# ベクトル解析

## ６回目講義

畠中　英里

# 本日の講義の流れ

○ 前回の復習

○ 本日の講義内容

・回転

・回転の公式

・回転とポテンシャル

・これまでのまとめ

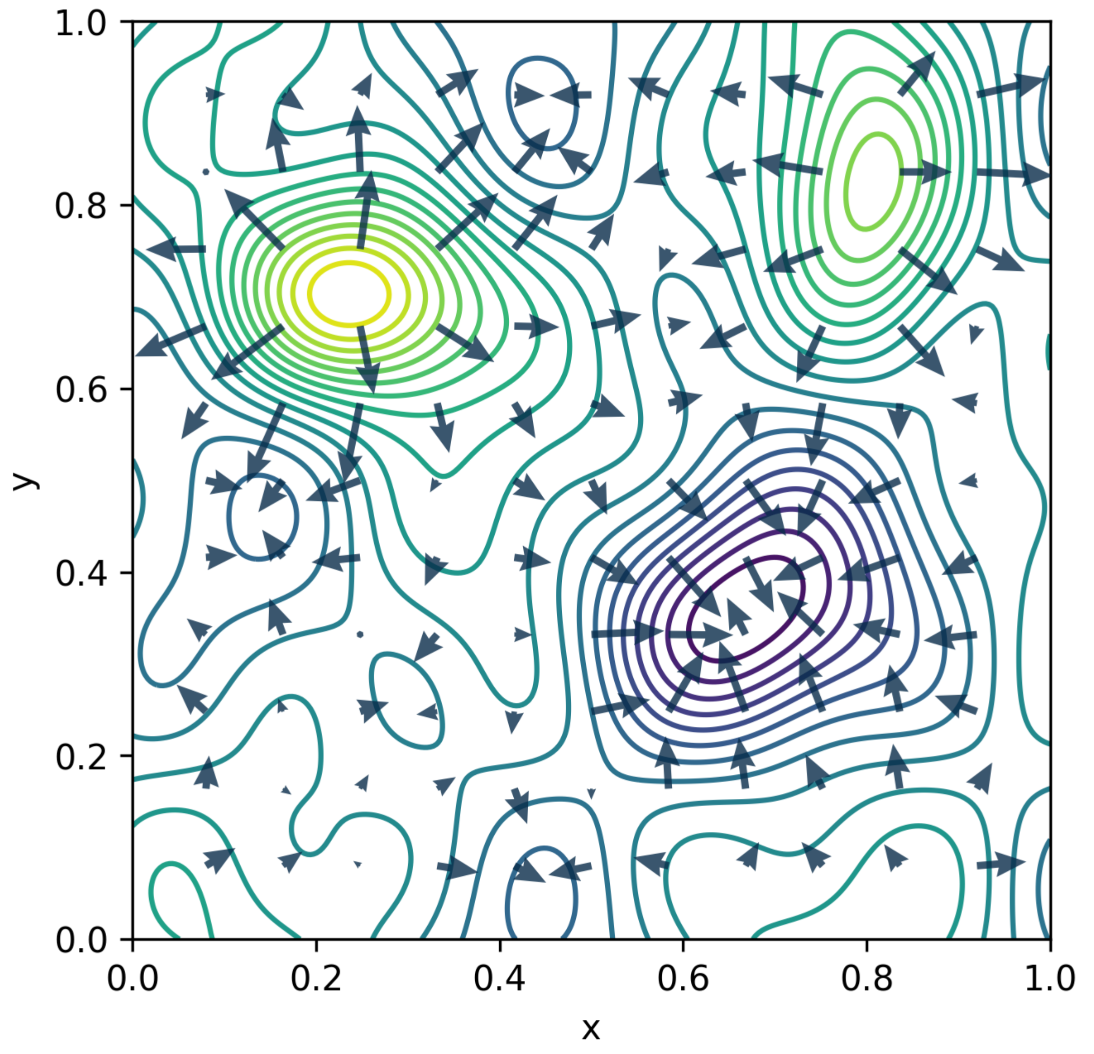
・これまでのまとめ問題

# 前回の復習（1）

ベクトル場 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x, y, z)$ に対し、スカラー場 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ があって、

$$\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi$$

が成り立つとき、$\varphi$ を $\boldsymbol{A}$ の ポテンシャル という。




$\varphi$ が $\boldsymbol{A}$ のポテンシャルであるとき、

$\varphi + c$（$c$ は定数）も $\boldsymbol{A}$ のポテンシャルであることに注意する。

$\boldsymbol{A}$ は $\varphi$ の等位面（等位線） に直交し、$\varphi$ の値が高い方から低い方へと指し示す。

例：$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$（位置ベクトル）、$r = |\boldsymbol{r}|$（$r \neq 0$）としたとき

ベクトル場 $\boldsymbol{A} = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ に対し、 スカラー場 $\varphi = -\dfrac{1}{r}$ はポテンシャルである。

# 前回の復習（2）



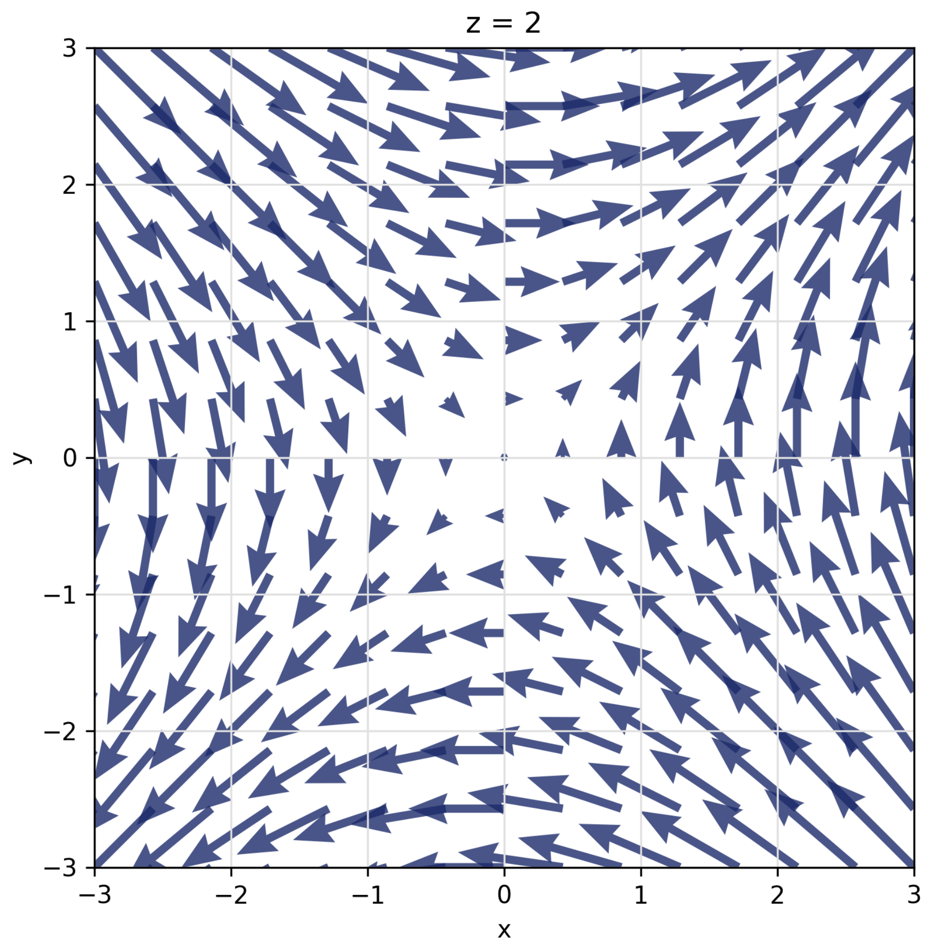
ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \left(A_x, A_y, A_z\right)$ に対し、つぎで定まるスカラー場を

$\boldsymbol{A}$ の 発散 という。（$A_x, A_y, A_z$ はそれぞれが 3 変数 $x, y, z$ の関数である。）

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(A_x, A_y, A_z\right) = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$$

例：$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x,y,z) = \left(yz, zx, xy\right)$ とすると

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial\left(yz\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(zx\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(xy\right)}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$




