ベクトル解析

5回目講義

畠中　英里

本日の講義の流れ

○ 前回の復習

○ 本日の講義内容

・ポテンシャル

・発散

・ラプラシアン

・ラプラスの方程式

・調和関数

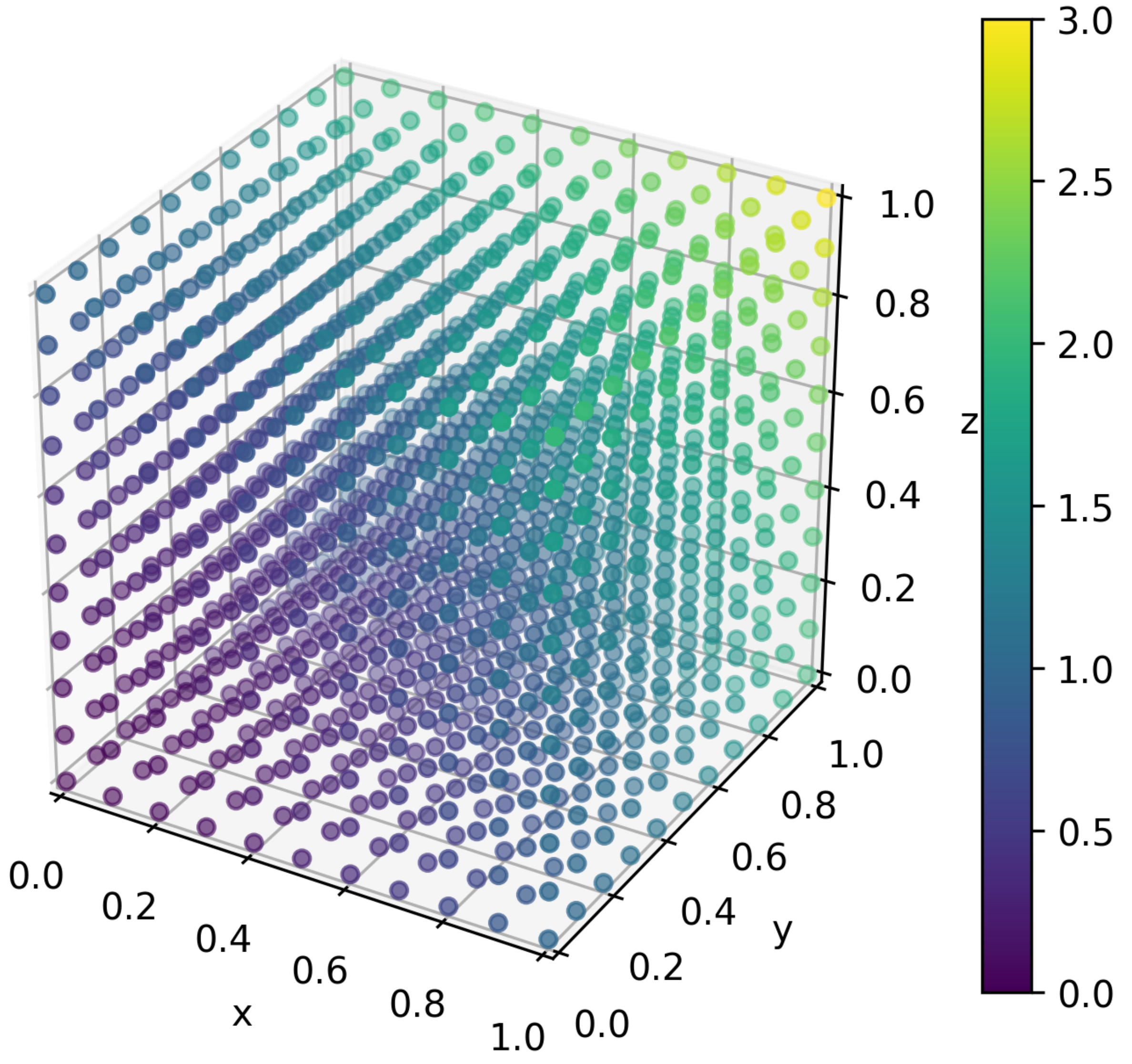
前回の復習（1）

xyz 空間内の領域で定義された実数値関数 $\varphi(x, y, z)$ を スカラー場 という。

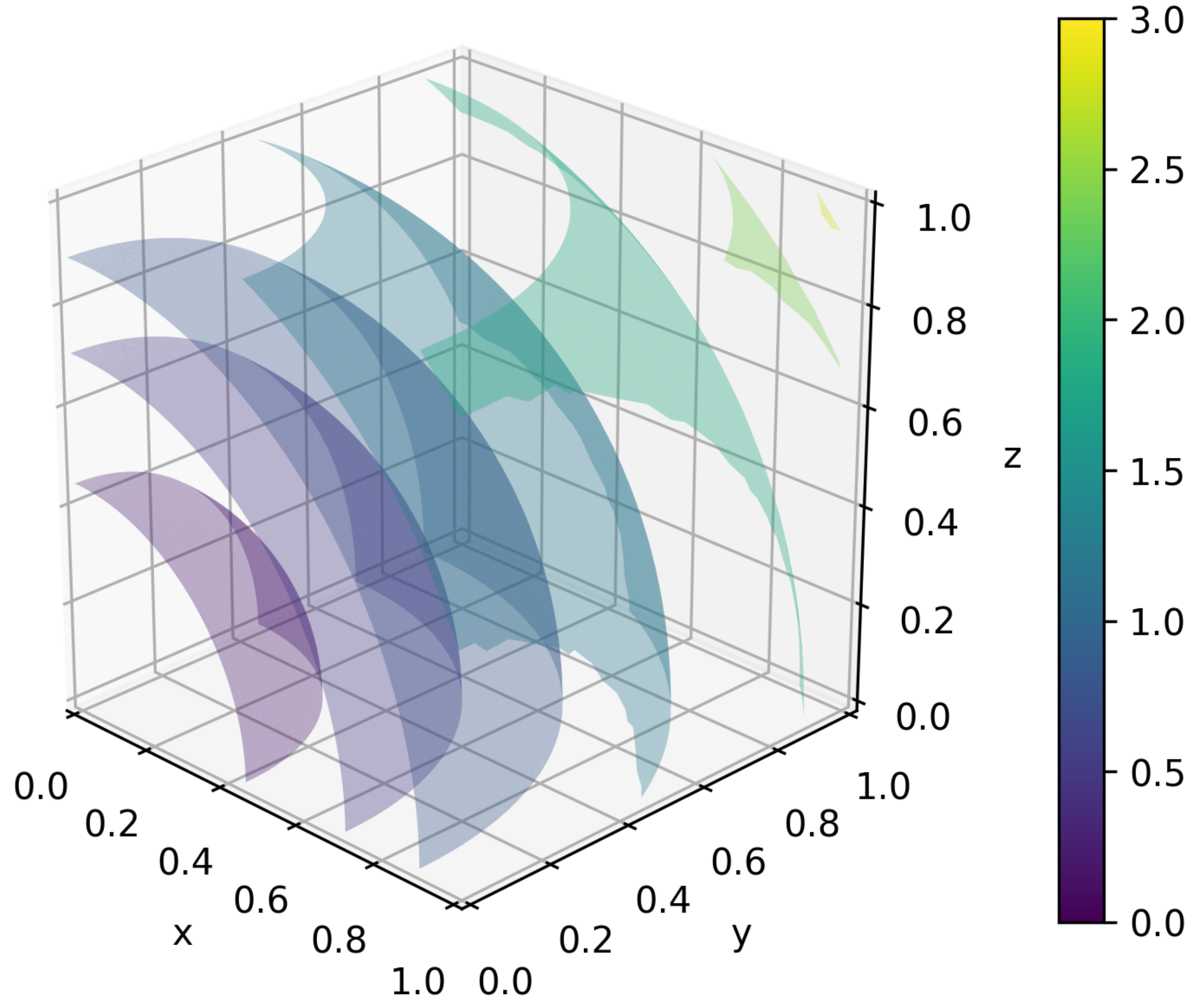
スカラー場 φ に対し、c を定数として $\varphi = c$ を満たす点の集まりは曲面をなす。

