能と
していたことより、折れ線の長さ s_n は弧長 s に収束する。

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ のとき、極限值 s はつぎの式で与えられる。

$$s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

この公式は、さらにつぎのようにも表される。

$$\begin{aligned} s &= \int_a^b \left| x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \right| dt = \int_a^b \left| \frac{d}{dt} (x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}) \right| dt \\ &= \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt \end{aligned}$$

弧長の公式の説明

線分 $P_{i-1}P_i$ の長さ $\overline{P_{i-1}P_i}$ について考えてみよう。

2点の座標は $P_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1})$, $P_i(x_i, y_i, z_i)$ であり、

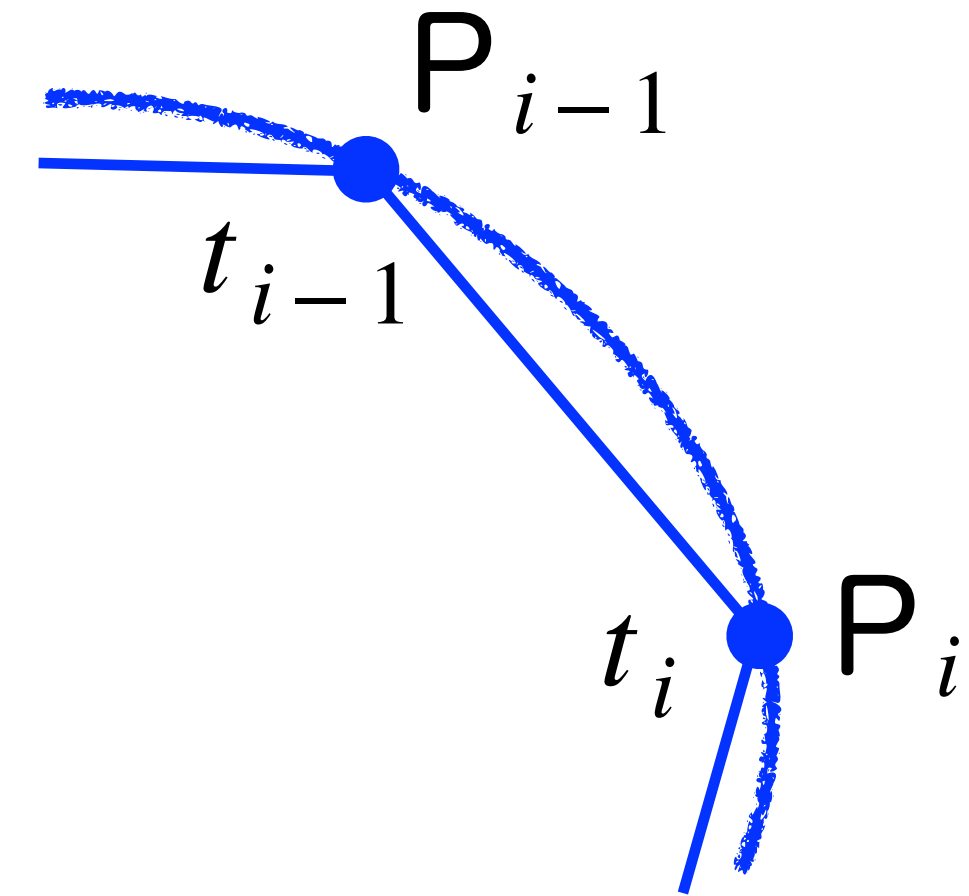
$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $y_i - y_{i-1} = \Delta y_i$, $z_i - z_{i-1} = \Delta z_i$ とおくと

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}$$

と表される。さらに $t_i - t_{i-1} = \Delta t_i$ として、折れ線 $P_0P_1P_2 \cdots P_n$ の長さ s_n は

$$s_n = \sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z_i}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = s \blacksquare$$



弧長の計算例

7ページのらせんについて、 $0 \leq t \leq 2\pi$ としたときの弧の長さを求めよう。

$$C : \mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + b t \mathbf{k} = (a \cos t, a \sin t, b t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

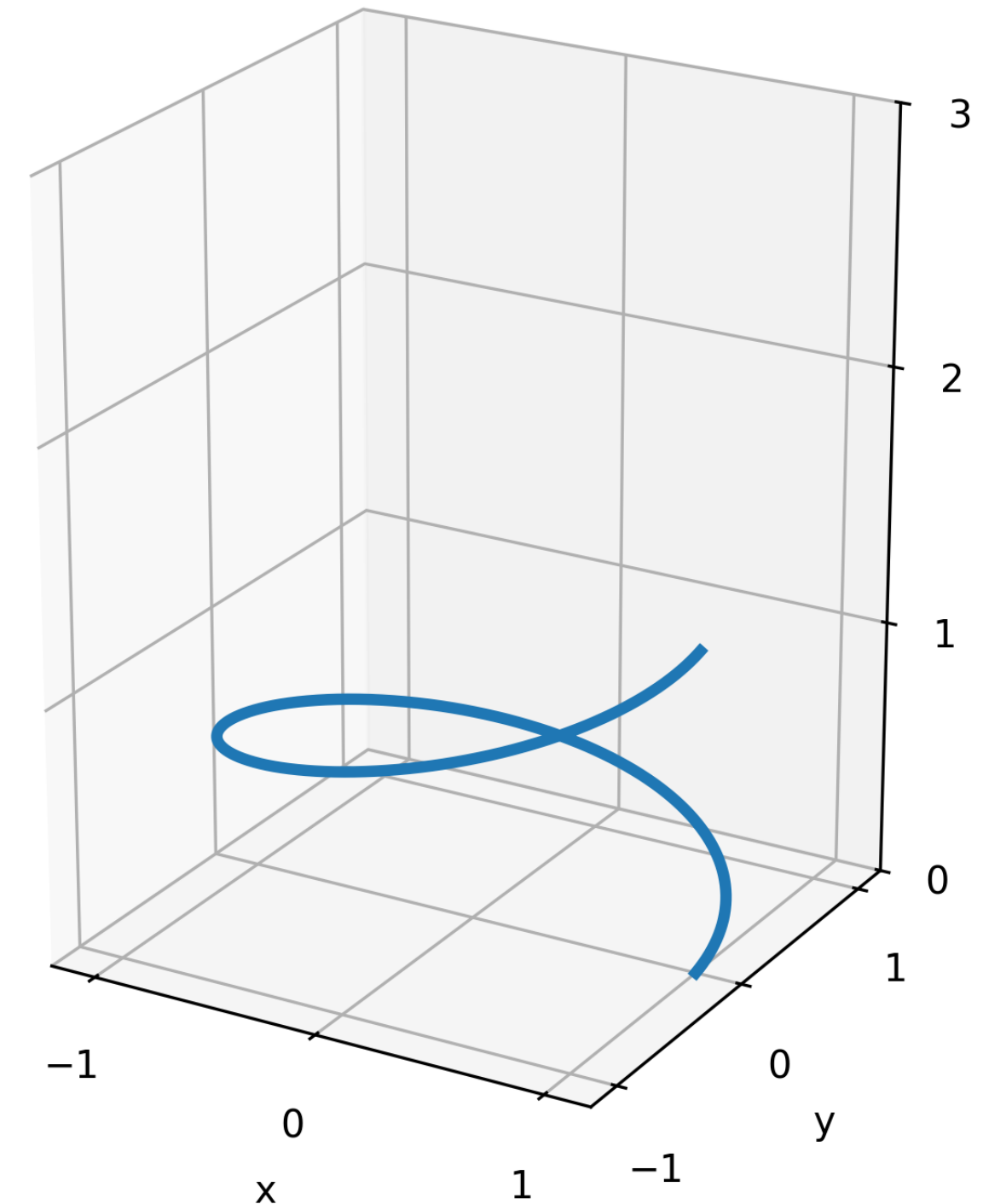
弧長の公式 $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$ を使う。