発散が 0 とは、各点のまわりの小領域において、その境界上の

（出る量）−（入る量）= 0 となり、湧き出しや吸い込みがない状態。

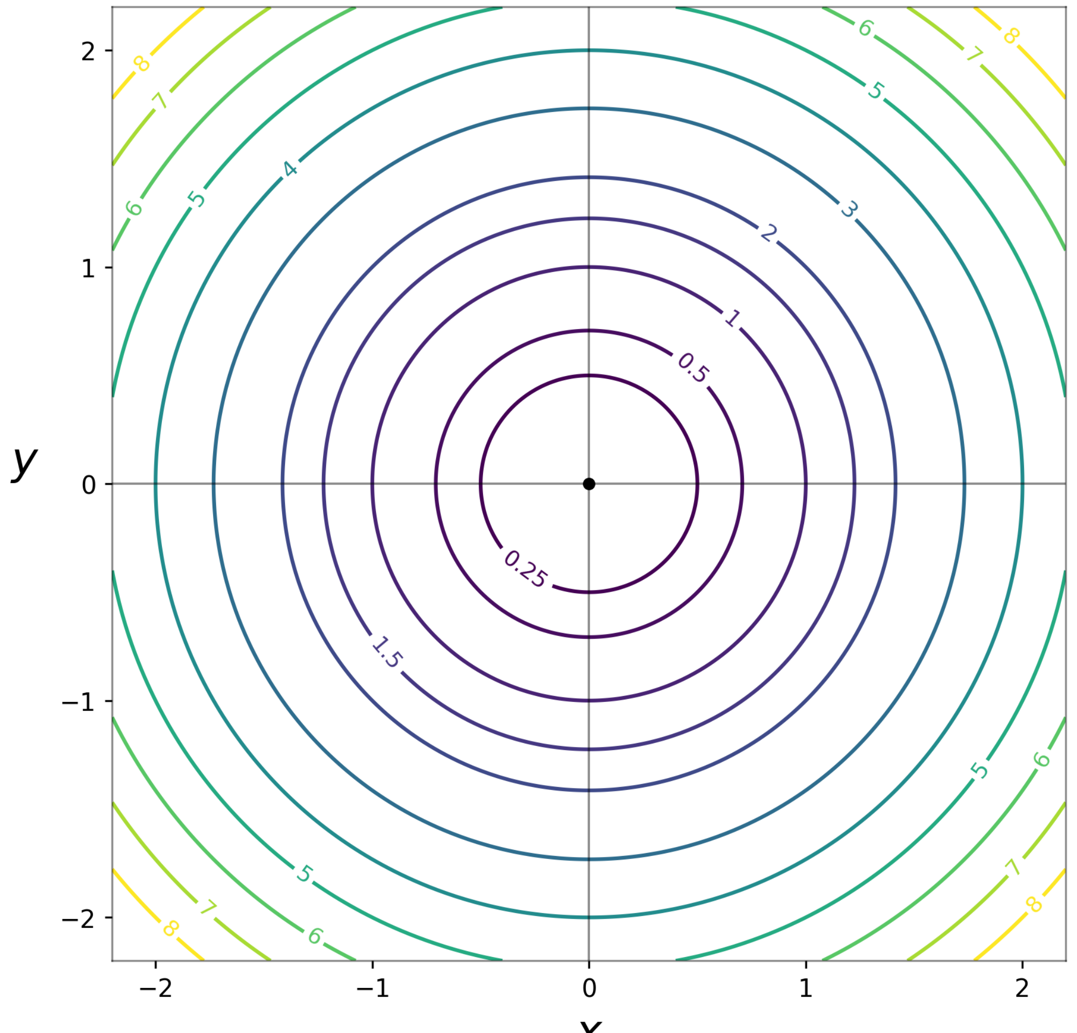
# 前回の復習（3）

スカラー場 $\varphi$ の勾配 $\nabla\varphi$ の発散 $\mathrm{div}\,\nabla\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi)$ を、$\nabla^2\varphi$ と表す。

$$\nabla^2\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

微分演算子 $\nabla$ どうしの内積 $\nabla\cdot\nabla$ を $\nabla^2$ で表し、ラプラシアン と呼ぶ。

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

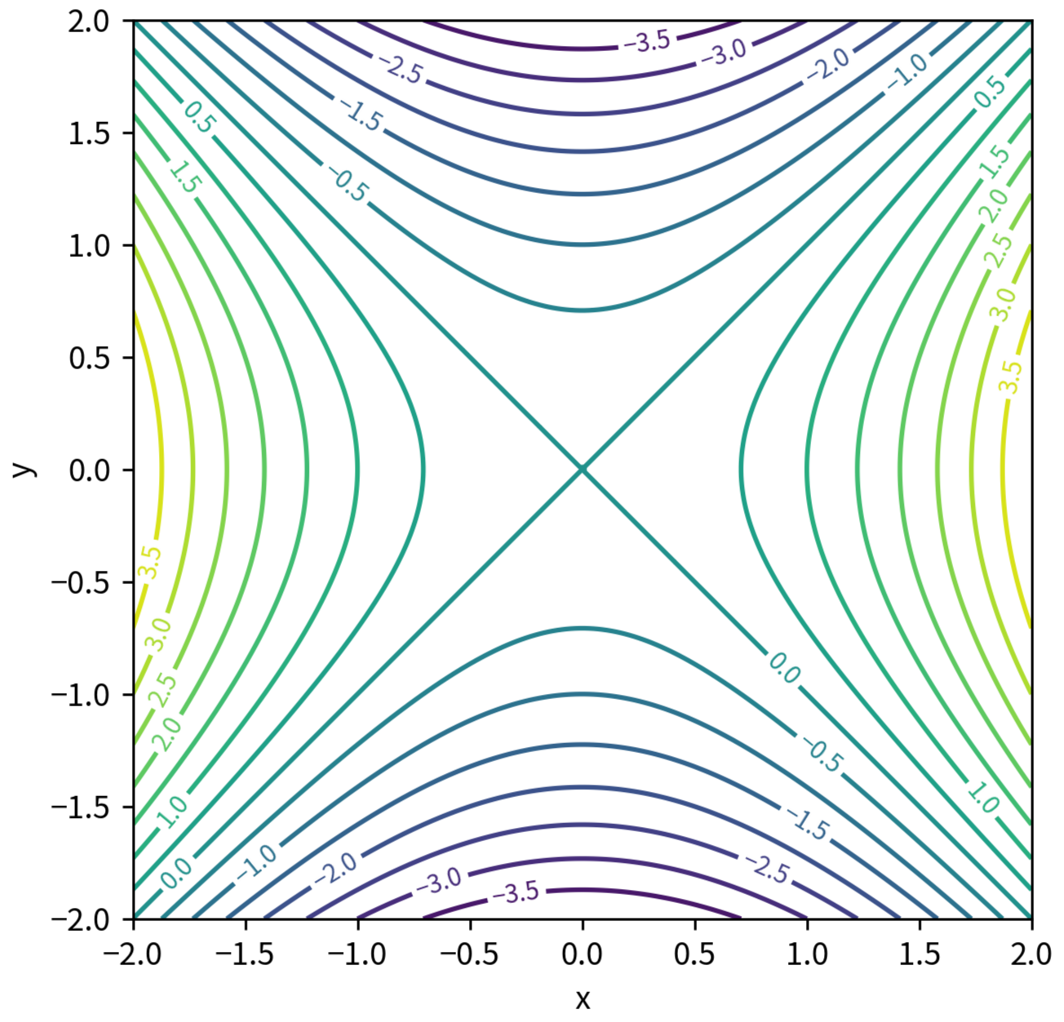



スカラー場 $\varphi = x^2 + y^2$

$\nabla^2\varphi = 4 > 0$

グラフは原点で最小、

周りへ行くほど増える




スカラー場 $\varphi = x^2 - y^2$

$\nabla^2\varphi = 0$

$x$ 方向の2階微分と $y$ 方向の

2階微分が打ち消しあう

# 前回の復習（4）

偏微分方程式 $\nabla^2 \varphi = 0$ を ラプラスの方程式 という。

ラプラスの方程式をみたす関数 $\varphi(x, y, z)$ を 調和関数 という。

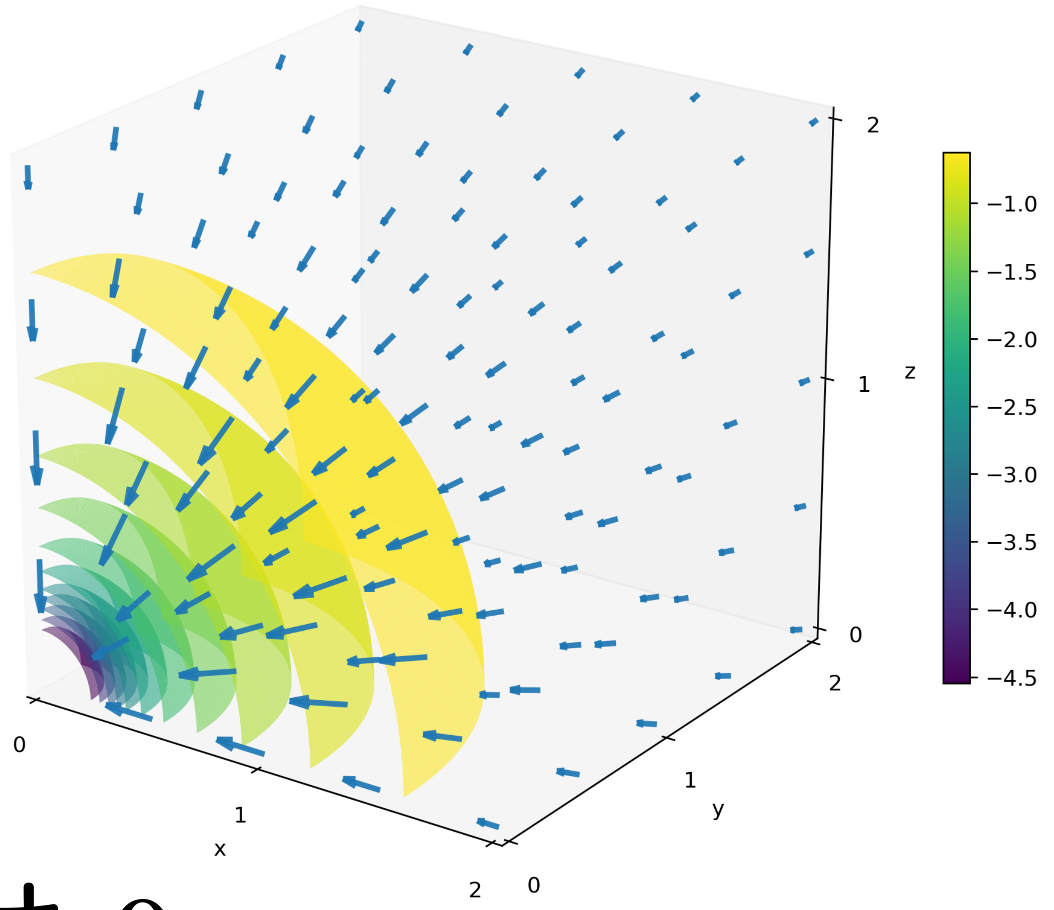
ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と、そのポテンシャルとなるスカラー場 $\varphi$ があるとすると

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \nabla \cdot (-\nabla \varphi) = -\nabla^2 \varphi \quad （\boldsymbol{A} = -\nabla \varphi \text{ より}）$$

となることより、$\varphi$ が調和関数なら $\boldsymbol{A}$ の発散は $0$ となる。

例：$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$（位置ベクトル）、$r = |\boldsymbol{r}|$（$r \neq 0$）として

$$\varphi = -\frac{1}{r}$$ は調和関数である。




したがって $\varphi$ をポテンシャルに持つベクトル場 $\boldsymbol{A} = -\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ の発散は $0$ 。