これを 等位面 という。

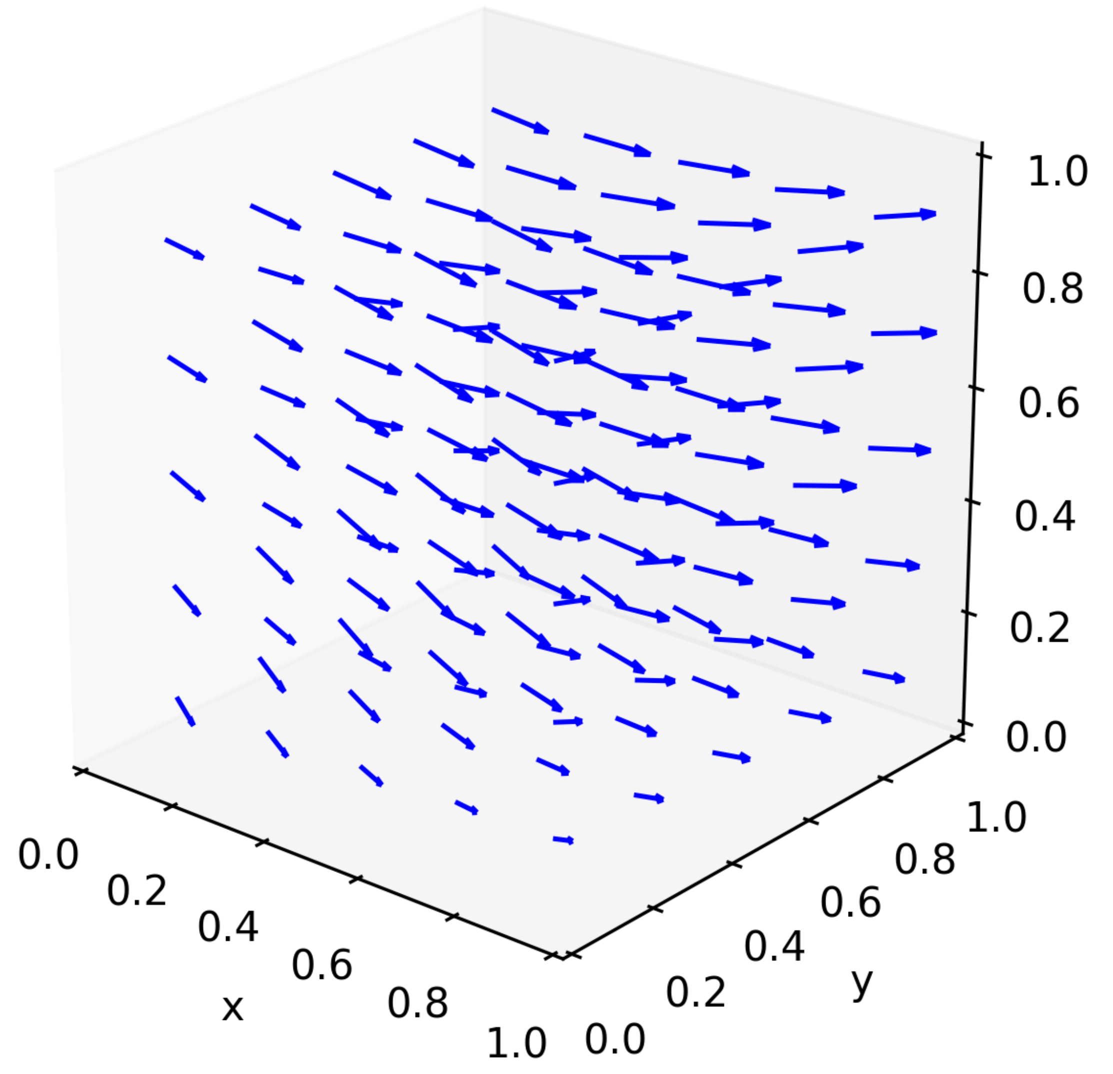
xyz 空間内の領域で定義されたベクトル値関数 $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ を ベクトル場 という。



スカラー場



等位面



ベクトル場

前回の復習（2）

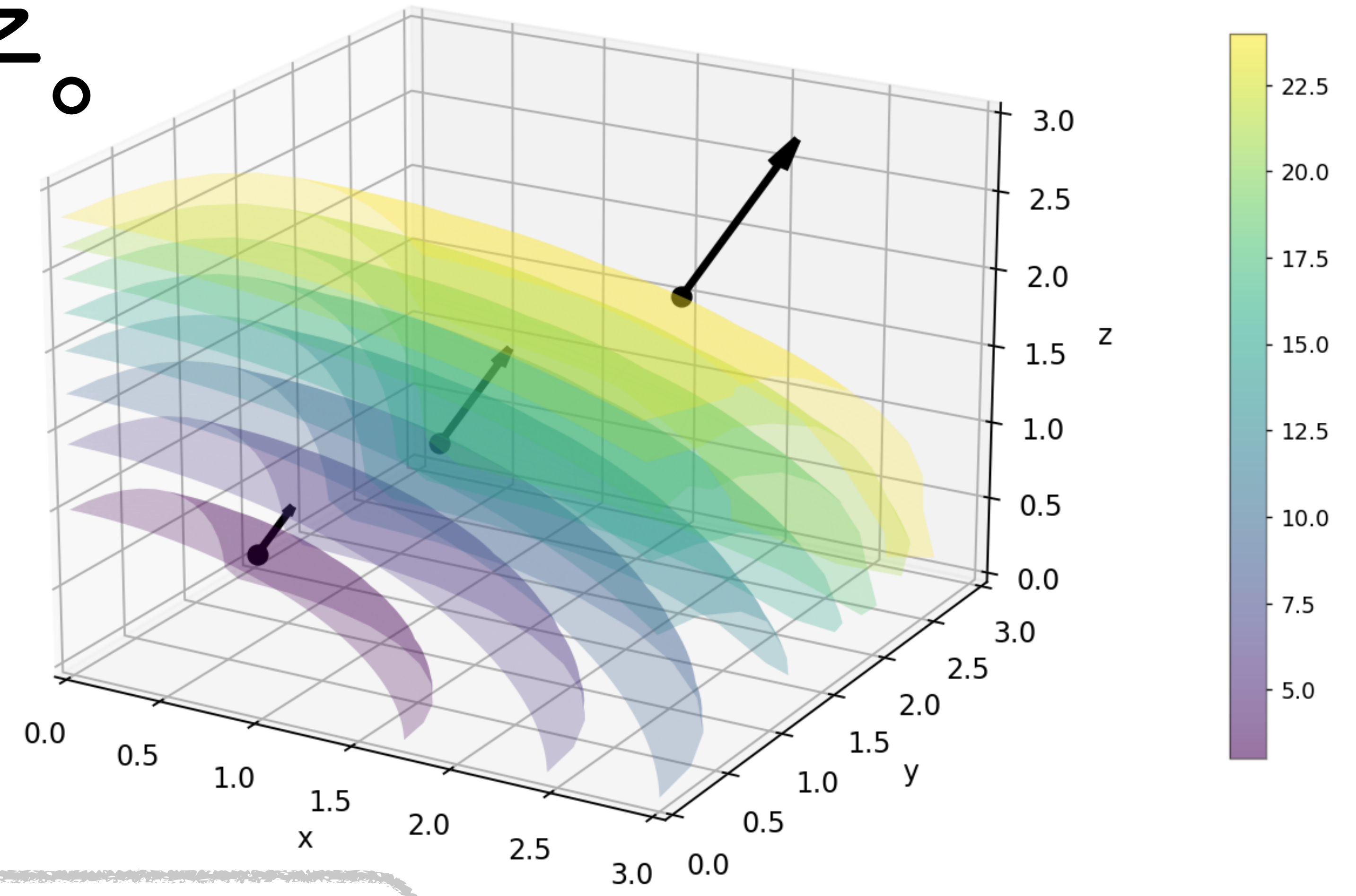
スカラー場 $\varphi(x,y,z)$ に対し、つぎで定まるベクトル場を φ の 勾配 という。

$$\mathrm{grad}\,\varphi(x,y,z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z)\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z)\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z)\,\boldsymbol{k}$$

ナブラ

∇ は、スカラー場に作用し、ベクトル場を与える微分演算子。

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$



勾配は、記号 ∇ を使って表すこともできる。

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \nabla\varphi$$

前回の復習（3）

スカラー場 $\varphi(x,y,z)$ 内に点 P と単位ベクトル $\boldsymbol{u}$（$|\boldsymbol{u}|=1$）をとる。

φ の $\boldsymbol{u}$ 方向への方向微分（= 変化率）は、$\boldsymbol{u}$ と勾配との内積により求まる。

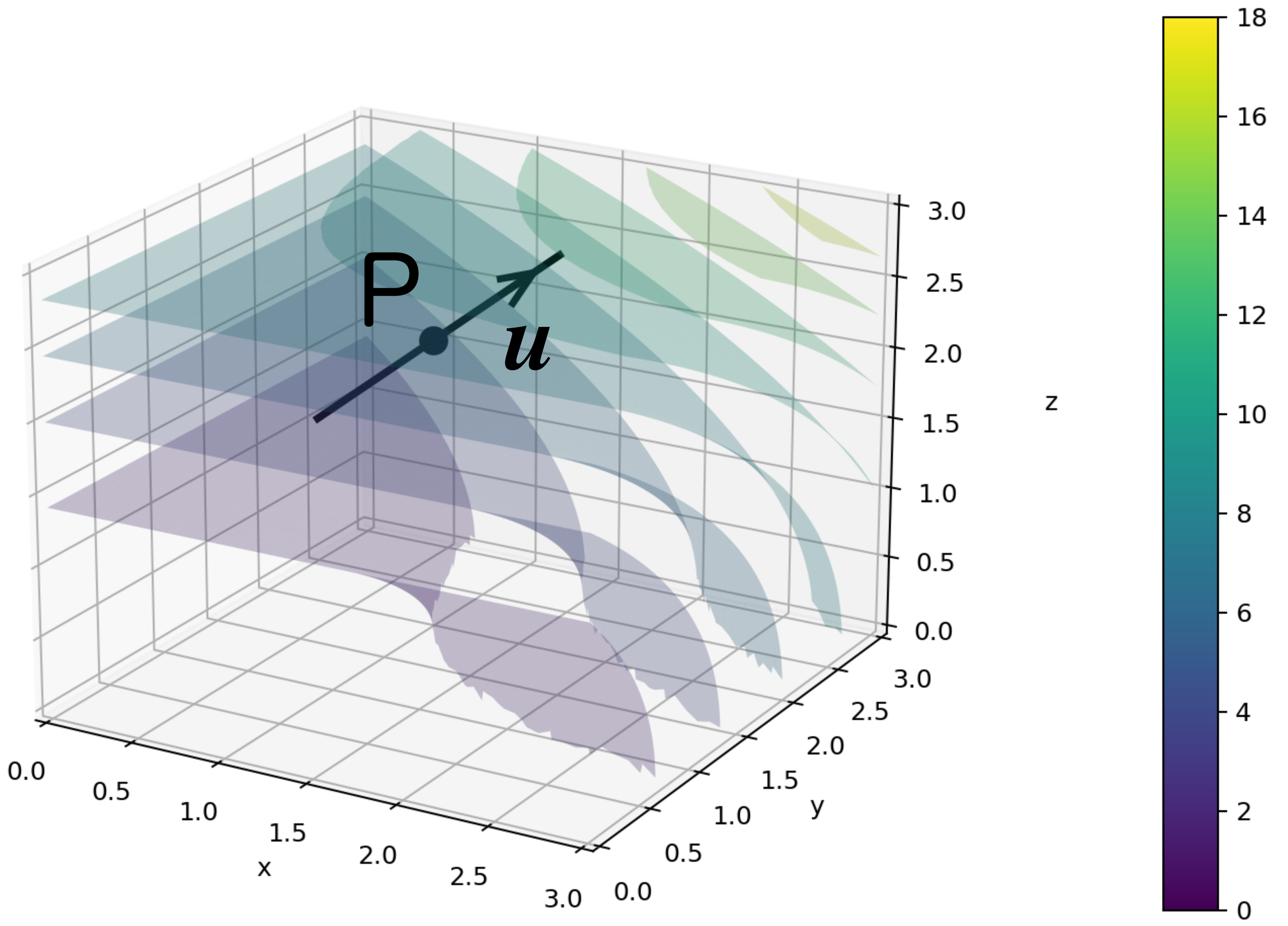
$$\frac{d\varphi}{du} = u_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + u_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + u_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi$$