$$\mathbf{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b),$$

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ であったから}$$

求める弧の長さは

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} dt = \underline{\underline{2\pi \sqrt{a^2 + b^2}}}$$



弧長パラメータ

弧長の公式 $s = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$ において、

積分変数の t を u に変え、上端 b を変数 t に置き換えればつぎの式を得る。

$$s = s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} du = \int_a^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right| du$$

これは、曲線 C の点 $P(a)$ から点 $P(t)$ までの弧の長さを表す。

$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| > 0$ であるから、 $s(t)$ は狭義単調増加関数である。

したがって、逆関数 $t = t(s)$ が存在する。 s は弧の長さを表すパラメータである。

これを C を表す位置ベクトル $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ に代入し、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$ 。

このようにして C を弧長 s で表すことができる。 s を **弧長パラメータ** とよぶ。

弧長パラメータによる微分

s を弧長パラメータ、 t を任意のパラメータとする。合成関数の微分より

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds}$$

$\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ は接ベクトルであり、各点で曲線 C に接するのであった。

$\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ は $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ のスカラー倍であるから、各点で曲線 C に接する方向となる。また、

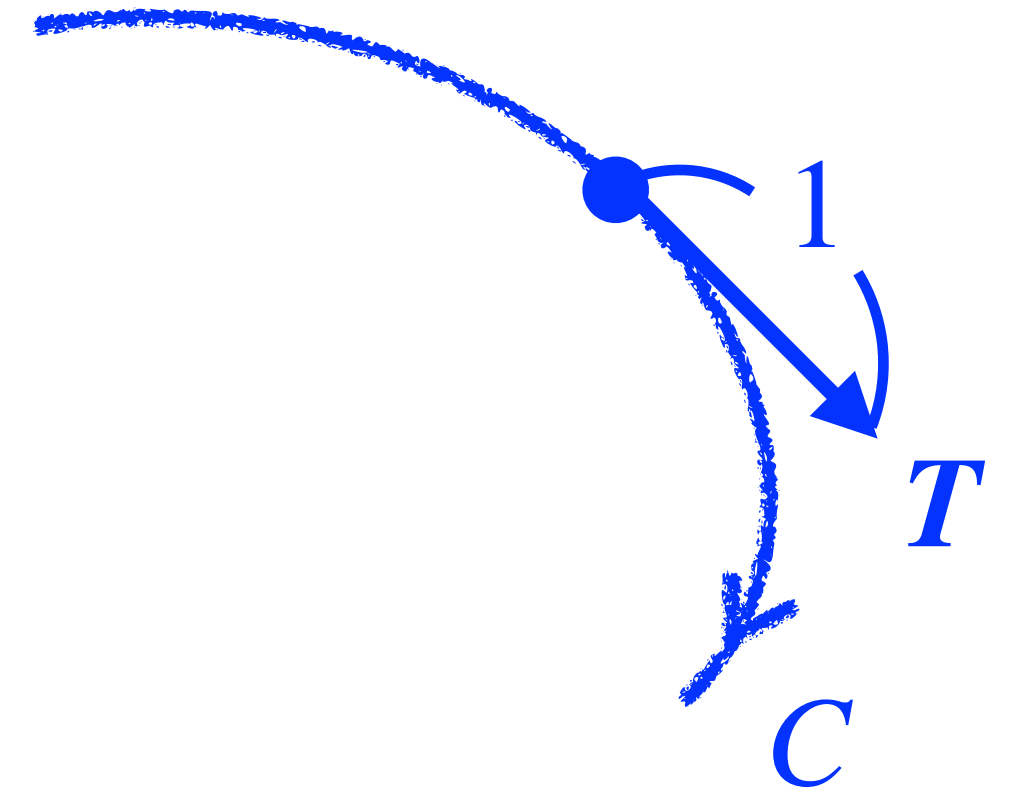
$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \left| \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| / \left| \frac{ds}{dt} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| / \frac{ds}{dt} \quad \left(\frac{ds}{dt} > 0 \right)$$

$$s(t) = \int_a^t \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \right| du \text{ より } \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \text{ なので } \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| / \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = 1 \text{ となる。}$$

接単位ベクトル

したがって

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = 1$$



以上をまとめると、 $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ は各点で曲線 C に接する単位ベクトルである。

これを記号 T で表し、 C の **接単位ベクトル** という。

$$T = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \bigg/ \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \quad (\text{各点で曲線 } C \text{ に接する単位ベクトル})$$