# 本日の講義

回転

# 回転のイメージ

発散では、ベクトル場に対し、各点の周りで小さな領域 $V$ をとり、

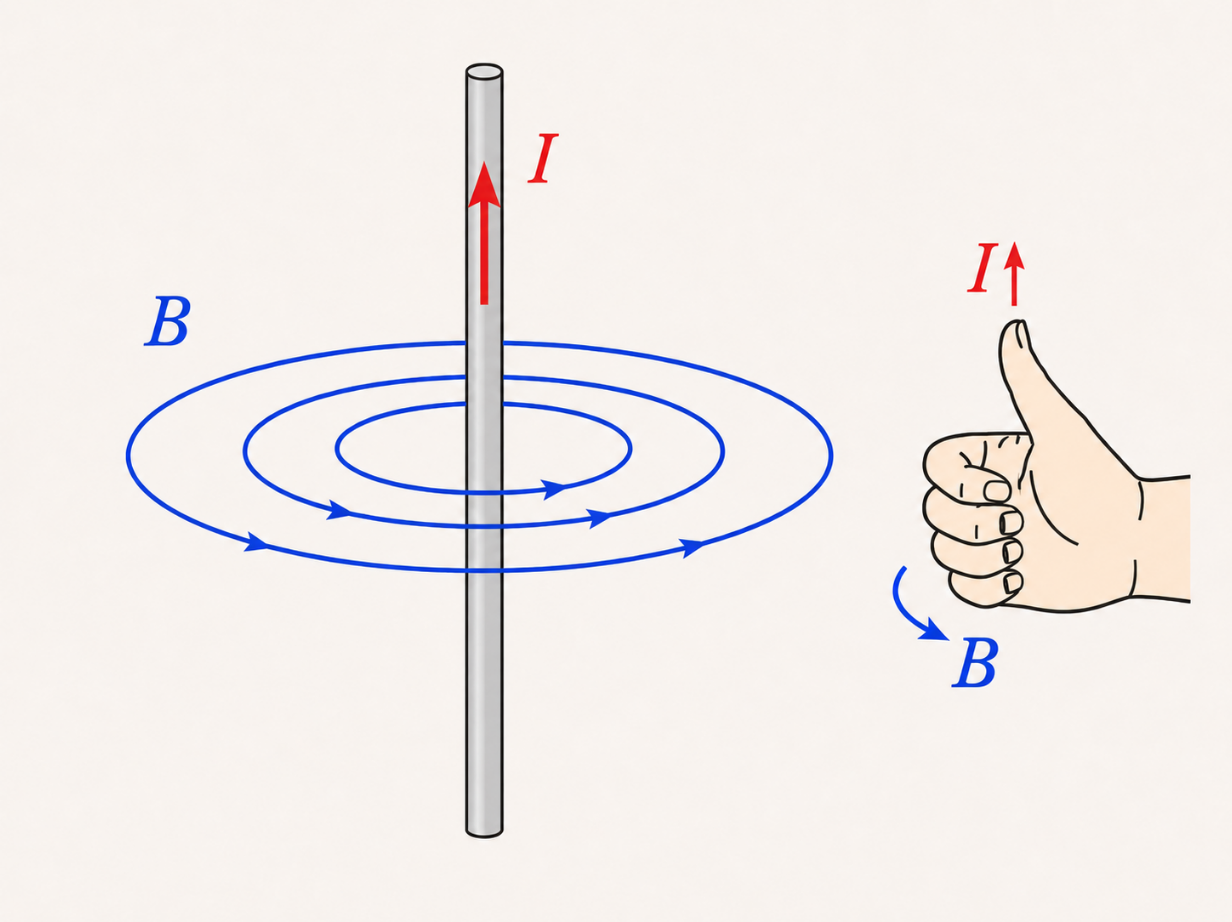
（ $V$ から出る量 ） − （ $V$ へと入る量 ）　= 流束

を考えることで、$V$ の中に湧き出しや吸い込みがあるかどうかが分かった。

回転は、ベクトル場に対し、各点の周りで渦を巻いているかどうかが分かる。

例：かき混ぜ、台風・ハリケーンの風、流体の渦度、磁場の巻きつき

ハリケーン（自作の模式図）




電流と磁場

# 回転

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x,y,z) = \left(A_x, A_y, A_z\right)$ を考える。

つぎで定まるベクトル場を、ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の 回転（ローテーション）という。

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

微分演算子（ナブラ） $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ を使えばつぎのようにも表される。

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}}$$

# 風車による回転の解釈

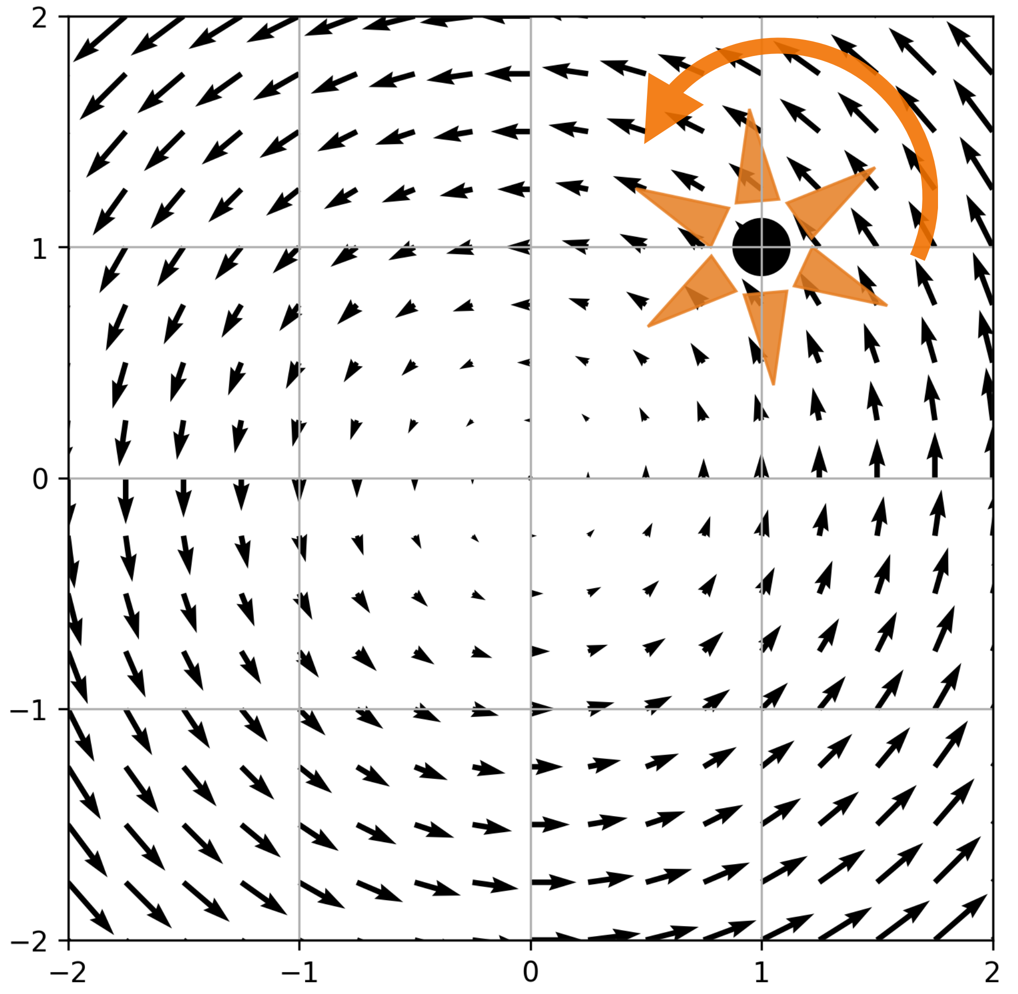
ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ があるとする。点 P に小さな風車を置く。