φ の点 P における $\boldsymbol{u}$ 方向の 方向微分係数 は

$$\frac{d\varphi}{du}(\mathrm{P}) = \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi(\mathrm{P})$$

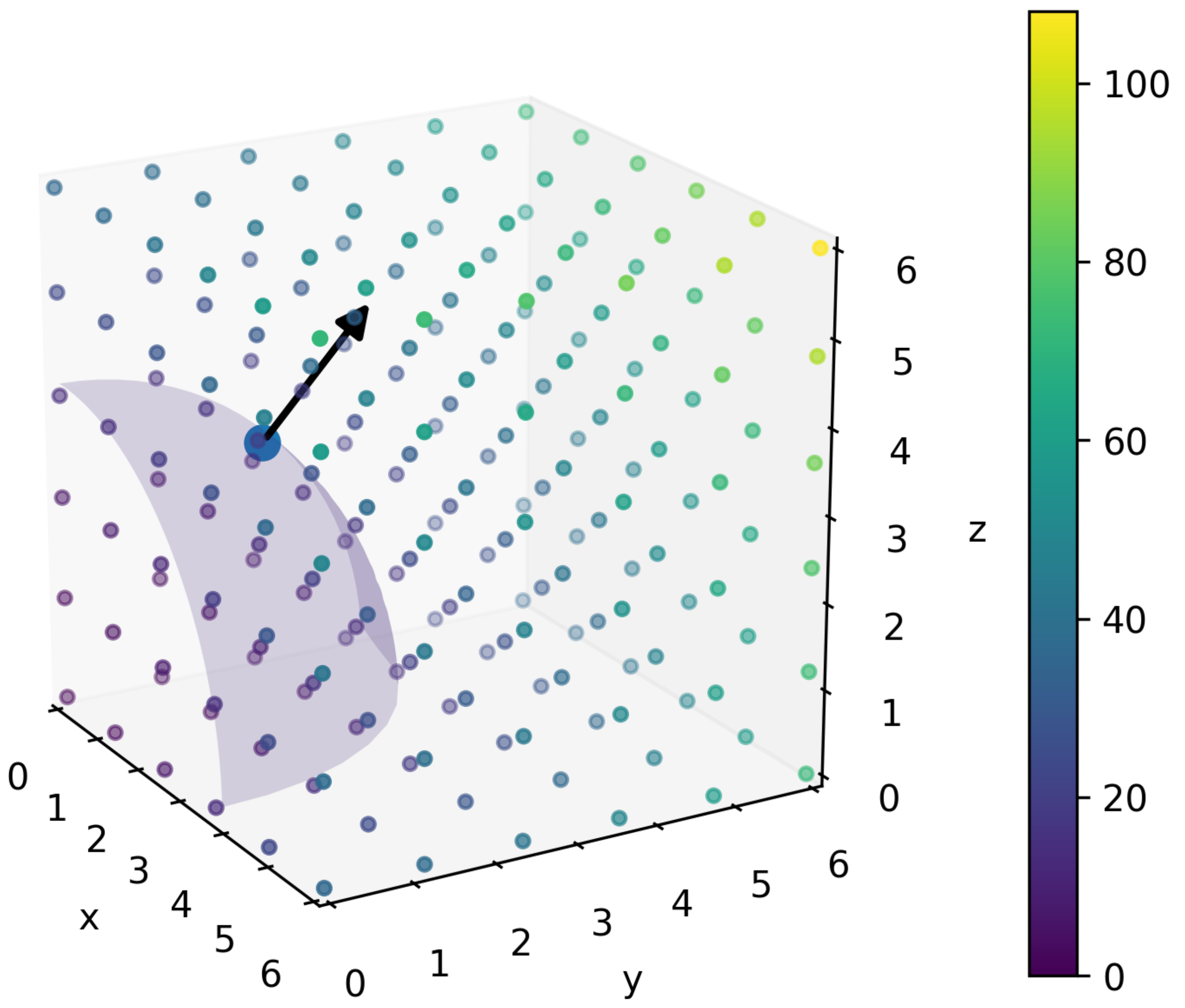
点 P の近くで $\boldsymbol{u}$ 方向に進むとき φ の値が

上がるか、下がるかを知ることができる。



前回の復習（4）

$\nabla\varphi(\mathrm{P})$ は $\mathbf{0}$ でないとき、等位面の法線ベクトルである。



$\nabla\varphi(\mathrm{P})$ と単位方向ベクトル $\boldsymbol{u}$ とのなす角を θ とおくと

$$\frac{d\varphi}{du}(\mathrm{P}) = \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi(\mathrm{P}) = \left|\nabla\varphi(\mathrm{P})\right|\cos\theta$$

$\boldsymbol{u}$ を、点 P を通る等位面の法単位ベクトルのうち φ が増大する向きとする。
この法単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ で表すと、このとき $\theta = 0$ となるから

$$\frac{d\varphi}{dn}(\mathrm{P}) = \left|\nabla\varphi(\mathrm{P})\right|$$

勾配の大きさは、等位面に垂直な法線ベクトル方向への φ の増加率を表す。

本日の講義

ポテンシャル・発散・ラプラシアン

ポテンシャル

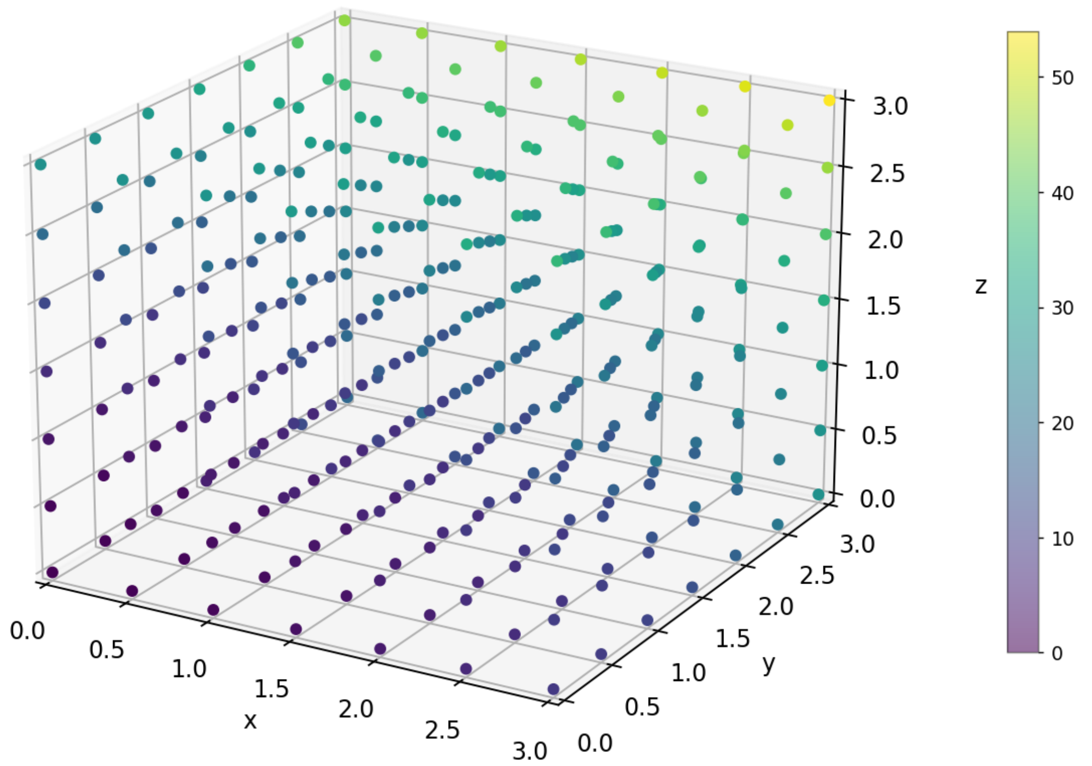
ベクトル場 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x, y, z)$ に対し、スカラー場 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ があって、