接単位ベクトルの計算例

7ページのらせんについて、接単位ベクトルを求めてみよう。

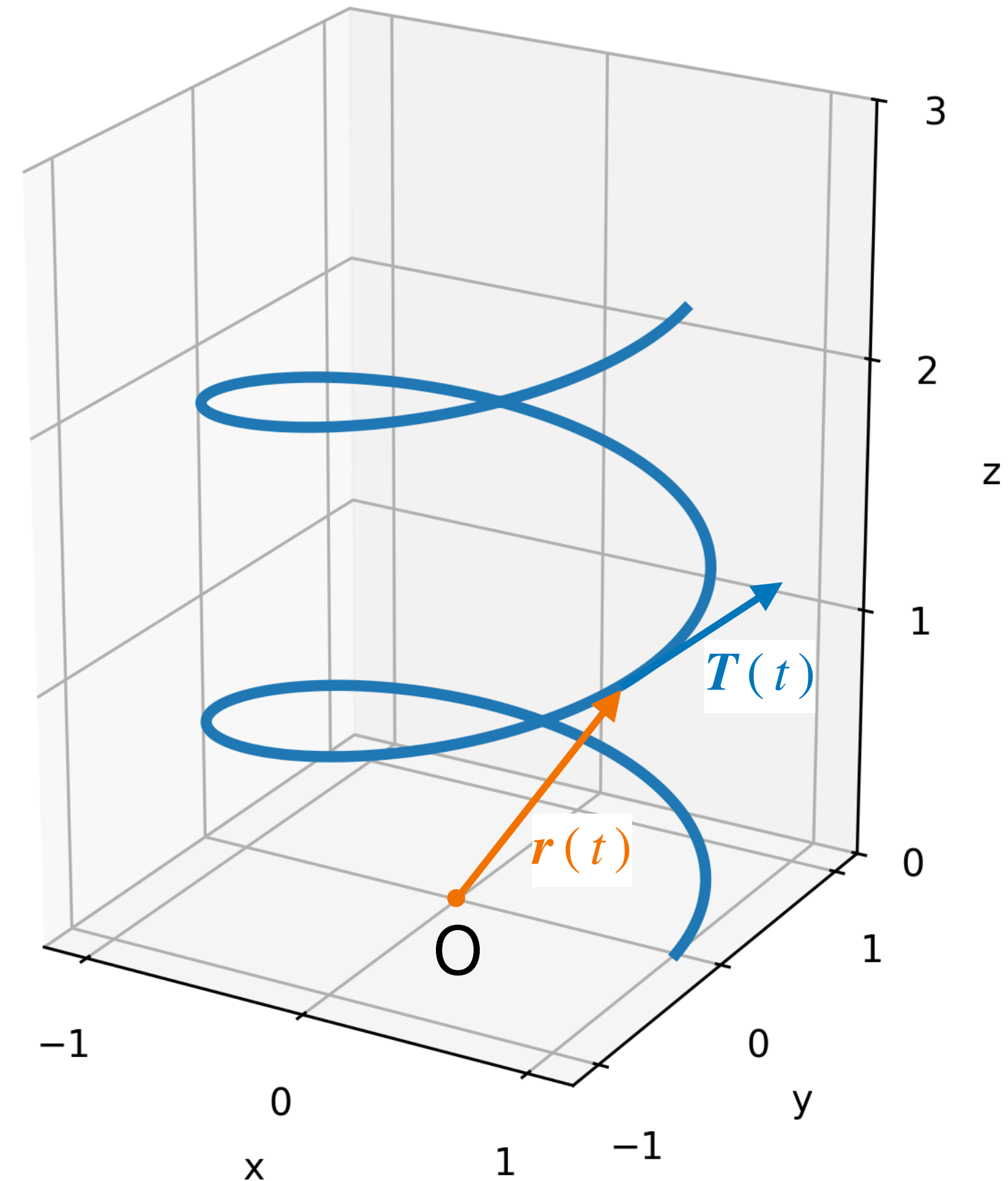
$$C : \mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + b t \mathbf{k} = (a \cos t, a \sin t, b t) \quad (a, b > 0)$$

$$\mathbf{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b),$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{定数})$$

であったから、各点での接単位ベクトルは

$$\mathbf{T}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \bigg/ \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t, a \cos t, b)$$



曲率

接単位ベクトル $T = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|$ は、単位ベクトルであるから

$$T \cdot T = |T|^2 = 1$$

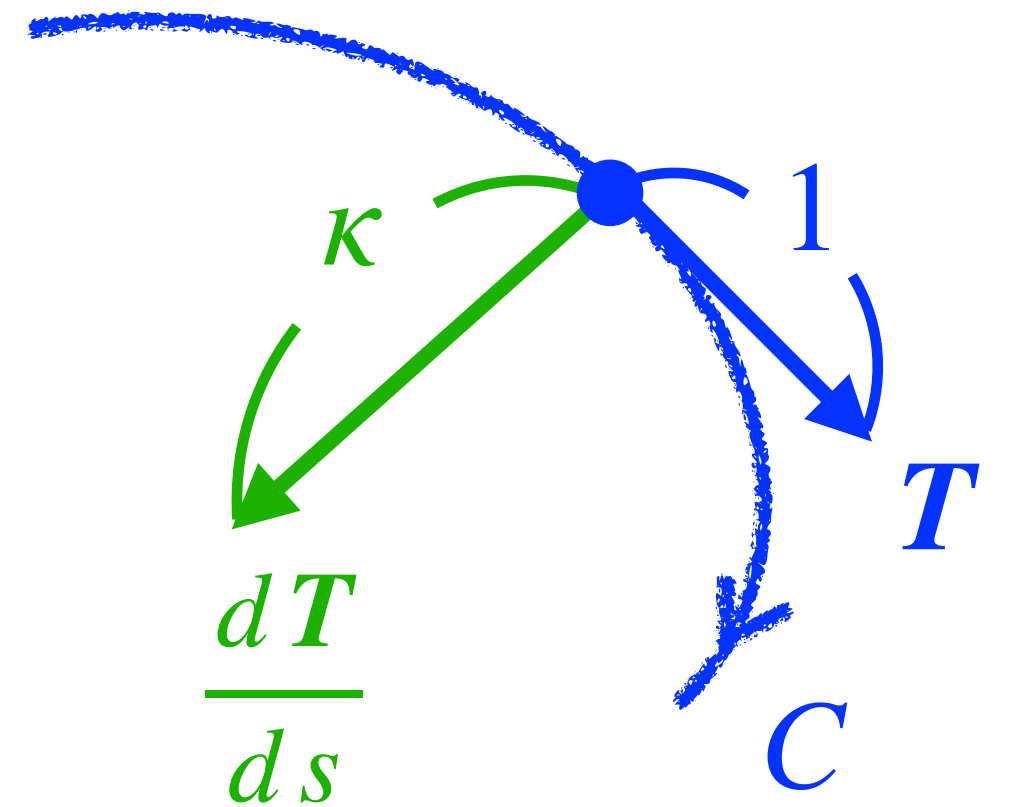
となる。両辺を s で微分してつぎを得る。

$$\frac{dT}{ds} \cdot T + T \cdot \frac{dT}{ds} = 0 \Leftrightarrow 2 T \cdot \frac{dT}{ds} = 0 \Leftrightarrow T \cdot \frac{dT}{ds} = 0$$

すなわち、ベクトル $\frac{dT}{ds}$ は $\mathbf{0}$ でなければ T に垂直である。

$$\text{カッパ} \quad \kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right| \geq 0$$