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ が風車を回す成分を持つと、風車は回転する（左下図）。

風車の回転の向きが rot $\boldsymbol{A}$ (P) の向き（右ねじの向き）であり、

回転の強さが rot $\boldsymbol{A}$ (P) の大きさで表される。

rot $\boldsymbol{A}$ (P) $= \boldsymbol{0}$ のときは、どの向きに風車を置いても回りにくい（右下図）。

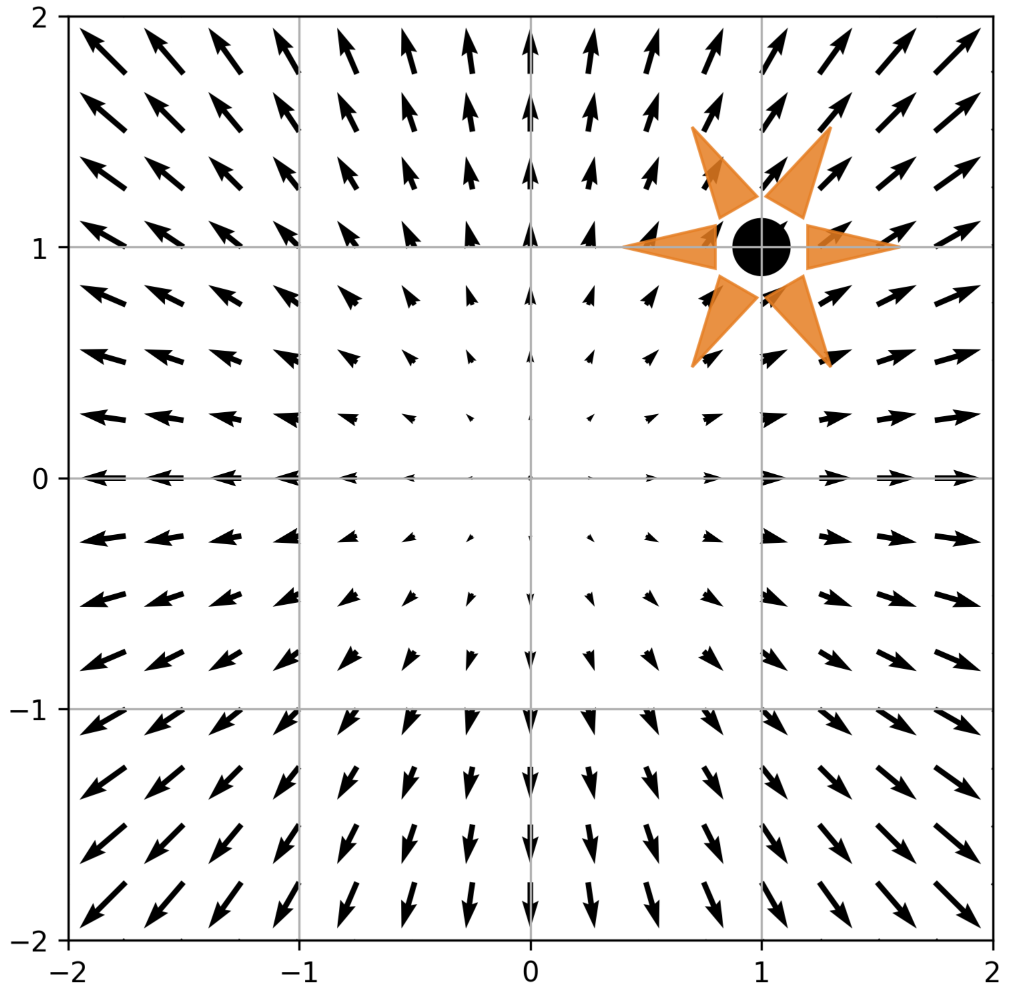


$\boldsymbol{A} = (-y, x, 0)$

$z = 0$ による断面図

rot $\boldsymbol{A}$ (P) $= (0,0,2)$

風車は反時計回り



$\boldsymbol{A} = (x, y, 0)$

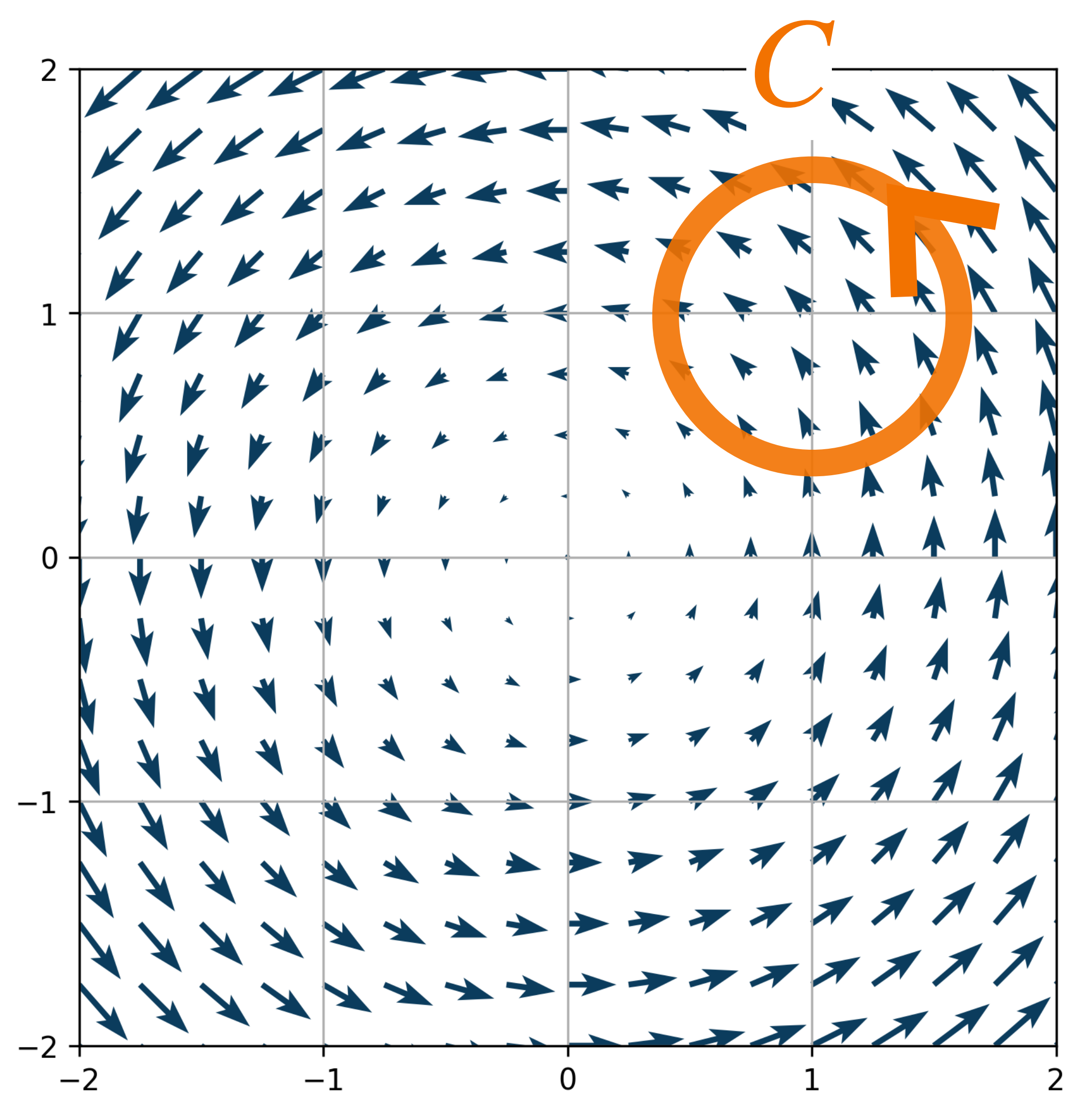
$z = 0$ による断面図

rot $\boldsymbol{A}$ (P) $= (0,0,0)$

風車は回らない

# 循環による回転の解釈

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ 内において、点 P の周りに閉曲線 $C$ を置く。
$C$ に沿って一周したときのベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の総和（ = 循環 ）
はつぎの式で求められる。




$$\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{r}(t)\right) \cdot \boldsymbol{r}'(t)\, dt$$

$\boldsymbol{r}(t)$ は $C$ のパラメータ表示、$\oint_C$ は閉曲線に沿った線積分を表す記号である。
$C$ を含む平面の法単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とし、$C$ を境界に持つ面を $S$ とする。
ただし、$C$ の向きは $\boldsymbol{n}$ に対して右ねじの向きにとる。
回転の $\boldsymbol{n}$ 方向の成分は、循環を面積で割り、$C$ の半径を小さくした極限である。

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A}(\mathrm{P}) \cdot \boldsymbol{n} = \lim_{|S| \to 0} \frac{1}{|S|} \oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$$

（ 証明は省略。）

# 例題（回転の計算１）



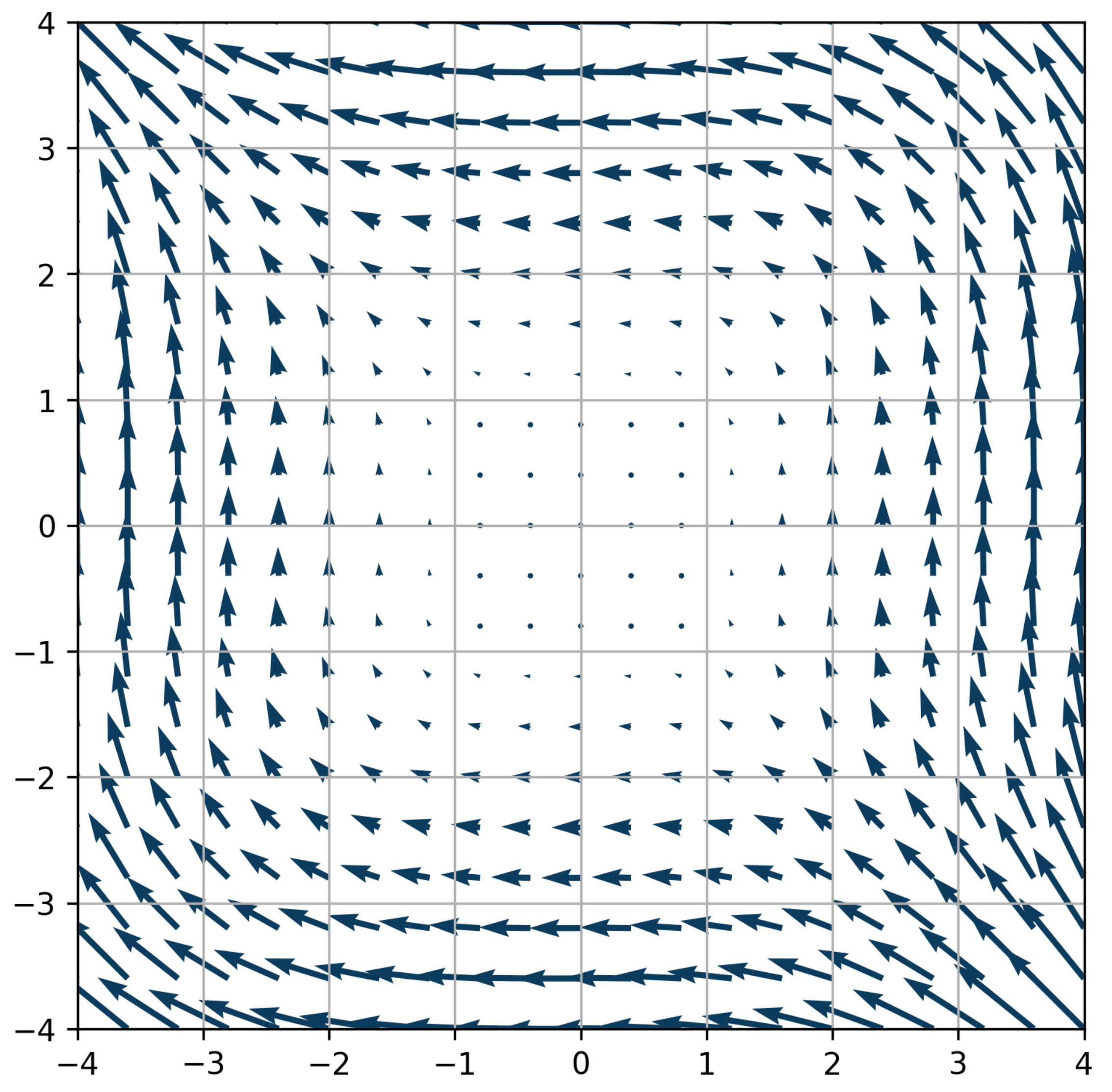
ベクトル場 $\boldsymbol{A} = \left(-y^2, x^2, 0\right)$ の回転を求めなさい。

（解答）

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$= \left(0 - 0, 0 - 0, 2x - (-2y)\right)$$

$$= \underline{\left(0, 0, 2x + 2y\right)}$$




$z = 0$ による断面

回転軸は $z$ 軸方向で、点によって向きも強さも変わる。

$x + y > 0$ では反時計回り、$x + y < 0$ では時計回り。$x + y = 0$ では $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$。