$$\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi$$

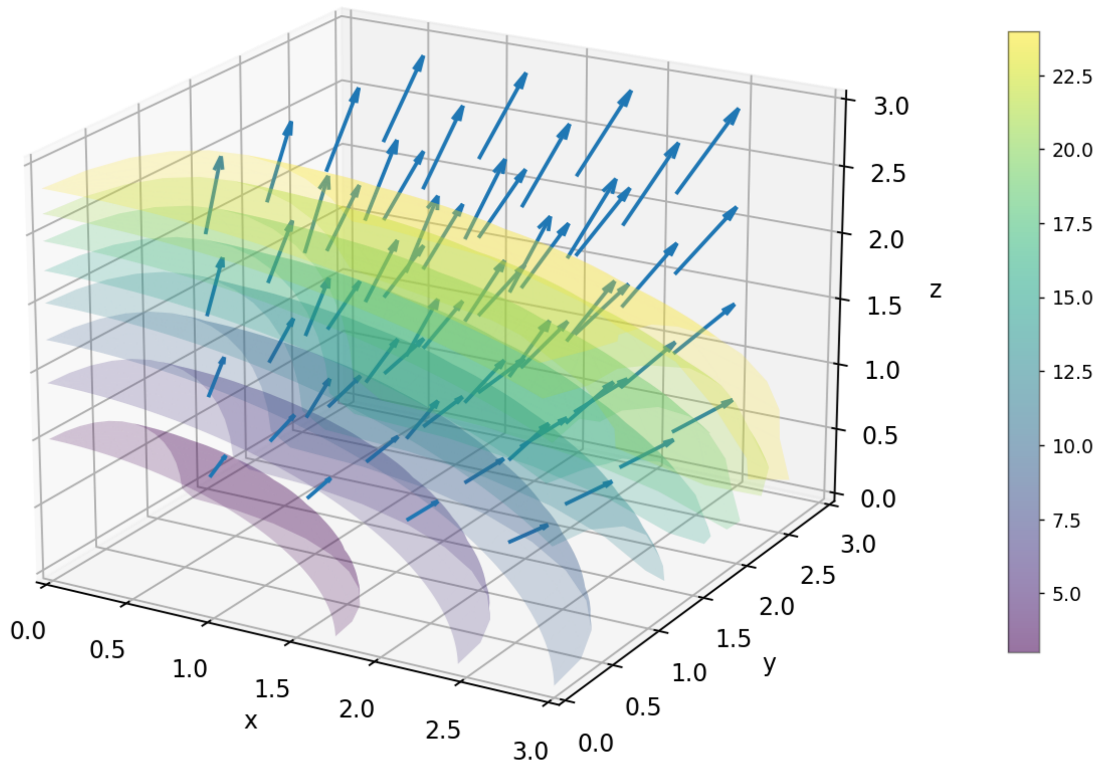
が成り立つとき、φ を $\boldsymbol{A}$ の ポテンシャル という。

$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ とすると、これはつぎが成り立つことと同値である。

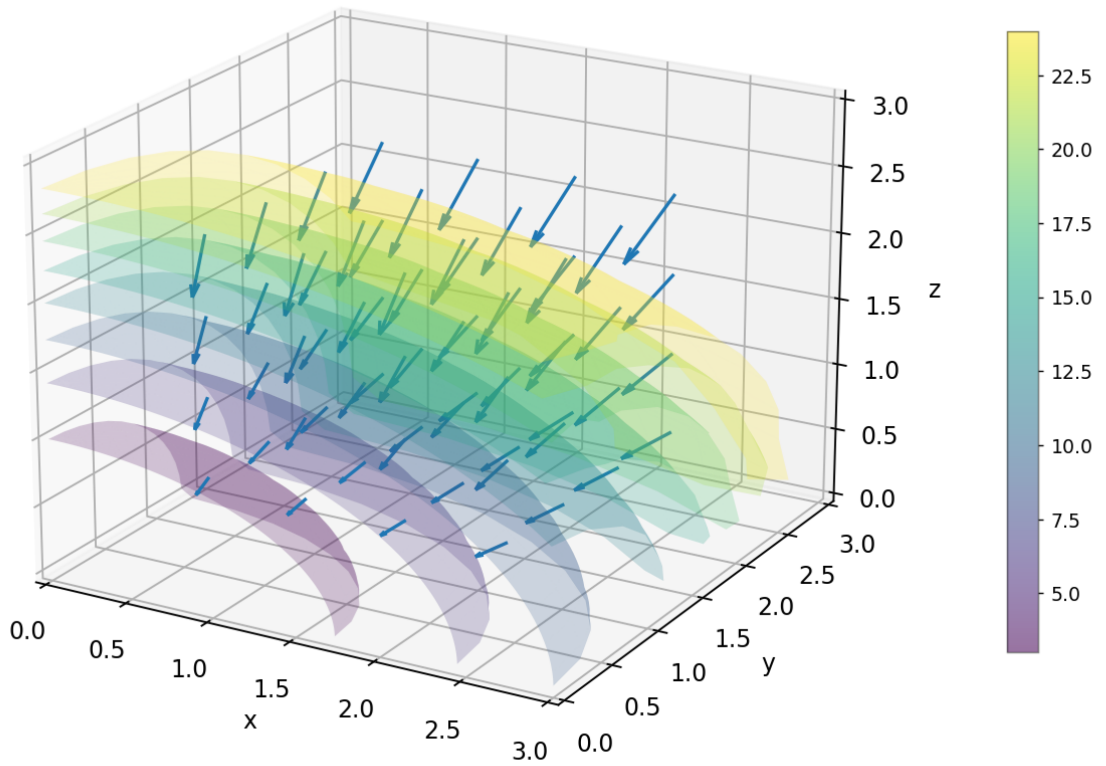
$$A_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, A_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, A_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$



スカラー場 $\varphi(x, y, z)$

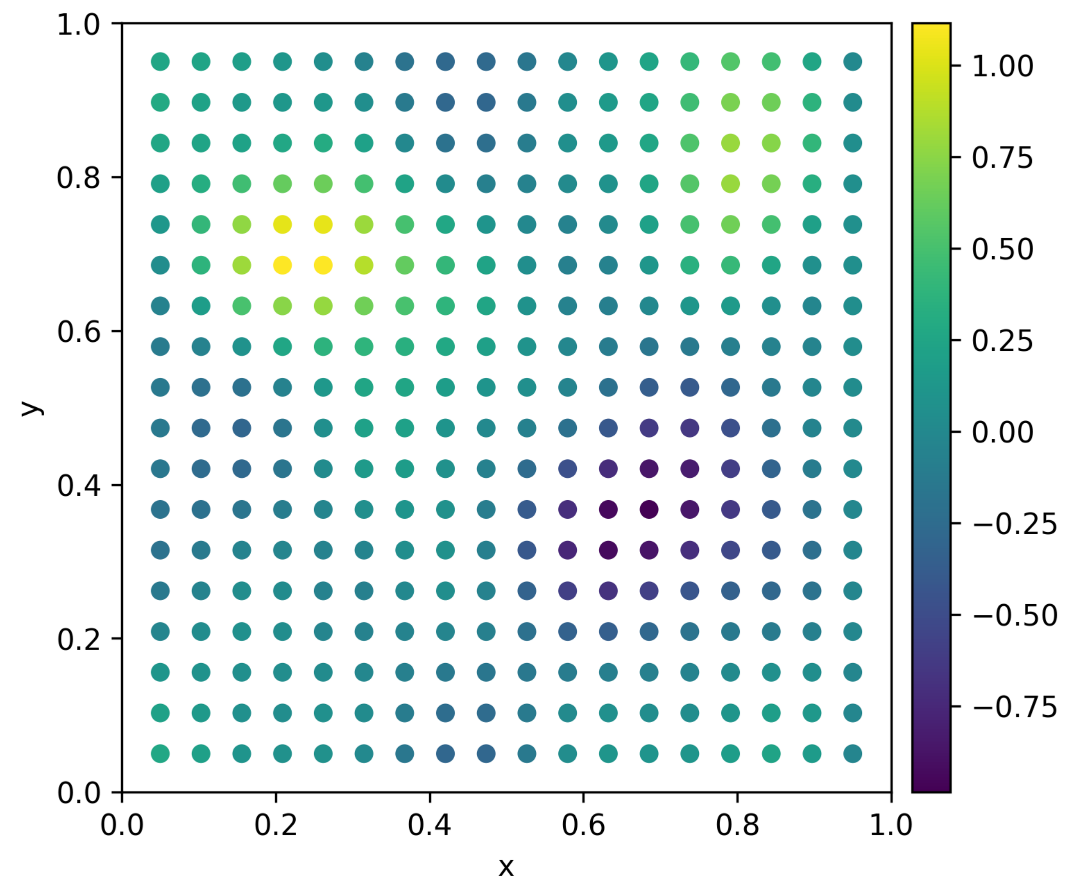


ベクトル場 $\nabla\varphi$



ベクトル場 $\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi$ の例

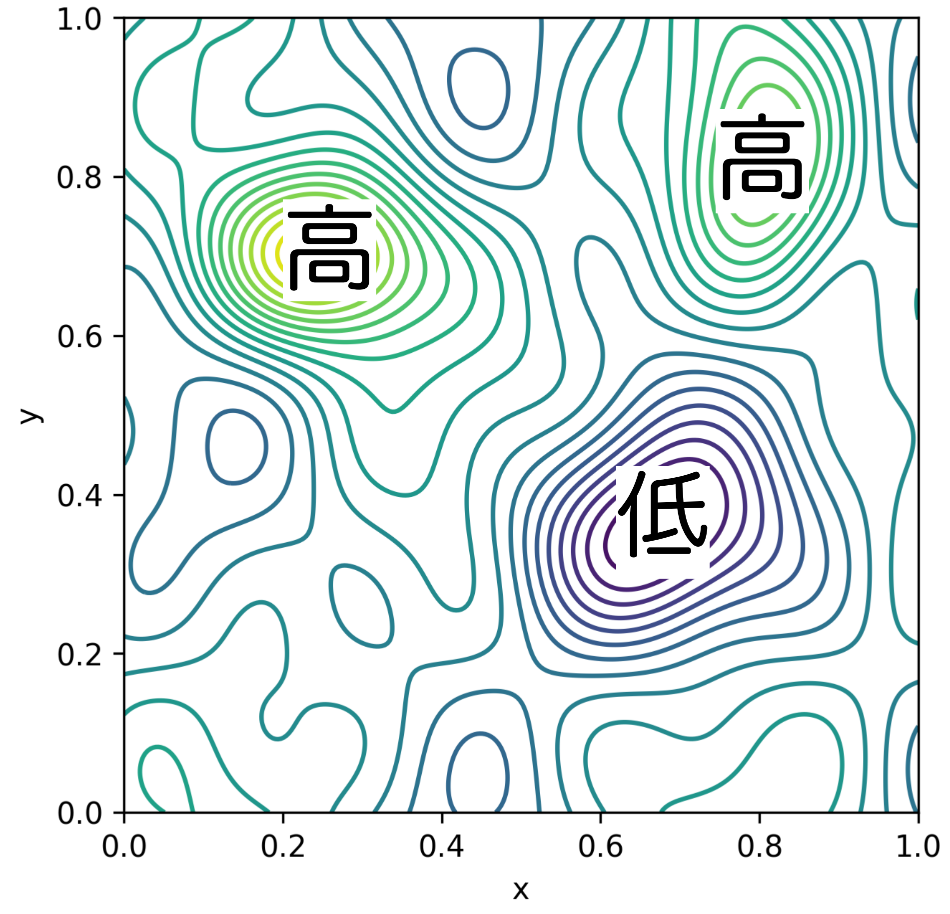
定数分の差



ベクトル場 $\boldsymbol{A}\left(x,y,z\right)$ に対し、あるスカラー場 $\varphi\left(x,y,z\right)$ が