の値のことを、曲線 C の **曲率** という。



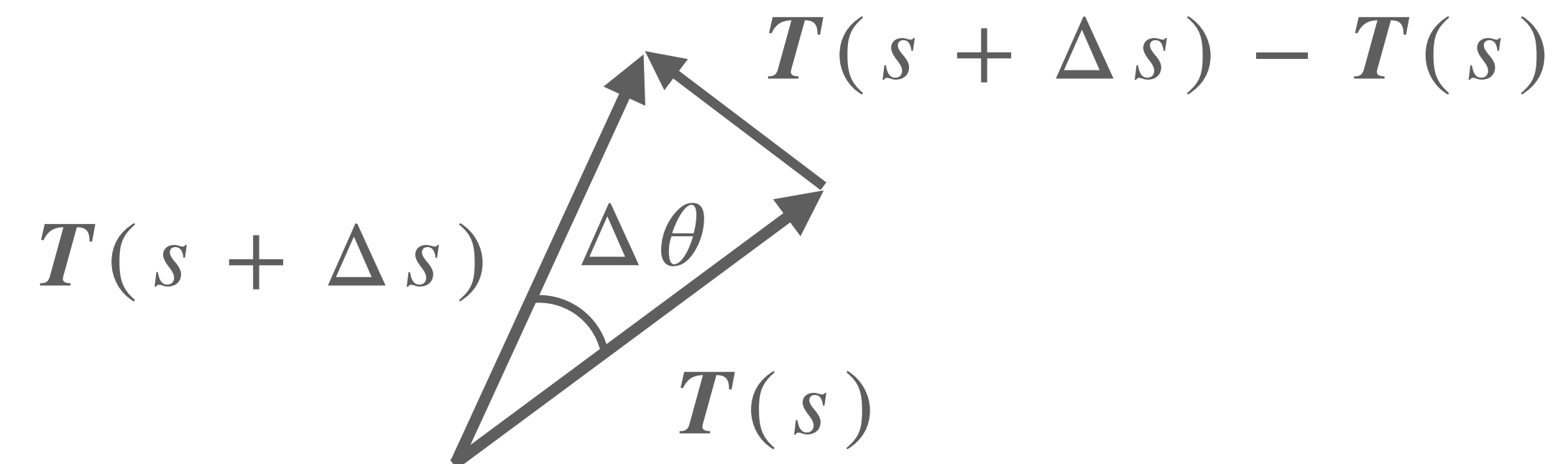
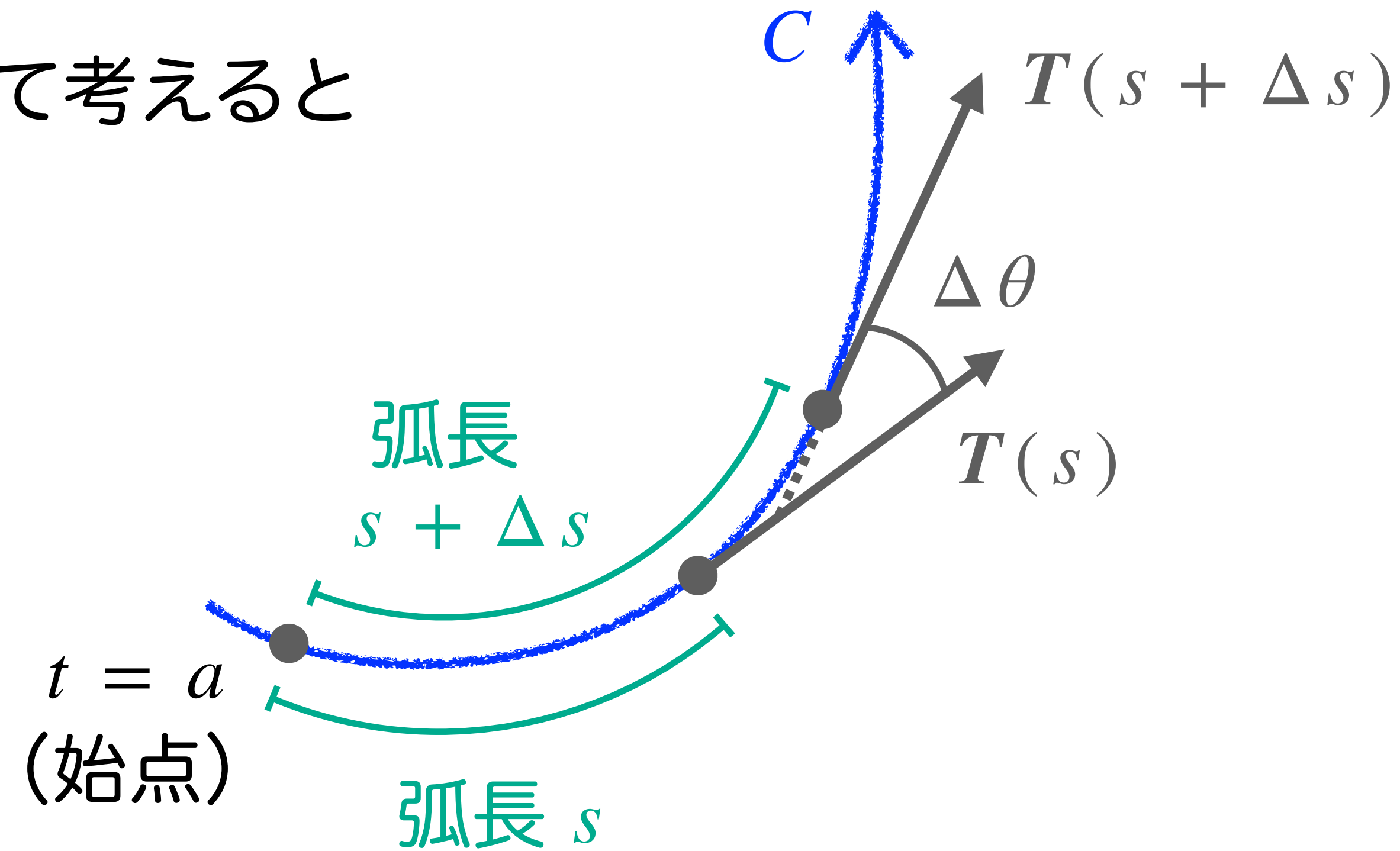
曲率の幾何学的意味

曲率 $\kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right|$ について微分の定義に基づいて考えると

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|T(s + \Delta s) - T(s)|}{\Delta s}$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{|\Delta \theta|}{2}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \theta|}{\Delta s}$$