# 例題（回転の計算２）

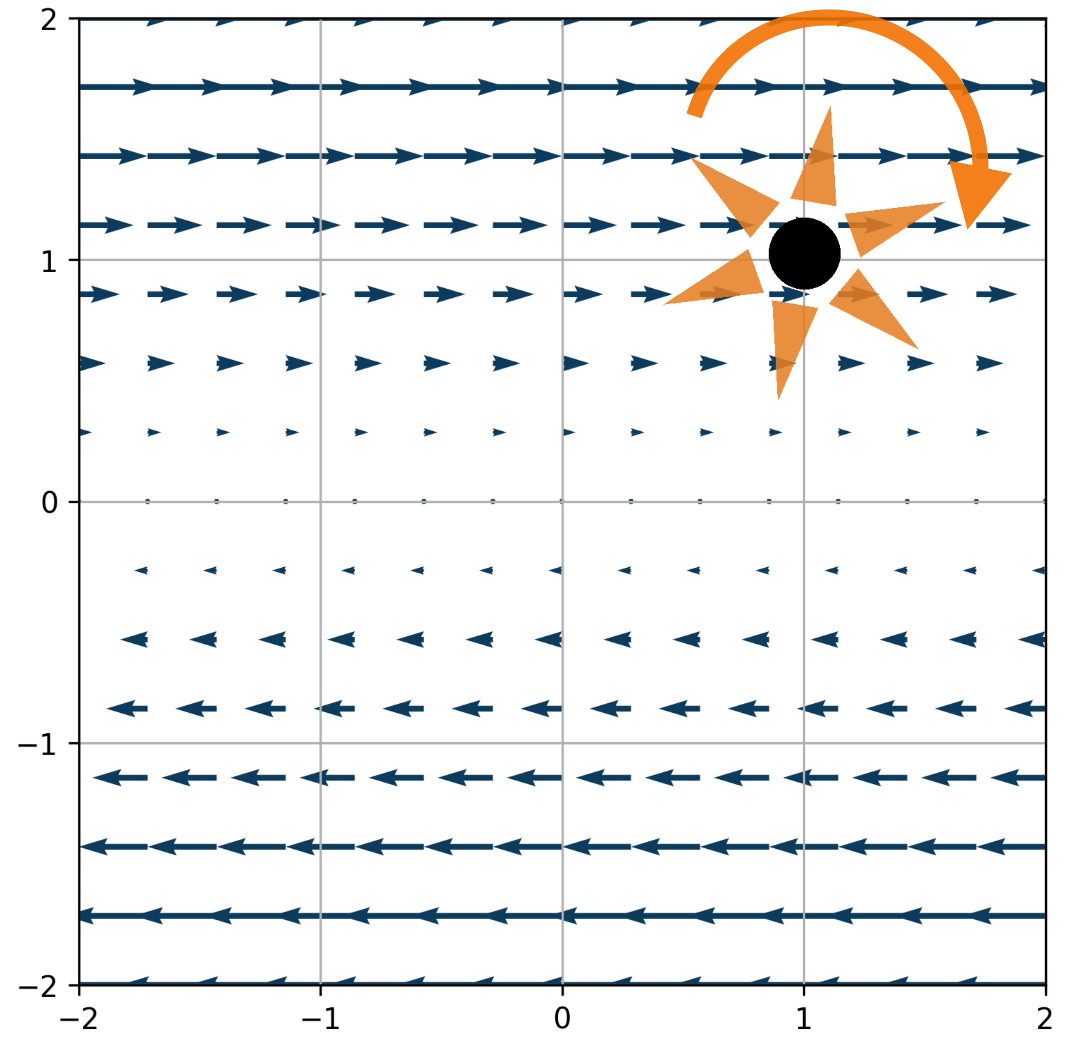


ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (y, 0, 0)$ の回転を求めなさい。

（解答）$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \left( \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}, \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}, \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \right)$

$$= (0 - 0, 0 - 0, 0 - 1)$$

$$= \underline{(0, 0, -1)}$$




回転軸は $z$ 軸負方向（時計回り）で、回転の強さはどの点でも一定。

ベクトル場は $x$ 方向のみだが、$y$ によって強さが変わるため、ずれが生じる。

このずれを剪断（せんだん）という。渦が見えなくても $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ となる例である。

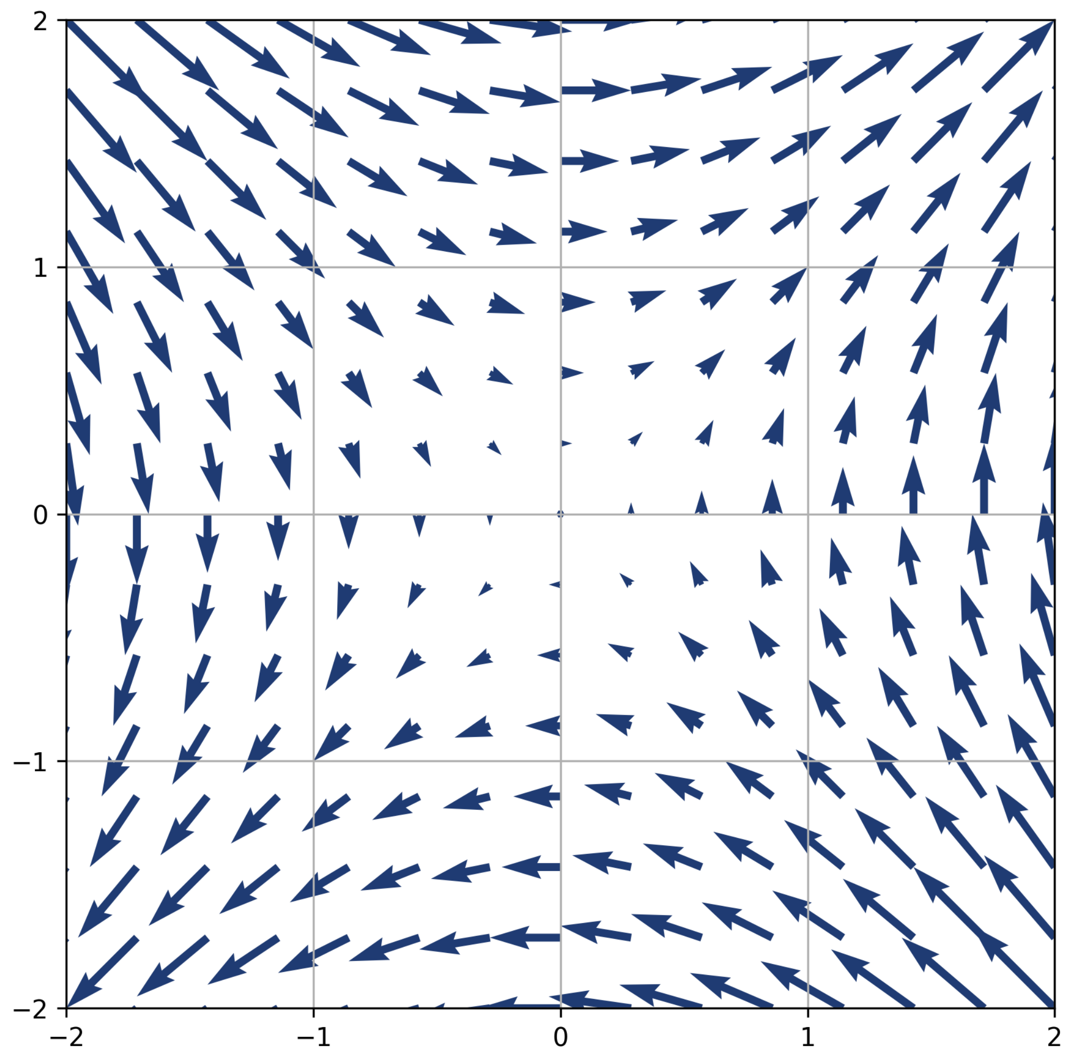
# 例題（回転の計算３）

ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (y, x, 0)$ の回転を求めなさい。

（解答）$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \left( \dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}, \dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}, \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y} \right)$

$$= (0 - 0, 0 - 0, 1 - 1)$$

$$= \underline{(0, 0, 0)}$$




各点でのベクトルの向き・大きさが変わるので、歪みが（右斜めに）生じている。

しかし、$x$ 方向の変化と $y$ 方向の変化が互いに等しく打ち消し合うため、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ 。

剪断（ずれ、歪み）はあるが、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ となる例である。

# 回転の公式１

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ , $\boldsymbol{B}$ に対してつぎの等式 ① が成り立つ。

$$\text{①}\ \nabla\times\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B}$$

（証明）$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}=\left(A_x,A_y,A_z\right)$ , $\boldsymbol{B}=\left(B_x,B_y,B_z\right)$ とすると

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x+B_x & A_y+B_y & A_z+B_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B}\ \blacksquare$$

# 回転の公式２

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ とスカラー場 $\varphi$ に対してつぎの等式 ② が成り立つ。

$$② \ \nabla \times (\varphi \boldsymbol{A}) = (\nabla \varphi) \times \boldsymbol{A} + \varphi \nabla \times \boldsymbol{A}$$

（証明）$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ とすると $\varphi \boldsymbol{A} = (\varphi A_x, \varphi A_y, \varphi A_z)$ となる。両辺を計算する。

$$左辺 = \left( \frac{\partial \varphi A_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi A_y}{\partial z}, \frac{\partial \varphi A_x}{\partial z} - \frac{\partial \varphi A_z}{\partial x}, \frac{\partial \varphi A_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi A_x}{\partial y} \right)$$