$\boldsymbol{A}$ のポテンシャルであるとする。すなわち

$$\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi$$



このとき、c を定数（スカラー）として

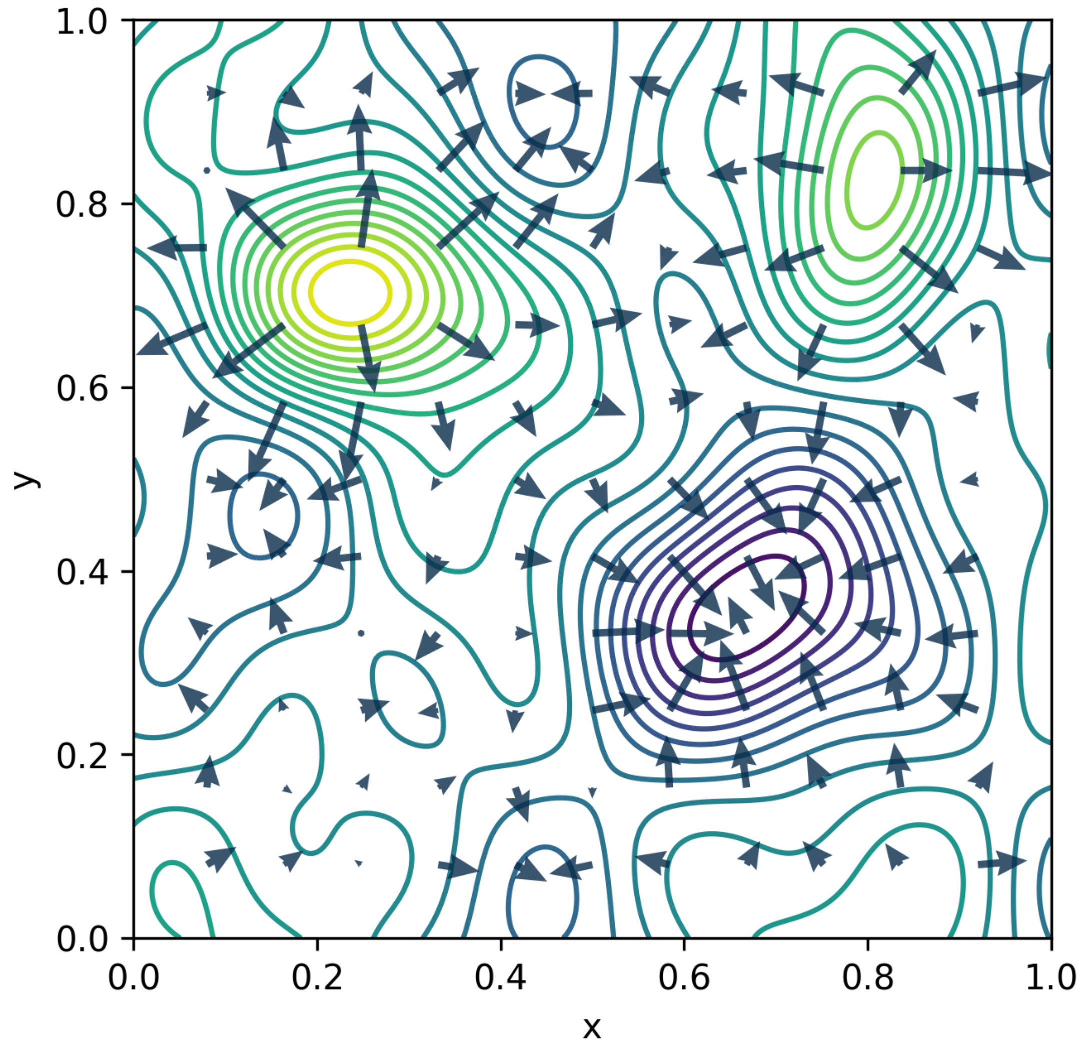
スカラー場 $\varphi + c$ も $\boldsymbol{A}$ のポテンシャルであることに注意する。

すなわち

$$\boldsymbol{A} = -\nabla\left(\varphi + c\right)$$

$\boldsymbol{A}$ は φ の等位面（等位線） に直交して、

φ の値が高い方から低い方へと指し示す。



例題（ポテンシャルの計算）

ベクトル場 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\left(x, y, z\right) = \left(-2x, -2y, -2z\right)$ とする。

$\boldsymbol{A}$ のポテンシャルとなるスカラー場を求めなさい。

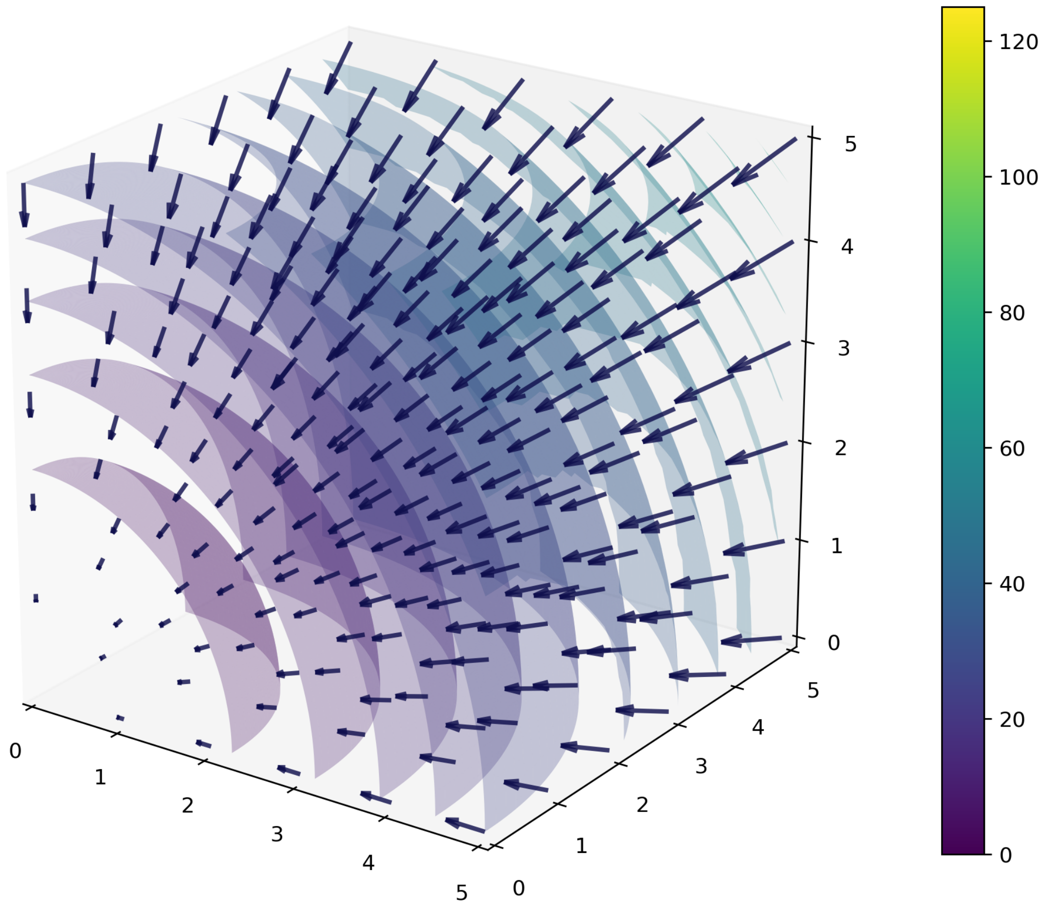
（解答）$\boldsymbol{A}$ のポテンシャルとなるスカラー場を φ とすると