ただし、 $\Delta \theta$ は右図の角度であり、
半径 1, 角 $\Delta \theta$ の円弧の長さは $\Delta \theta$ である。
すなわち、曲率 κ は弧長 s の増加にともなう
接単位ベクトル T の回転の割合を表す。
これは曲線 C の “ まがり具合 ” である。



曲率の計算例 1

らせんの曲率 κ を求めてみよう。

$$C : \mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + b t \mathbf{k} = (a \cos t, a \sin t, b t) \quad (a, b > 0)$$

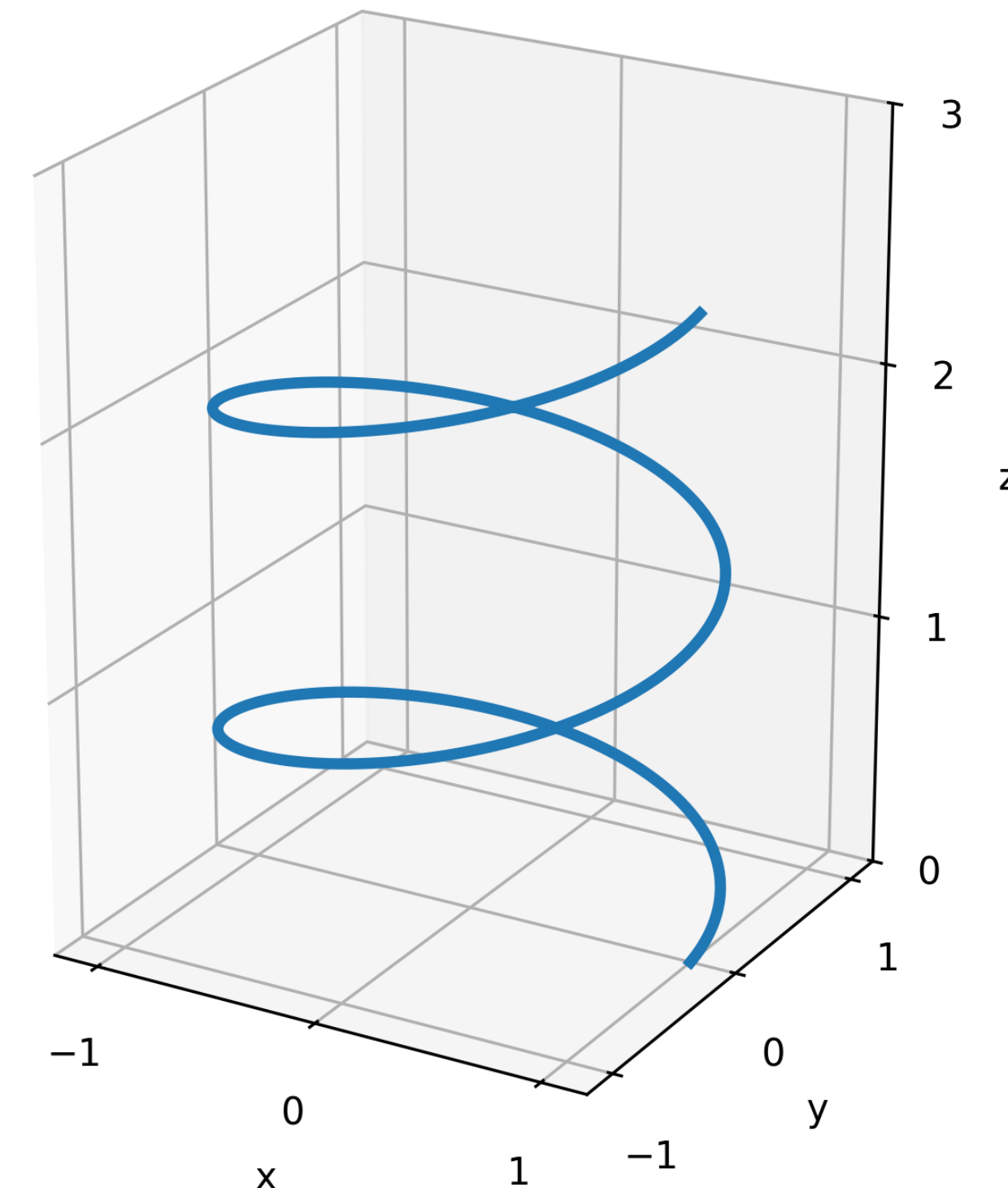
15ページより $\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t, a \cos t, b)$ であった。

これを t で微分すると $\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \cos t, -a \sin t, 0)$

また、 $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{a^2 + b^2}$ であるから

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{a^2 + b^2} (-a \cos t, -a \sin t, 0)$$

$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{a}{a^2 + b^2}$, すなわち、らせんの曲率は一定である。



曲率の計算例 2

円の曲率 κ も求めておこう。

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} = (a \cos t, a \sin t, 0) \quad (a > 0)$$