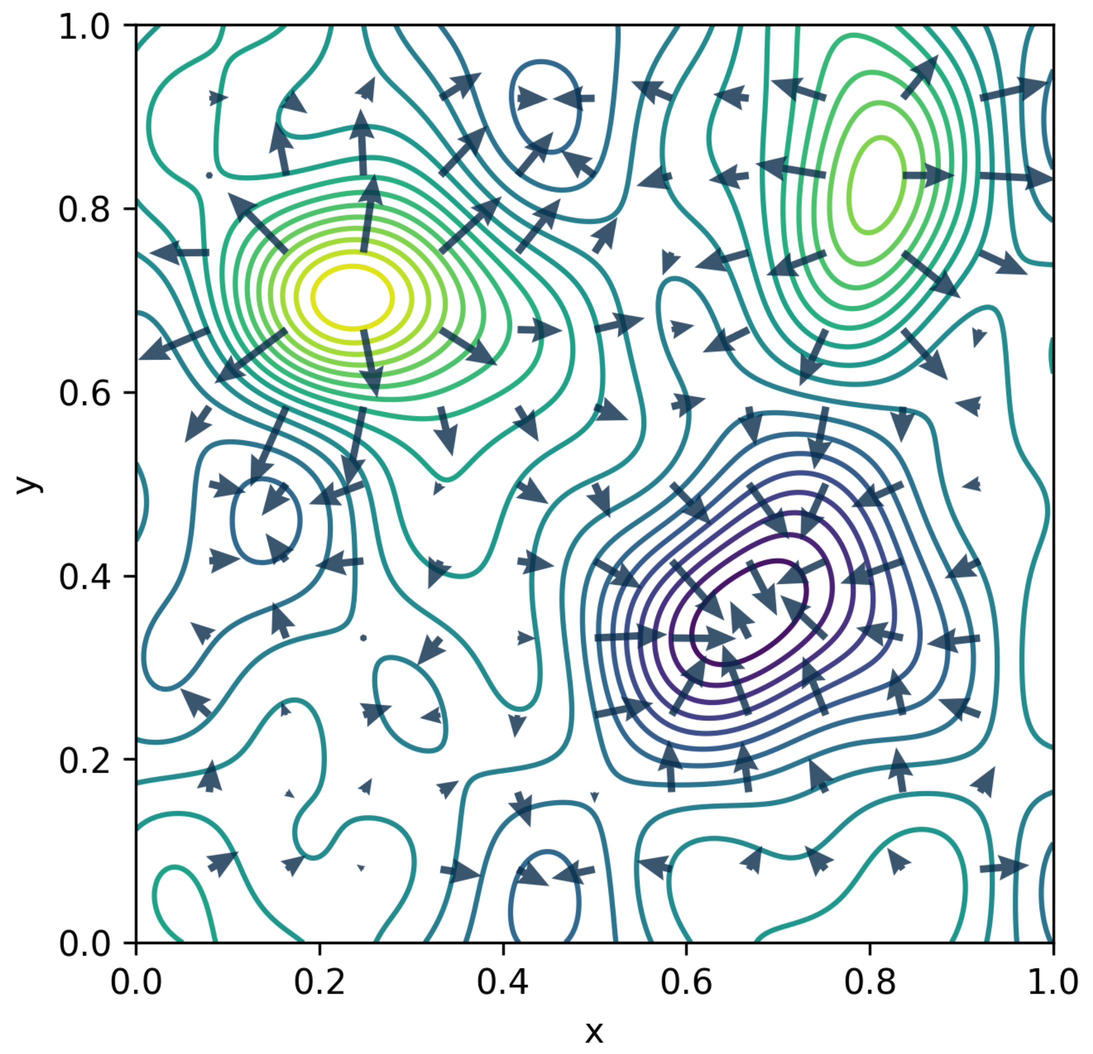
$$= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} A_z + \varphi \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} A_y - \varphi \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} A_x + \varphi \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} A_z - \varphi \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} A_y + \varphi \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} A_x - \varphi \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$右辺 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \times (A_x, A_y, A_z) + \varphi \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$$= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} A_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} A_y, \frac{\partial \varphi}{\partial z} A_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} A_z, \frac{\partial \varphi}{\partial x} A_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} A_x \right) + \left( \varphi \frac{\partial A_z}{\partial y} - \varphi \frac{\partial A_y}{\partial z}, \varphi \frac{\partial A_x}{\partial z} - \varphi \frac{\partial A_z}{\partial x}, \varphi \frac{\partial A_y}{\partial x} - \varphi \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \blacksquare$$

# 回転の公式３

十分なめらかなスカラー場 $\varphi$ に対してつぎの等式 ③ が成り立つ。




③ $\nabla \times (\nabla \varphi) = \mathbf{0}$

（証明） $\nabla \varphi = \left( \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ より

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \left( \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

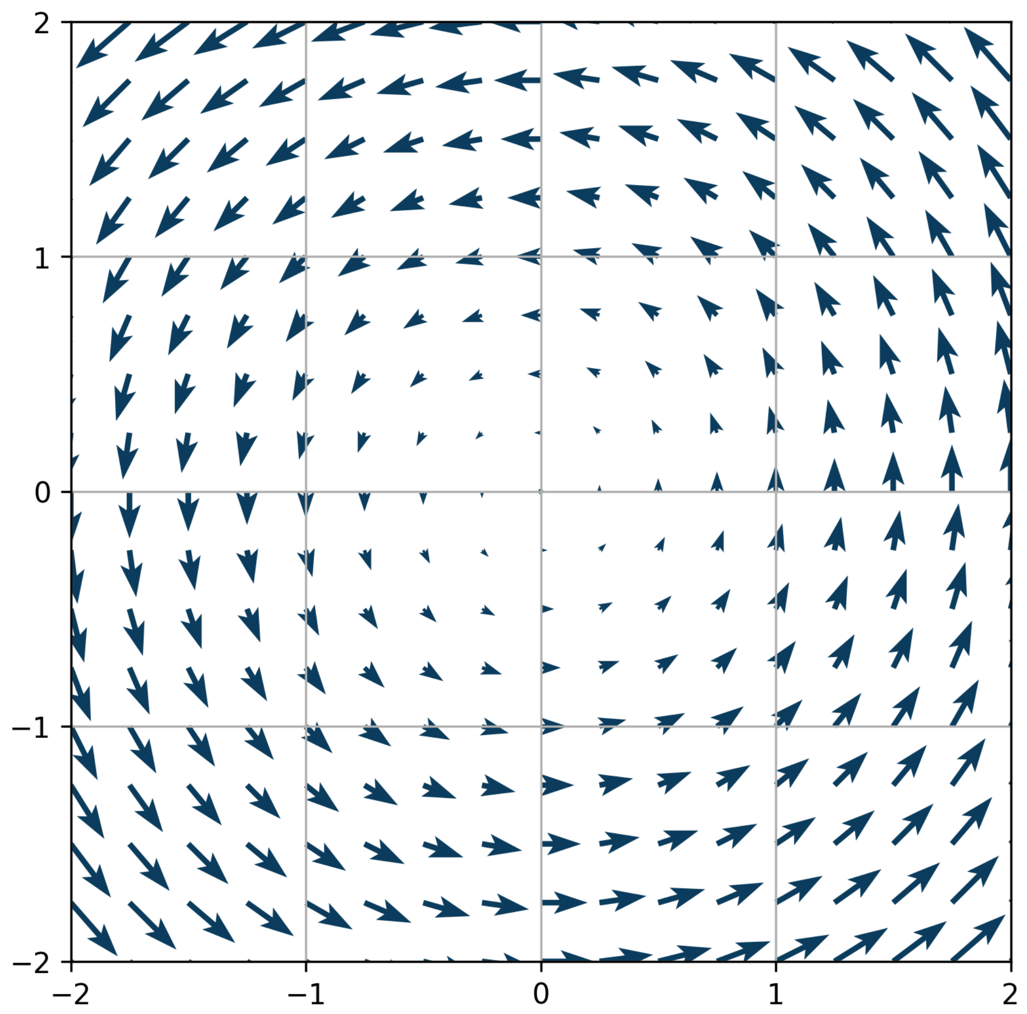
$$= \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right)$$

$\varphi$ は偏微分の順序によらないから $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = 0$ 。他の成分も同様。∎

勾配ベクトル場 $\boldsymbol{A} = -\nabla \varphi$ （ $\varphi$ をポテンシャルに持つ場 ）は $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ 。

# 回転の公式4

十分なめらかなベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対してつぎの等式 ④ が成り立つ。




$$④ \quad \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

（証明）$\boldsymbol{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right)$ とすると

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial A_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} = 0$$ （偏微分の順序が入れ替えられるため）∎

回転（＝渦）そのものは発散（湧き出し・吸い込み）を作らない。

# 回転とポテンシャル

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ に対し、スカラー場 $\varphi$ があって、$\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi$ が成り立つとき、

$\varphi$ を $\boldsymbol{A}$ のポテンシャルというのであった。

17ページの公式 ③ より、このとき必ず $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ。

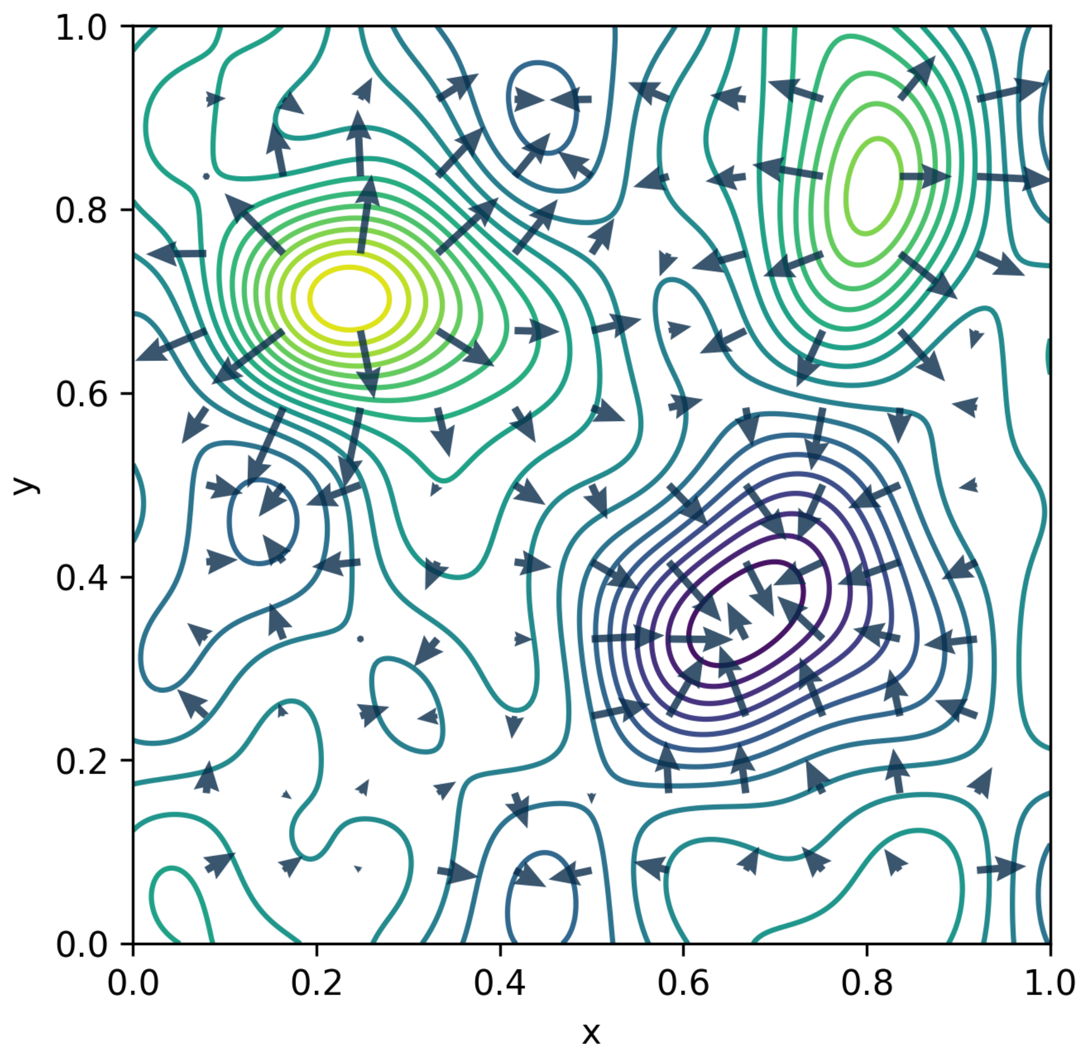
逆に、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ ならば必ず $\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi$ をみたす $\varphi$ が存在するとは限らない。