$$\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi$$

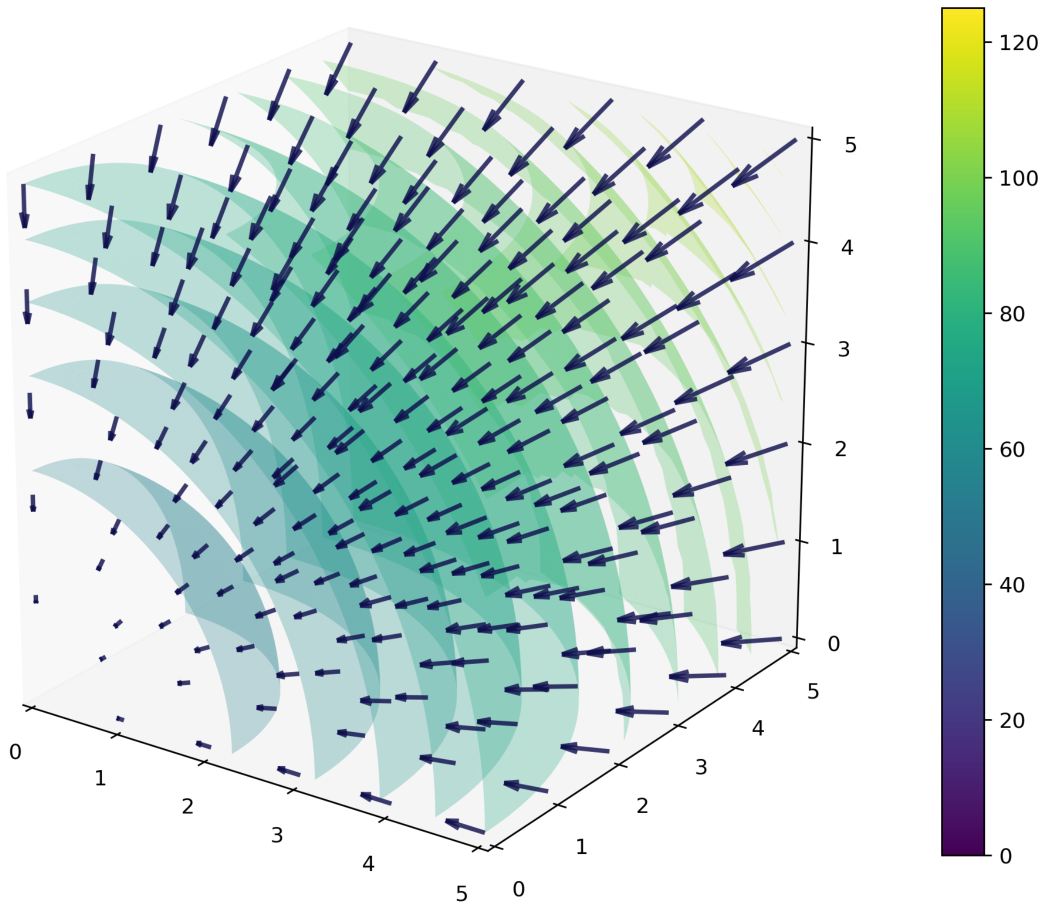
が満たされることより、$\nabla\varphi\left(x, y, z\right) = -\boldsymbol{A} = \left(2x, 2y, 2z\right)$

これより求めるスカラー場はつぎのように表される。

$$\varphi\left(x, y, z\right) = \underline{x^2 + y^2 + z^2 + c}$$ （c は定数）



$\boldsymbol{A}$, φ（$c = 0$）



$\boldsymbol{A}$, φ（$c = 50$）

ポテンシャルの例

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$（位置ベクトル），

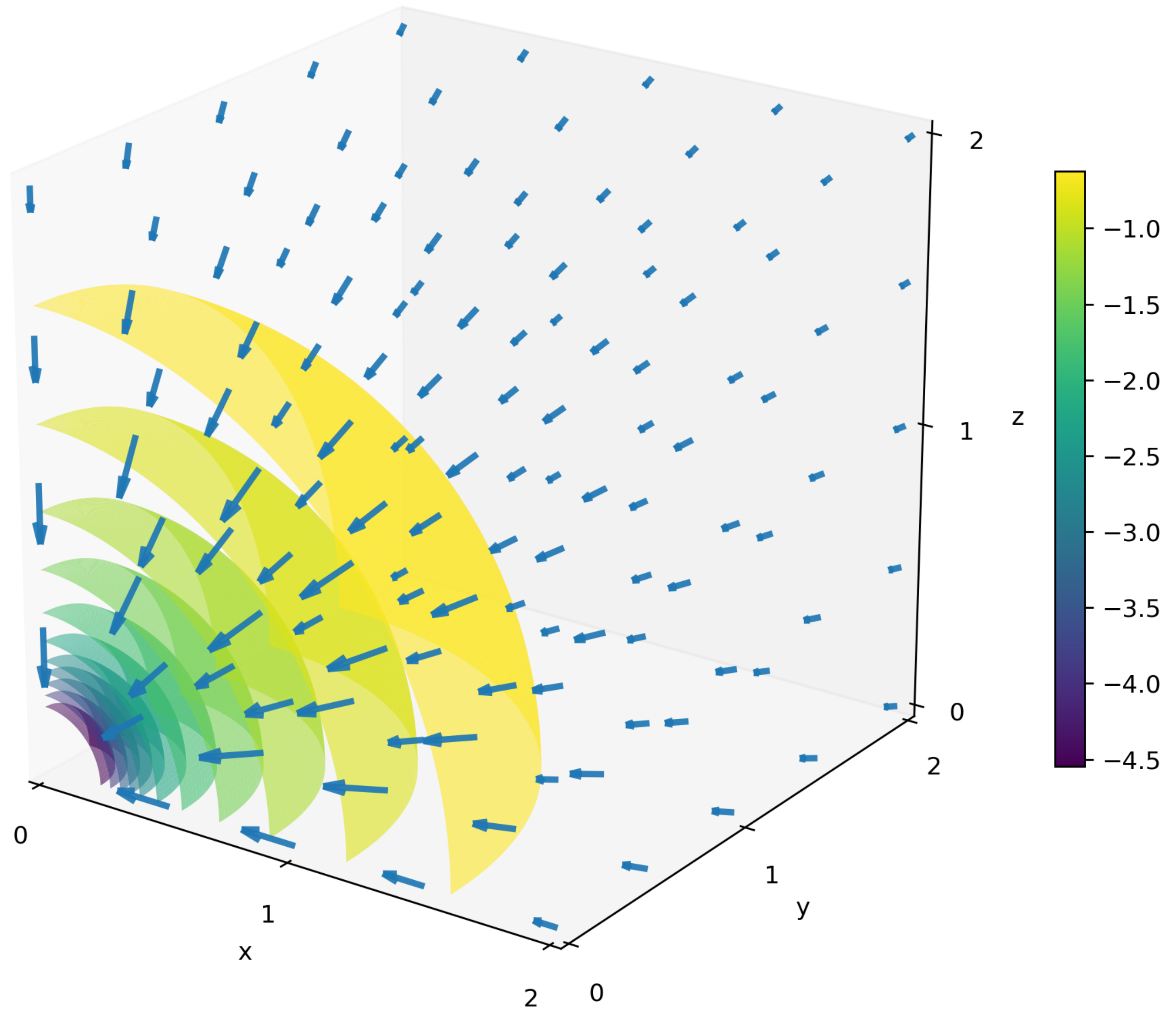
$r = r(x, y, z) = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ とする。ただし $r \neq 0$ 。

ポテンシャルが $\varphi = -\dfrac{1}{r}$ となるようなベクトル場 $\boldsymbol{A}$ を求めよう。

$$\nabla\varphi = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

となることより

$$\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$



これは原点 O へ向かうベクトル場で、$|\boldsymbol{A}| = \dfrac{1}{r^2}$ より、原点に近いほど強い。

（原点に質量があるときの空間中の重力場に比例する例。）

発散

ベクトル場 $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (A_x, A_y, A_z)$ を考えよう。

A_x, A_y, A_z は、それぞれが 3 変数 x, y, z の関数である。

つぎで定まるスカラー場を、ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ の 発散（ダイバージェンス）という。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

微分演算子 $\overset{\text{ナブラ}}{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ を使えばつぎのようにも表される。

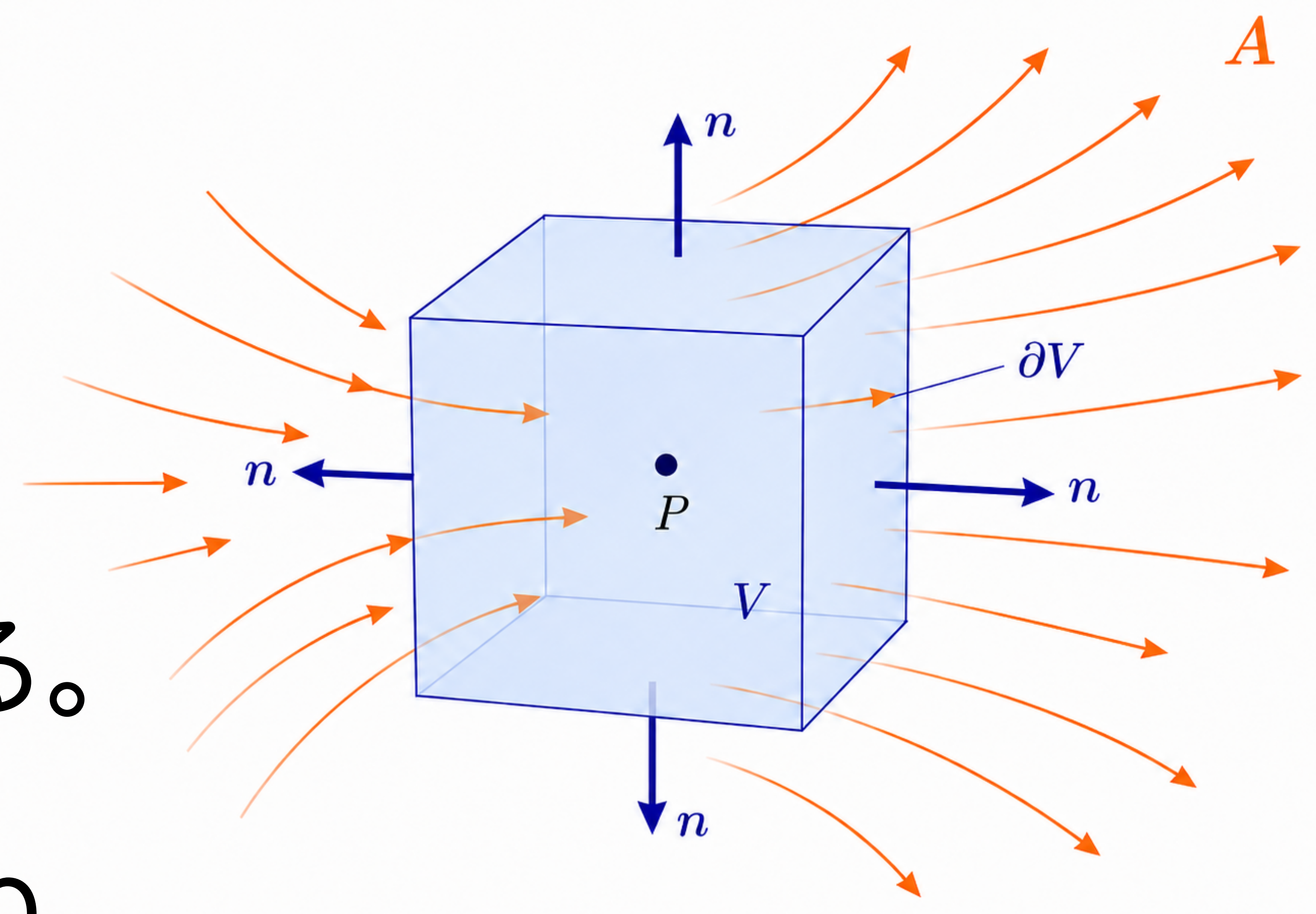
$$\boxed{\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (A_x, A_y, A_z)}$$