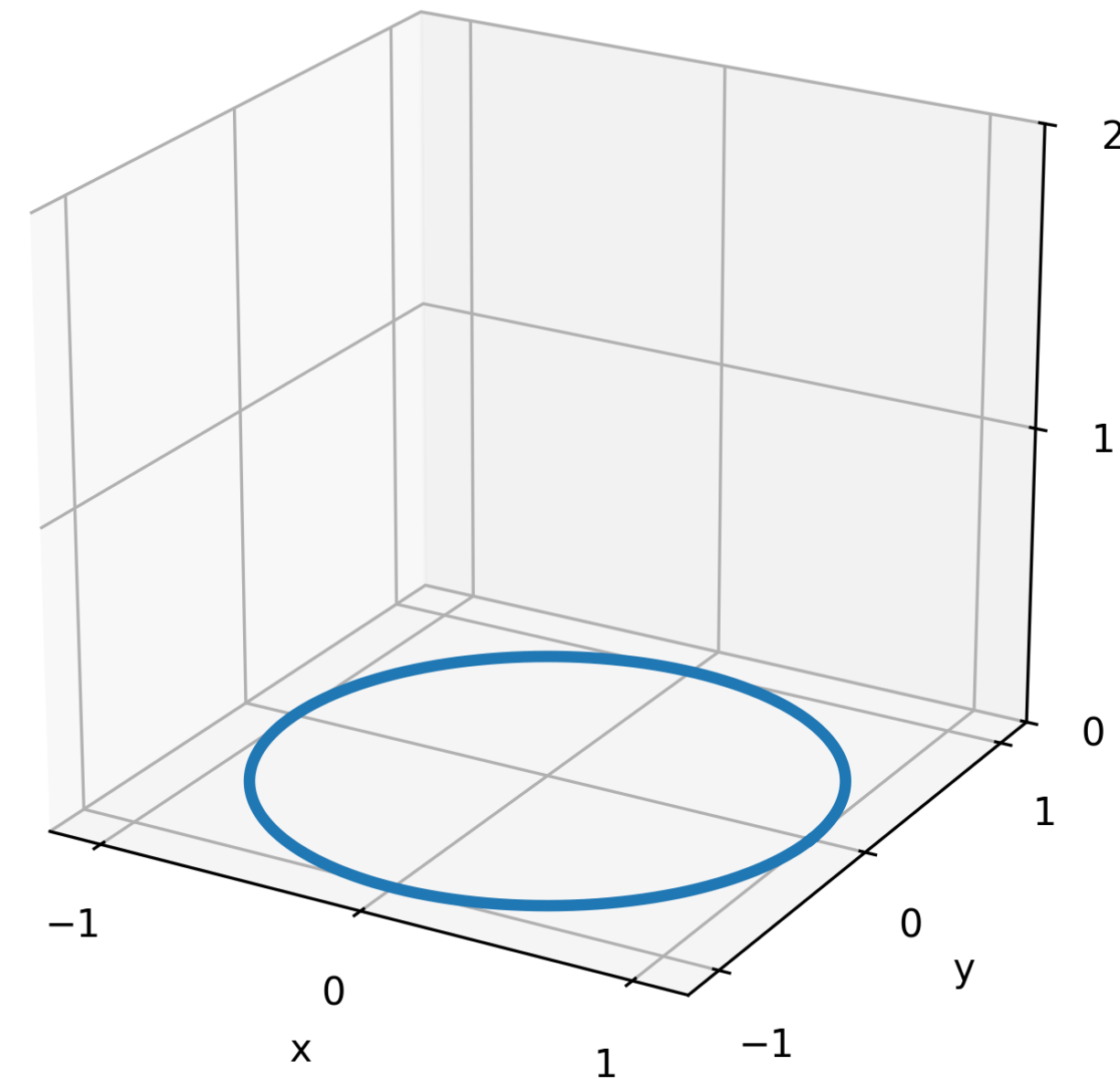
$$\mathbf{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, 0), \quad |\mathbf{r}'(t)| = a \text{ より}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \bigg/ \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = (-\sin t, \cos t, 0), \quad \frac{d\mathbf{T}}{dt} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

$$\text{また、} \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = a \text{ であるから}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{a} (-\cos t, -\sin t, 0)$$

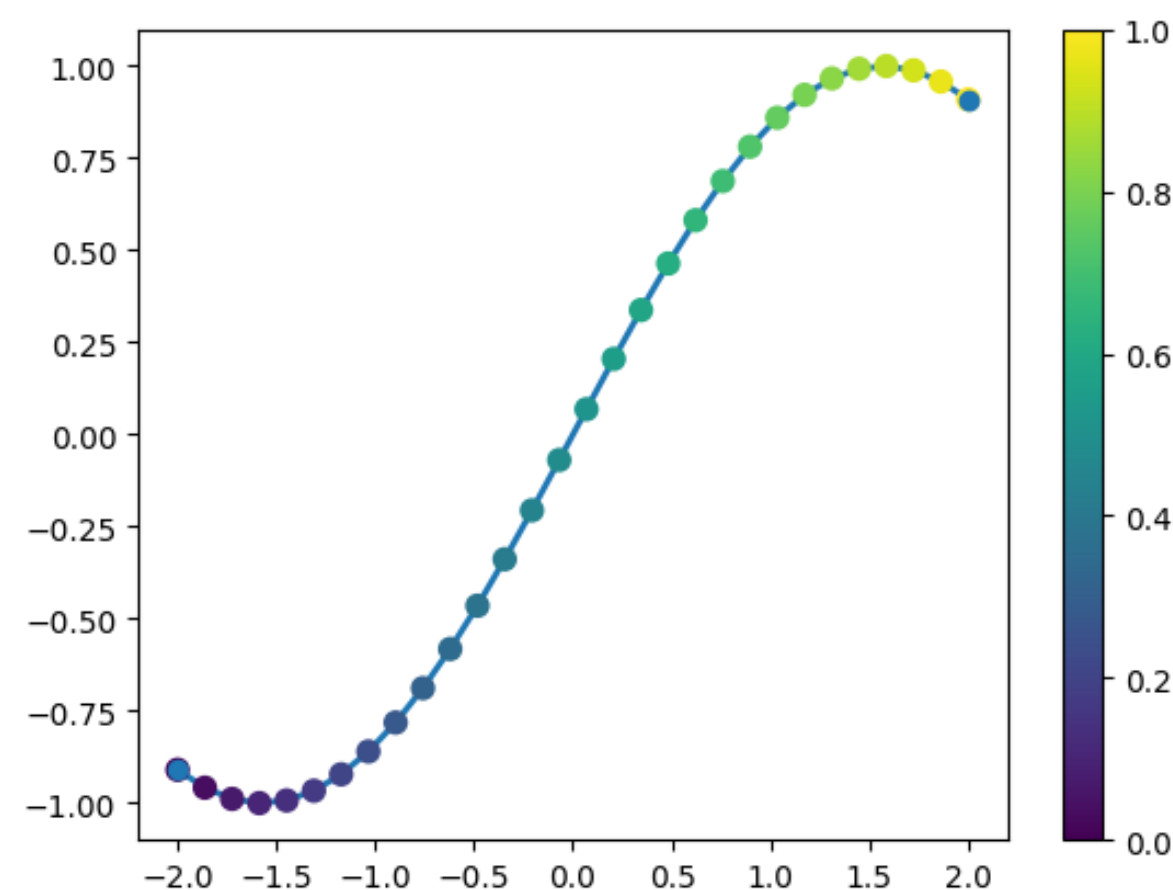
$$\text{これより } \kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{1}{a}, \text{ 円の曲率は一定で、半径が大きいほど円の曲率は小さい。}$$