ただし、領域に穴がなく（この性質を 単連結 という）、

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ ならば、

$$\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi$$

すなわち $\boldsymbol{A}$ のポテンシャルとなる $\varphi$ を作ることができる。




領域に穴がなく、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$

# 回転とポテンシャルの例１

ベクトル場 $\boldsymbol{A} = \left(2x, 2y, 0\right)$ とすると、すべての点について rot $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ である。

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = (0 - 0, 0 - 0, 0 - 0) = \boldsymbol{0}$$

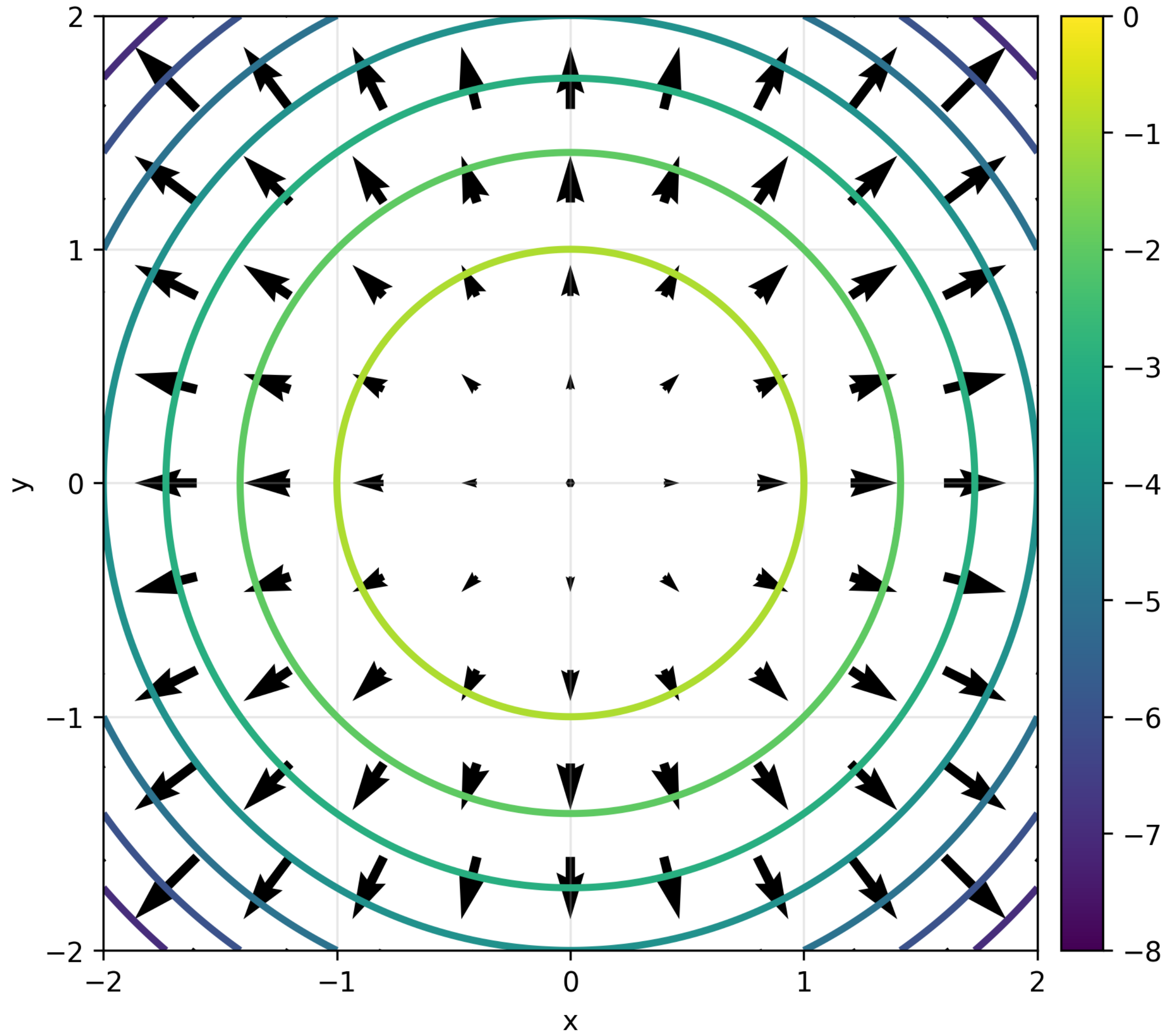
$\boldsymbol{A}$ のポテンシャルとなるスカラー場 $\varphi$ を見つけよう。

$\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi$ より $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = -2x$ , $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -2y$ , $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ が成り立つ。

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = -2x$ の両辺を $x$ で積分して $\varphi = -x^2 + g\left(y, z\right)$ 。

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -2y$ となるためには $g\left(y, z\right) = -y^2 + h(z)$ 。

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ となるためには $h(z) = c$ （ $c$ は定数 ）。よって $\varphi = -x^2 - y^2 + c$ 。




$\boldsymbol{A}$ と $\varphi = -x^2 - y^2$

（ $z = 0$ による断面 ）

# 回転とポテンシャルの例２



ベクトル場 $\boldsymbol{A} = \left(-2xz, -2yz, -\left(x^2+y^2\right)\right)$ とする。

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

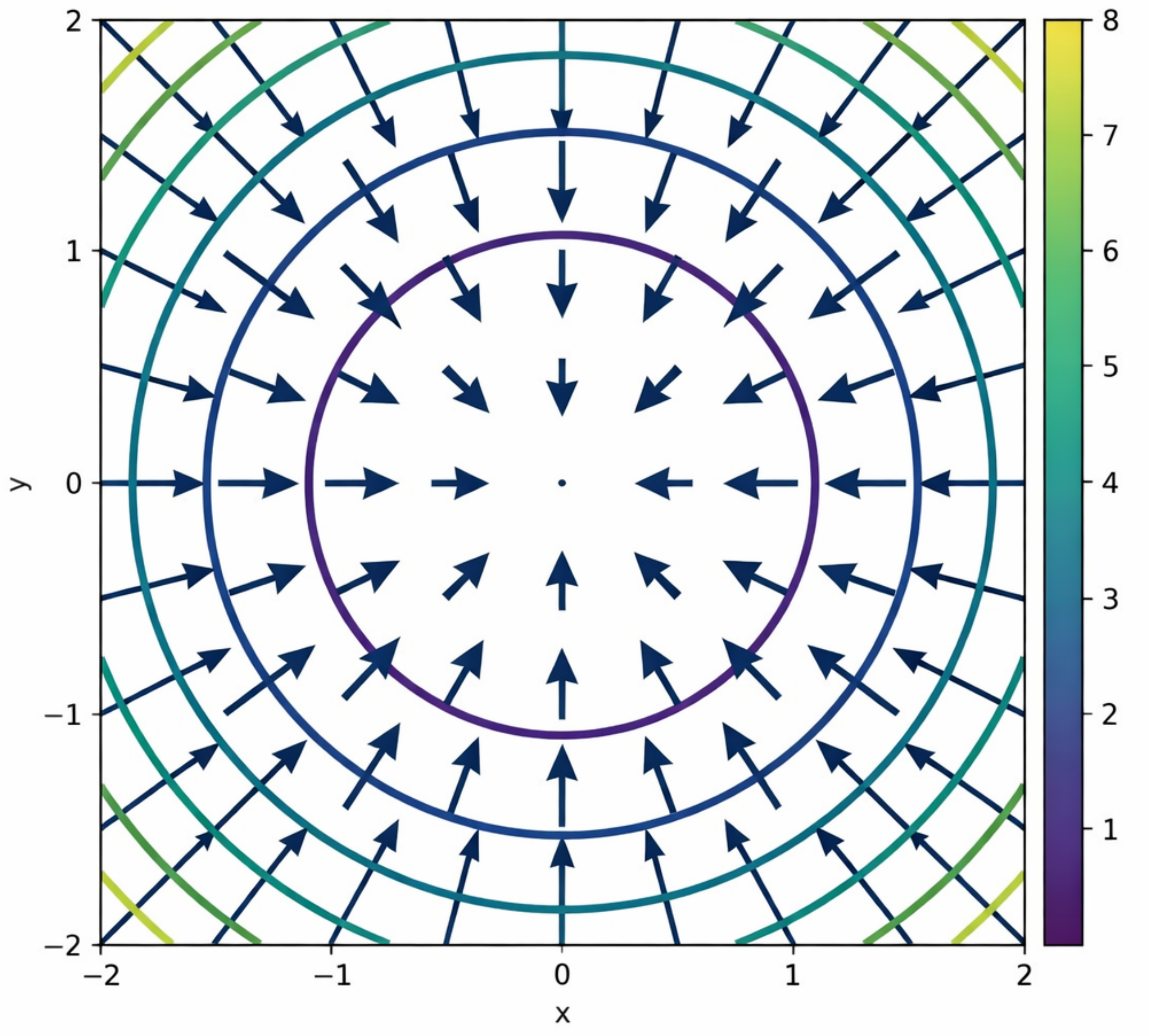
$$= \left(-2y-(-2y), -2x-(-2x), 0-0\right) = (0,0,0) = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{A}$ のポテンシャル $\varphi$ を求めよう。$\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi$ , $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xz$ より