流れによる発散の定義

点 P の近くの小さな領域 V （小立方体とする）を考える。

V の境界 ∂V から外へ出ていく流れ（流束）の総量をつぎの式で表す。

$$\iint_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$



ここで、$\boldsymbol{n}$ は外向きの法単位ベクトルを表す。

すなわち（V から出る量）－（V へと入る量）である。

発散とは、この（出る量）－（入る量）を体積でわり、

V を P のまわりで小さくして P での値として局所化したものに一致する。

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\mathrm{P}) = \lim_{V \to \mathrm{P}} \frac{1}{|V|} \iint_{\partial V} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

（$|V|$ は V の体積を表す。証明は省略。）

例題（発散の計算１）

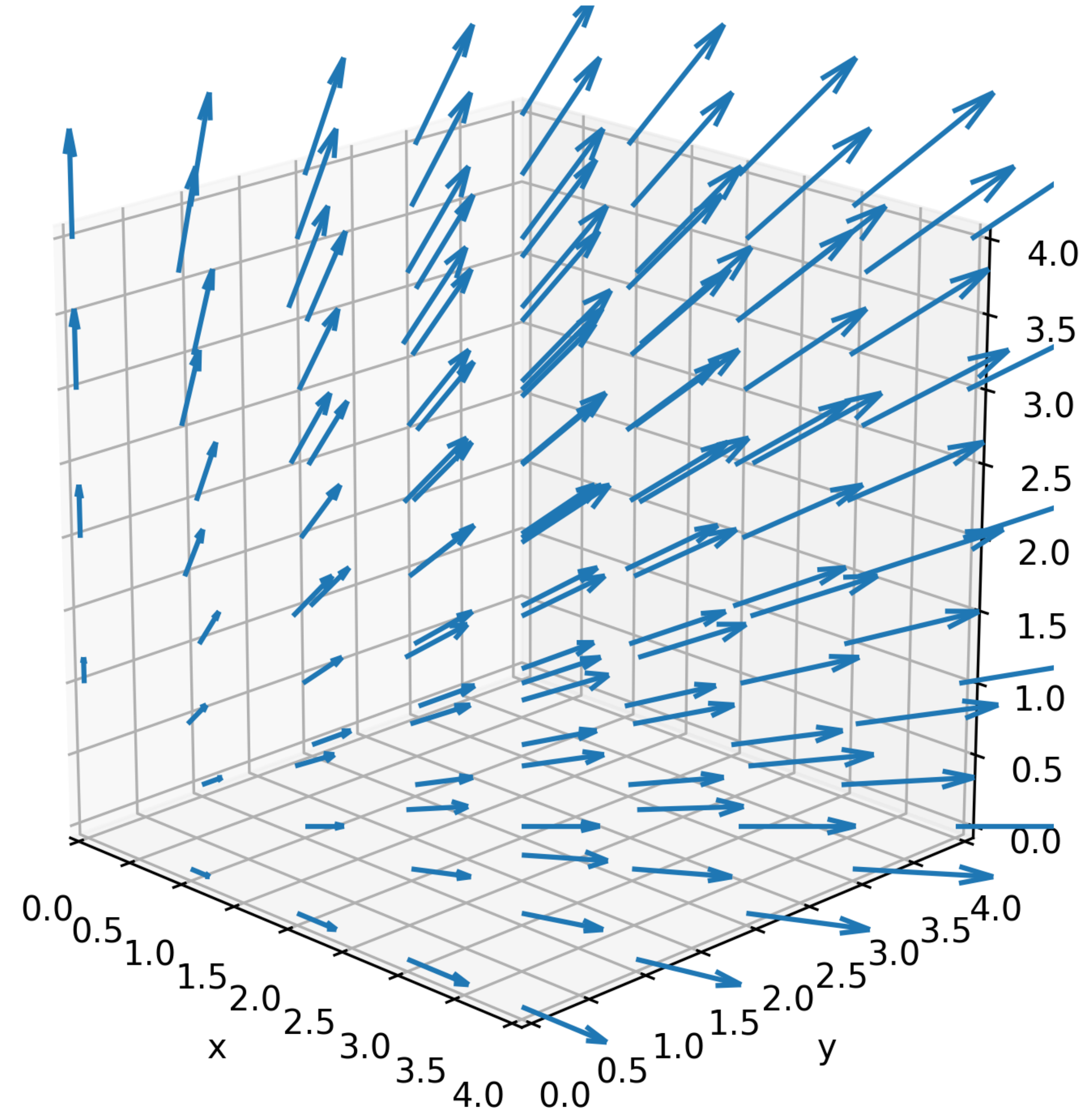
ベクトル場 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x, y, z) = (x, y, z)$ の発散を求めなさい。

（解答）

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$ であった。

いま、$A_x = x, A_y = y, A_z = z$ であるから

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = \underline{3}$$



すなわち、ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ はどの点でも増え方が同じで、

（出る量）–（入る量）が位置によらず一定（＝３）である。

例題（発散の計算２）

ベクトル場 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ の発散を求めなさい。

（解答）

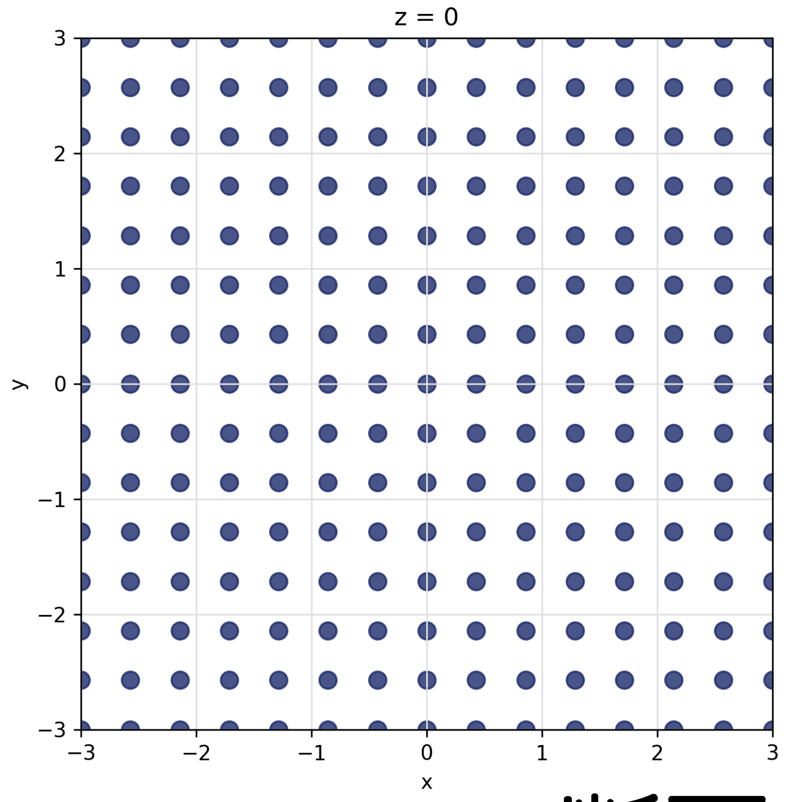
$A_x = yz, A_y = zx, A_z = xy$ であるから

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial(yz)}{\partial x} + \frac{\partial(zx)}{\partial y} + \frac{\partial(xy)}{\partial z}$$

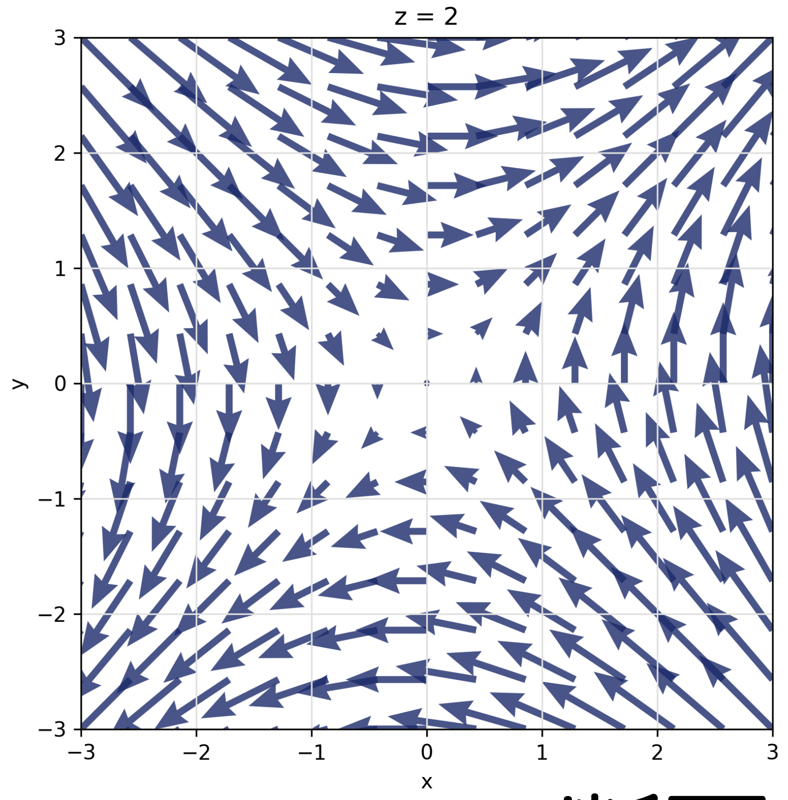
$$= 0 + 0 + 0 = \underline{0}$$

発散が 0 とは、各点のまわりの小領域において、その境界上の

（出る量）－（入る量）= 0 となり、湧き出しや吸い込みがない状態。



$z = 0$ での断面



$z = 2$ での断面

発散の公式１

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ ： ベクトル場

とすると、つぎの等式 ① が成り立つ。

$$① \ \nabla \cdot \left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \cdot \boldsymbol{B}$$