線積分のイメージ

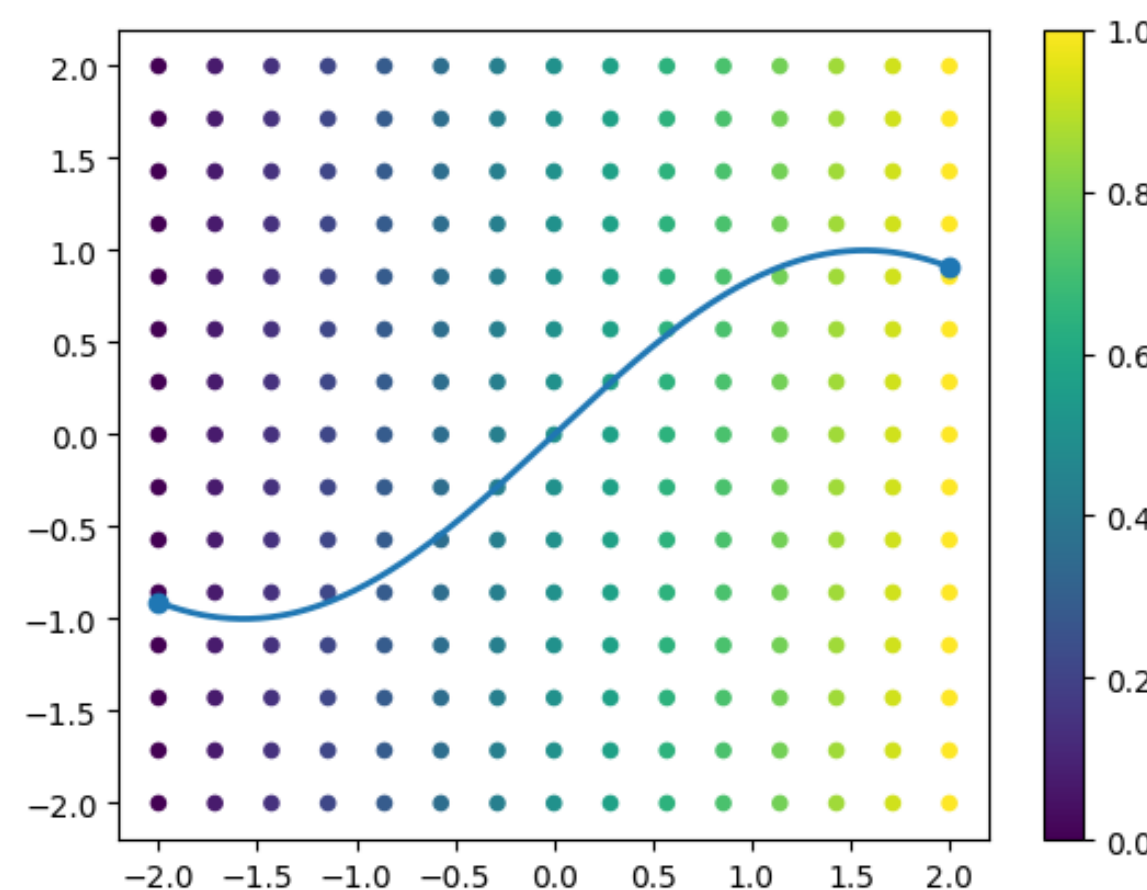
スカラー場やベクトル場などの場における量を、空間全体ではなく、
曲線上だけで考えたいことがある。

例：針金の線密度、曲線に沿った温度分布、経路に沿った仕事



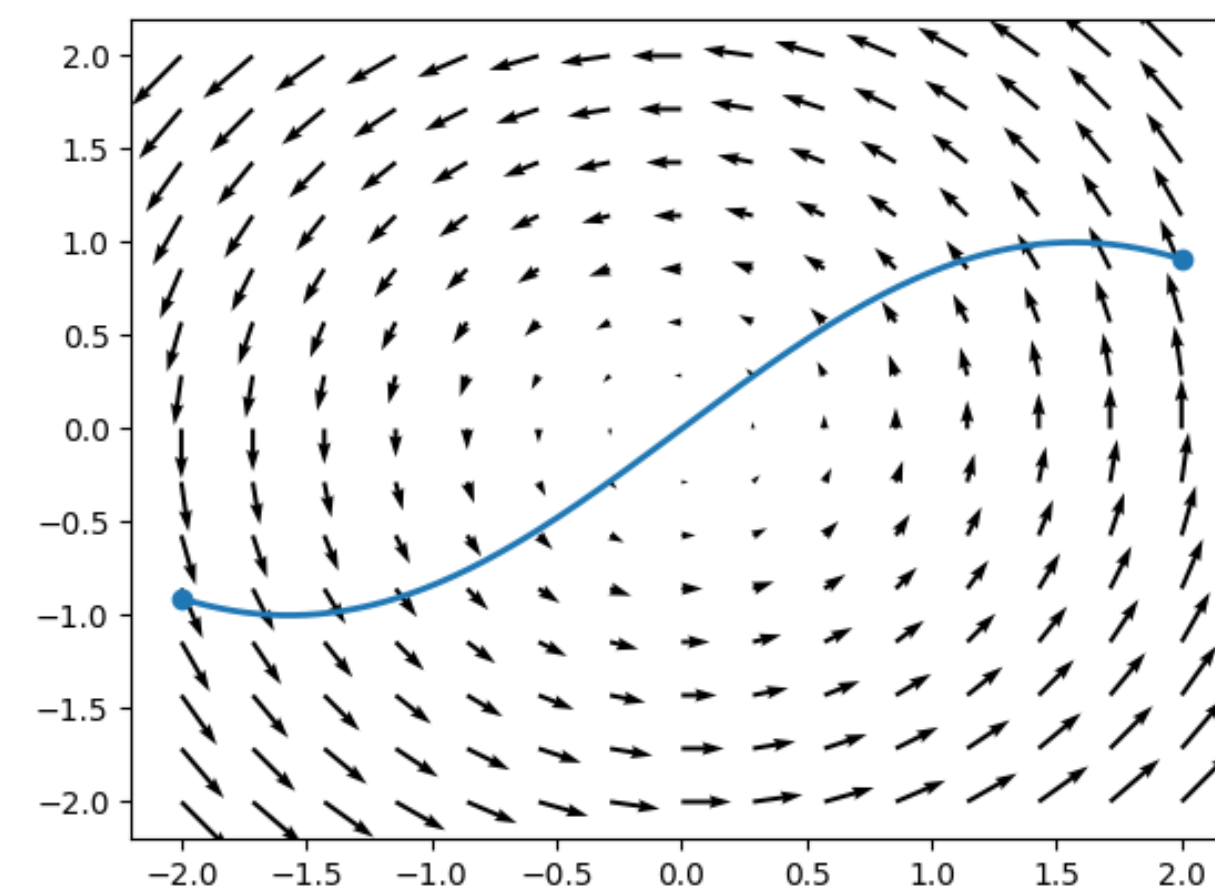
線密度

$$\int_C \rho \, ds$$



スカラー場 + 曲線

$$\int_C \varphi \, ds$$



ベクトル場 + 曲線

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

このようなとき、曲線に沿って場の量を足し合わせる操作が **線積分** である。

媒介変数 t による積分

スカラー場 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ 内に空間曲線 C があるとする。

$$C : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (a \leq t \leq b)$$

曲線 C 上のスカラー場 φ の値を、媒介変数 t に関して積分することを考える。

$$\int_a^b \varphi(x(t), y(t), z(t)) dt \quad (\text{媒介変数 } t \text{ による曲線上の積分と呼ぶ。})$$