$\varphi = x^2z + g\left(y,z\right)$ 。$\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 2yz$ より $g\left(y,z\right) = y^2z + h(z)$ 。

$\varphi = x^2z + y^2z + h(z)$ , $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = x^2 + y^2$ となるためには $h'(z) = 0$ 。

よって $h(z) = c$ （ $c$ は定数 ）。 $\varphi = x^2z + y^2z + c$ 。




$\boldsymbol{A}$ と $\varphi = x^2z + y^2z$

（ $z = 1$ による断面 ）

# これまでのまとめ

スカラー場

$\varphi(x, y, z)$

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$

$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\varphi) = \nabla^2 \varphi$

ラプラシアン

勾配

発散

ベクトル場

$\boldsymbol{A}(x, y, z)$

$\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla \varphi$

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$

回転

★ 調和関数 $\varphi$ が $\boldsymbol{A}$ のポテンシャル（$\boldsymbol{A} = -\nabla \varphi$）なら $\boldsymbol{A}$ の発散は $0$（$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0$）。

★ $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\varphi) = \mathbf{0}$（$\nabla \times (\nabla \varphi) = \mathbf{0}$），勾配ベクトル場の回転は $\mathbf{0}$。

★ $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = 0$（$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$），回転は発散を作らない。

# まとめ問題１（ベクトルの演算）

ベクトル $\boldsymbol{A} = (2, -1, 2)$, $\boldsymbol{B} = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{C} = (0, 1, 3)$ とする。

（1）$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, $|\boldsymbol{A}|$, $|\boldsymbol{B}|$ を求めなさい。

（2）$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角を $\theta$ とするとき、$\cos\theta$ を求めなさい。

（3）$\boldsymbol{B}$ の $\boldsymbol{A}$ 方向への正射影ベクトルを求めなさい。

（4）$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C}$ を求めなさい。また、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{C}$ が張る平行四辺形の面積を求めなさい。

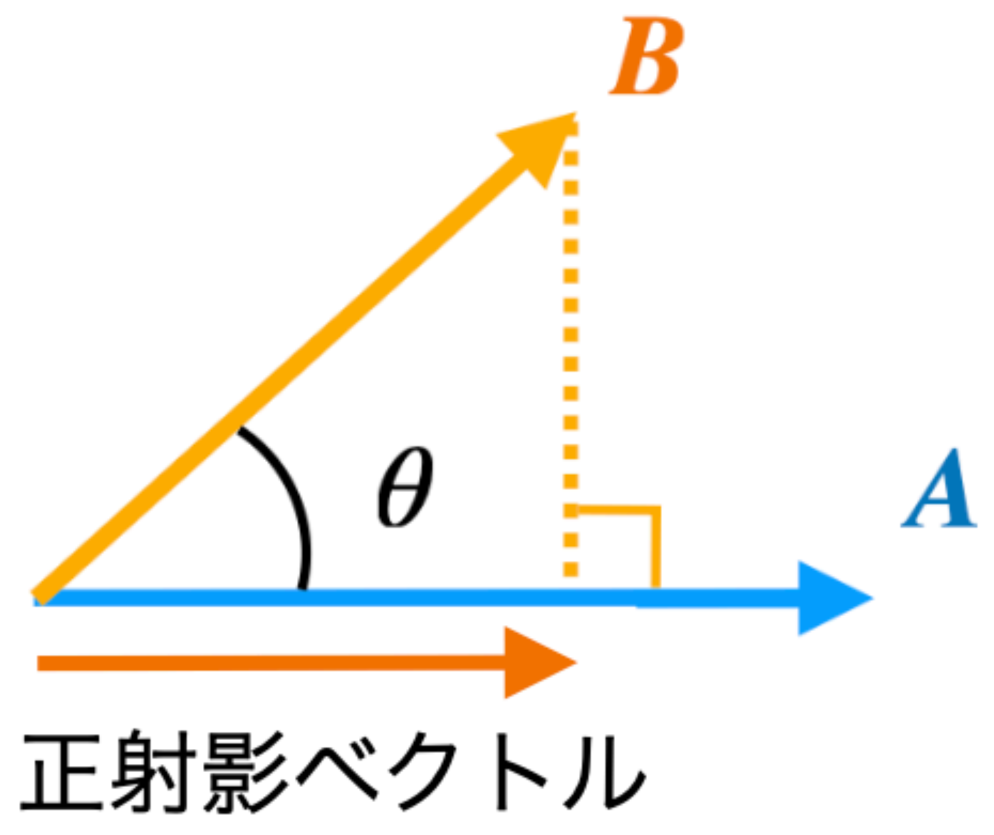
（5）$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ によって張られる平行六面体の体積を求めなさい。

# まとめ問題１の解答



（1） $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 2\,,\ \left|\boldsymbol{A}\right| = 3\,,\ \left|\boldsymbol{B}\right| = \sqrt{6}$　（2） $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{\left|\boldsymbol{A}\right|\left|\boldsymbol{B}\right|} = \dfrac{2}{3\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{9}$

（3） $\left|\boldsymbol{B}\right|\cos\theta\dfrac{\boldsymbol{A}}{\left|\boldsymbol{A}\right|} = \sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}}{9}\times\dfrac{1}{3}(2,-1,2) = \left(\dfrac{4}{9},-\dfrac{2}{9},\dfrac{4}{9}\right)$




（4） $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-5,-6,2)$

面積は $\left|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}\right| = \sqrt{65}$

（5） $\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right) = (2,-1,2)\cdot\left(5,-3,1\right) = 15$，体積は $\left|\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right)\right| = 15$

# まとめ問題２（ベクトルの関数）



$\boldsymbol{r} = \left( t \cos t, t \sin t, t^2 \right)$ とする、つぎの問いに答えなさい。

（１）$\boldsymbol{v}(t)$（ $= \boldsymbol{r}'(t)$ ）および $\boldsymbol{a}(t)$（ $= \boldsymbol{r}''(t)$ ）を求めなさい。

（２）速さ $\left| \boldsymbol{v}(t) \right|$ を求めなさい。

（３）$t = 1$ のときの速さを求めなさい。

（４）つぎの等式が常に成り立つことを示しなさい。

$$\frac{d}{dt}\left( \boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}(t) \right) = 2\, \boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)$$

# まとめ問題２の解答

（1） $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{r}'(t) = \left(\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t, 2t\right)$

$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{r}''(t) = \left(-2\sin t - t\cos t, 2\cos t - t\sin t, 2\right)$

（2） $\left|\boldsymbol{v}(t)\right|^2 = \left(\cos t - t\sin t\right)^2 + \left(\sin t + t\cos t\right)^2 + (2t)^2$

$= \cos^2 t + \sin^2 t + t^2\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + 4t^2 = 1 + 5t^2$ より $\left|\boldsymbol{v}(t)\right| = \sqrt{1+5t^2}$

（3） $\left|\boldsymbol{v}(1)\right| = \sqrt{6}$

（4）3回目講義ノート12ページ ③ $\left(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)\right)' = \boldsymbol{A}'(t)\cdot\boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}'(t)$ より

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)\right) = \boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}(t) + \boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t) = 2\,\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}(t) = 2\,\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)$$

# まとめ問題３（ベクトル場・スカラー場）

スカラー場を $\varphi(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$，点 P $(1, -1, 2)$，

単位ベクトルを $\boldsymbol{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ とする。つぎの問いに答えなさい。

（１）点 P における勾配の値 $\nabla\varphi(\mathrm{P})$ を求めなさい。

（２）$\varphi$ の点 P における $\boldsymbol{u}$ 方向の方向微分係数 $\frac{d\varphi}{du}(\mathrm{P})$ を求めなさい。

（３）点 P において単位方向ベクトルを動かしたときの方向微分係数の最大値と、そのときの単位方向ベクトルを求めなさい。

（４）$\nabla^2\varphi = 0$ となる点 $(x, y, z)$ の条件を求めなさい。

（５）$\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi$ とする。$\mathrm{div}\boldsymbol{A}$（P）および $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$（P）を求めなさい。

# まとめ問題３の解答

（１）$\nabla\varphi = \left(3x^2 - 3yz, 3y^2 - 3xz, 3z^2 - 3xy\right)$ より $\nabla\varphi\left(\mathrm{P}\right) = \left(9, -3, 15\right)$

（２）$\dfrac{d\varphi}{du}\left(\mathrm{P}\right) = \boldsymbol{u} \cdot \nabla\varphi\left(\mathrm{P}\right) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right) \cdot \left(9, -3, 15\right) = 11$ （$= \left|\nabla\varphi\left(\mathrm{P}\right)\right| \cos\theta$ ）

（３）勾配ベクトル $\nabla\varphi\left(\mathrm{P}\right)$ は P を含む等位面に直交し、かつ、$\boldsymbol{u}$ が $\nabla\varphi\left(\mathrm{P}\right)$ と同じ向きのとき（ すなわち法単位ベクトルのとき ）方向微分係数は最大となる。

方向微分係数の最大値は $\left|\nabla\varphi\left(\mathrm{P}\right)\right| = 3\sqrt{35}$ , そのときの単位方向ベクトルは

勾配ベクトル $\nabla\varphi\left(\mathrm{P}\right)$ と同じ向きで、長さが 1 だから $\dfrac{\nabla\varphi\left(\mathrm{P}\right)}{\left|\nabla\varphi\left(\mathrm{P}\right)\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{35}}\left(3, -1, 5\right)$

（４）$\nabla^2\varphi = 0 \Leftrightarrow 6\left(x + y + z\right) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0$

（５）div$\boldsymbol{A}$ $\left(\mathrm{P}\right) = -12$ , rot$\boldsymbol{A}$ $\left(\mathrm{P}\right) = \mathbf{0}$ （ 勾配ベクトル場の回転は $\mathbf{0}$ ）