ここで、 $\varphi(x(t), y(t), z(t))$ は x, y, z の関数 φ を t で表したものである。

曲線の始点を $A(t = a)$ 、終点を $B(t = b)$ とするとき、つぎのようにも表す。

$$\int_C \varphi dt, \quad \int_{\widehat{AB}} \varphi dt, \quad \int_{AB} \varphi dt \quad (\text{ここでは } AB \text{ で弧 } AB \text{ を表すとする})$$

この値は、媒介変数 t の選び方に依存することに注意する。

スカラーの線積分（弧長による積分）

通常、スカラー場の曲線に沿った線積分では、弧長 ds を用いる。

弧長要素 ds を用いて、スカラー場 φ の曲線 C に沿った線積分を

$\int_C \varphi ds$ と定義する。曲線 C を任意の媒介変数 t によって $r = r(t)$ ($a \leq t \leq b$)

と表すと、 $\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$ であったから

$$\int_C \varphi ds = \int_a^b \varphi \frac{ds}{dt} dt = \int_a^b \varphi(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

$\varphi = \varphi(x, y, z) = 1$ のとき、

$$\int_C \varphi ds = \int_C 1 ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

となり、これは曲線 C の弧長となる。

媒介変数 t による積分と線積分の比較 (1)

23

スカラー場 $\varphi(x, y, z) = x$,

空間曲線 $C : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} = (t, t^2, 0) \quad (0 \leq t \leq 1)$

として媒介変数 t による積分 $\int_C \varphi dt$ を求めてみよう。

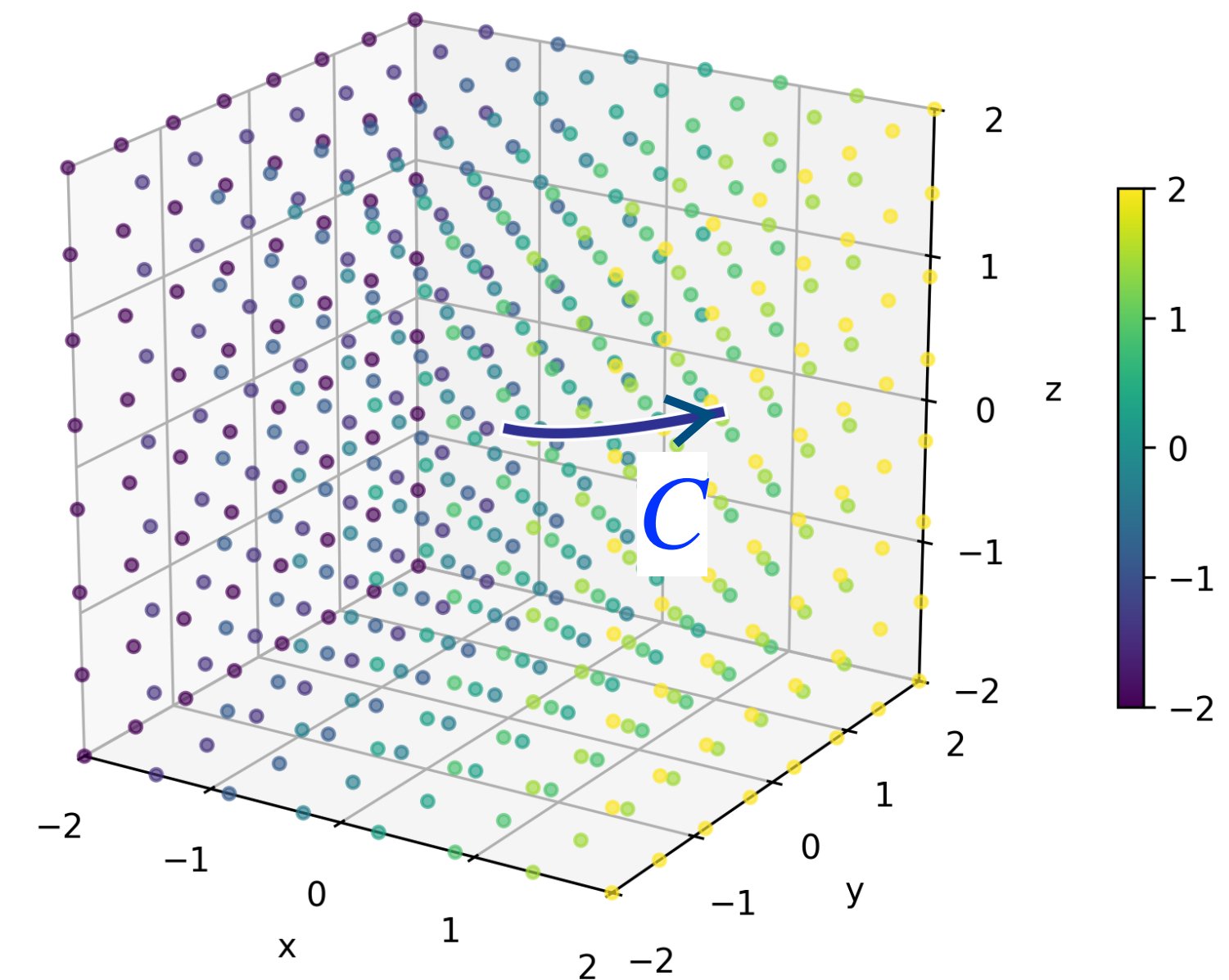
$$\varphi(x(t), y(t), z(t)) = t$$

と表せることより

$$\int_C \varphi dt = \int_0^1 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

つぎに、同じスカラー場 φ , 同じ空間曲線 C について、

弧長パラメータ s によるスカラー線積分 $\int_C \varphi ds$ を求めてみよう。



媒介変数 t による積分と線積分の比較 (2)

24

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (1, 2t, 0) \text{ より } \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{1 + 4t^2} \text{ であるから}$$

$$\int_C \varphi ds = \int_C \varphi \frac{ds}{dt} dt = \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

$$= \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} (1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{12} (5^{\frac{3}{2}} - 1)$$

以上より、同じスカラー場 φ , 同じ空間曲線 C であっても一般には

$$\int_C \varphi dt \neq \int_C \varphi ds$$

媒介変数 t による積分 $\int_C \varphi dt$ の値は、媒介変数の選び方に依存することに注意する。