（証明）$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k} = \left(A_x, A_y, A_z \right)$, $\boldsymbol{B} = \left(B_x, B_y, B_z \right)$ とすると

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \left(A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z \right)$ より

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \right) = \frac{\partial \left(A_x + B_x \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(A_y + B_y \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(A_z + B_z \right)}{\partial z}$$

$$= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \nabla \cdot \boldsymbol{B}$$

発散の公式２

$\boldsymbol{A}$ ： ベクトル場 , $\varphi = \varphi(x, y, z)$ ： スカラー場

とすると、つぎの等式 ② が成り立つ。

② $\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{A}) = (\nabla \varphi) \cdot \boldsymbol{A} + \varphi (\nabla \cdot \boldsymbol{A})$

（証明）$\boldsymbol{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right)$ とすると $\varphi \boldsymbol{A} = \left(\varphi A_x, \varphi A_y, \varphi A_z\right)$ となる。

φA_x は 3 変数 x, y, z の実数値関数であることより、関数の積の微分を考えれば

$$（左辺）= \frac{\partial(\varphi A_x)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\varphi A_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi A_z)}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} A_x + \varphi \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} A_y + \varphi \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} A_z + \varphi \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} A_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} A_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} A_z\right) + \varphi \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = （右辺）$$

例題（発散の公式）

スカラー場を $\varphi = x^2 + y^2 + z^2$, ベクトル場を $\boldsymbol{A} = (x, y, z)$ とおく。

$\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{A})$ を求めなさい。

（解答）前ページの公式より $\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{A}) = (\nabla \varphi) \cdot \boldsymbol{A} + \varphi (\nabla \cdot \boldsymbol{A})$ であった。

$\nabla \varphi = (2x, 2y, 2z)$ より $(\nabla \varphi) \cdot \boldsymbol{A} = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$ 。

$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$ より $\varphi (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$ 。

したがって

$$\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{A}) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 = \underline{5\varphi}$$

ラプラシアン

$\varphi = \varphi(x, y, z)$ をスカラー場とする。

φ の勾配 $\nabla\varphi$ の発散 $\mathrm{div}\,\nabla\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi)$ を考えよう。

$$\nabla\cdot(\nabla\varphi) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

ここで、微分演算子 ∇ どうしの内積 $\nabla\cdot\nabla$ を ∇^2 で表すことにすると

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

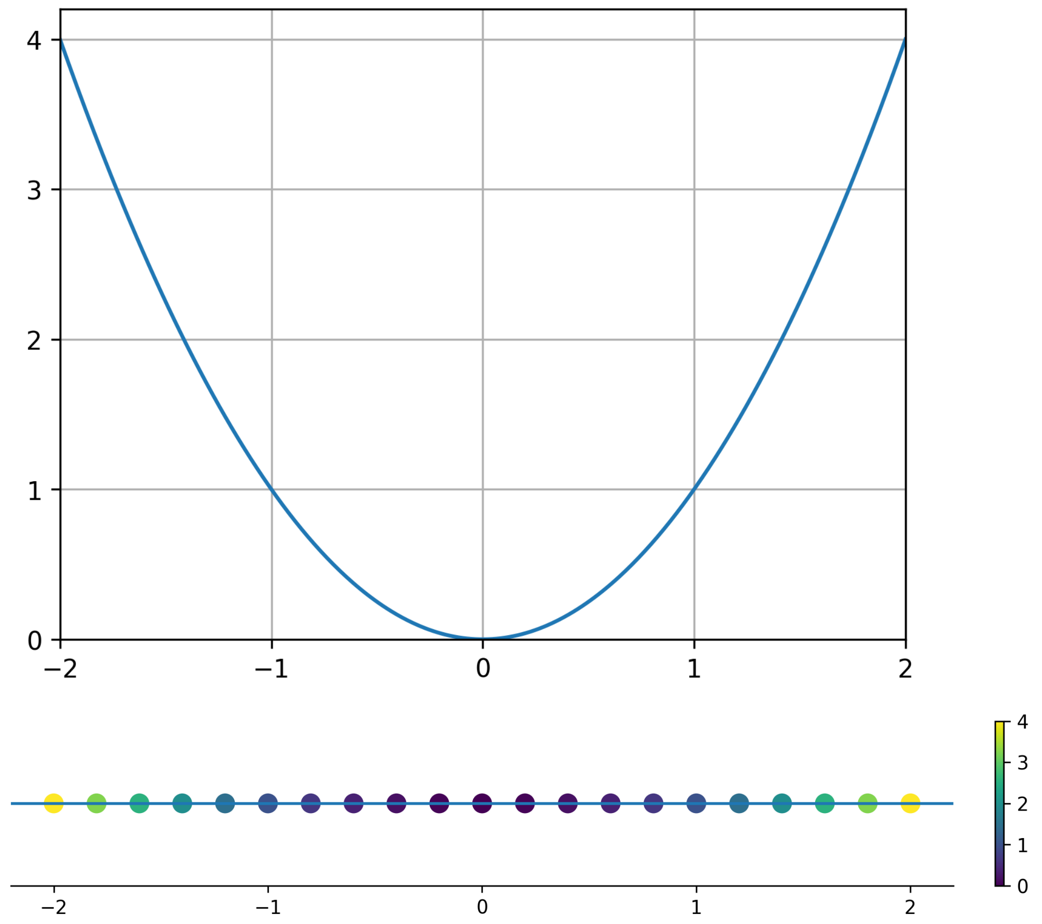
となることから $\nabla\cdot(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi$ と表せる。

この微分演算子としての記号 ∇^2 を ラプラシアン という。

例題（ラプラシアンの計算１）

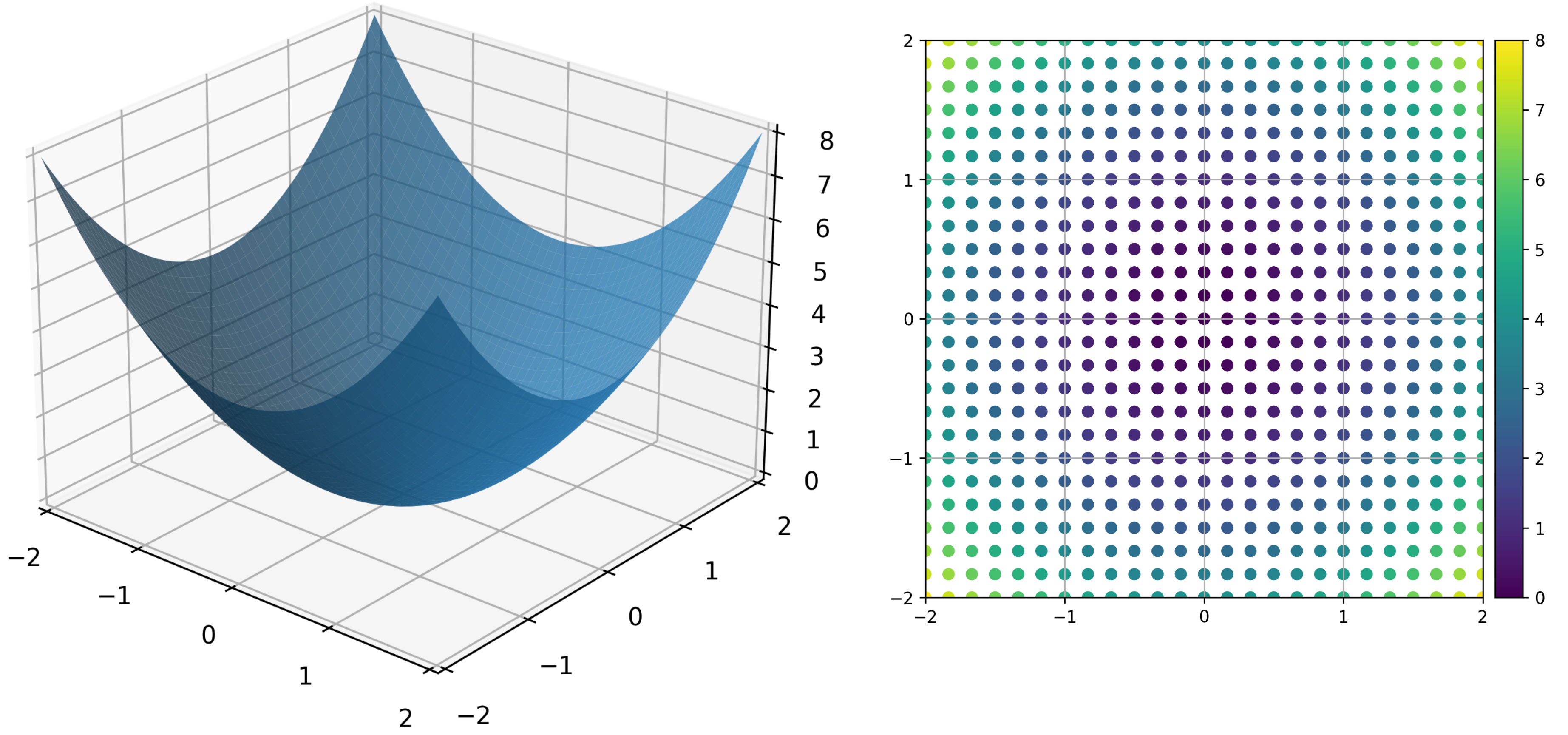
$\varphi = x^2 + y^2 + z^2$ のラプラシアン $\nabla^2\varphi$ を求めなさい。

（解答）$\nabla^2\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 2 + 2 + 2 = 6$



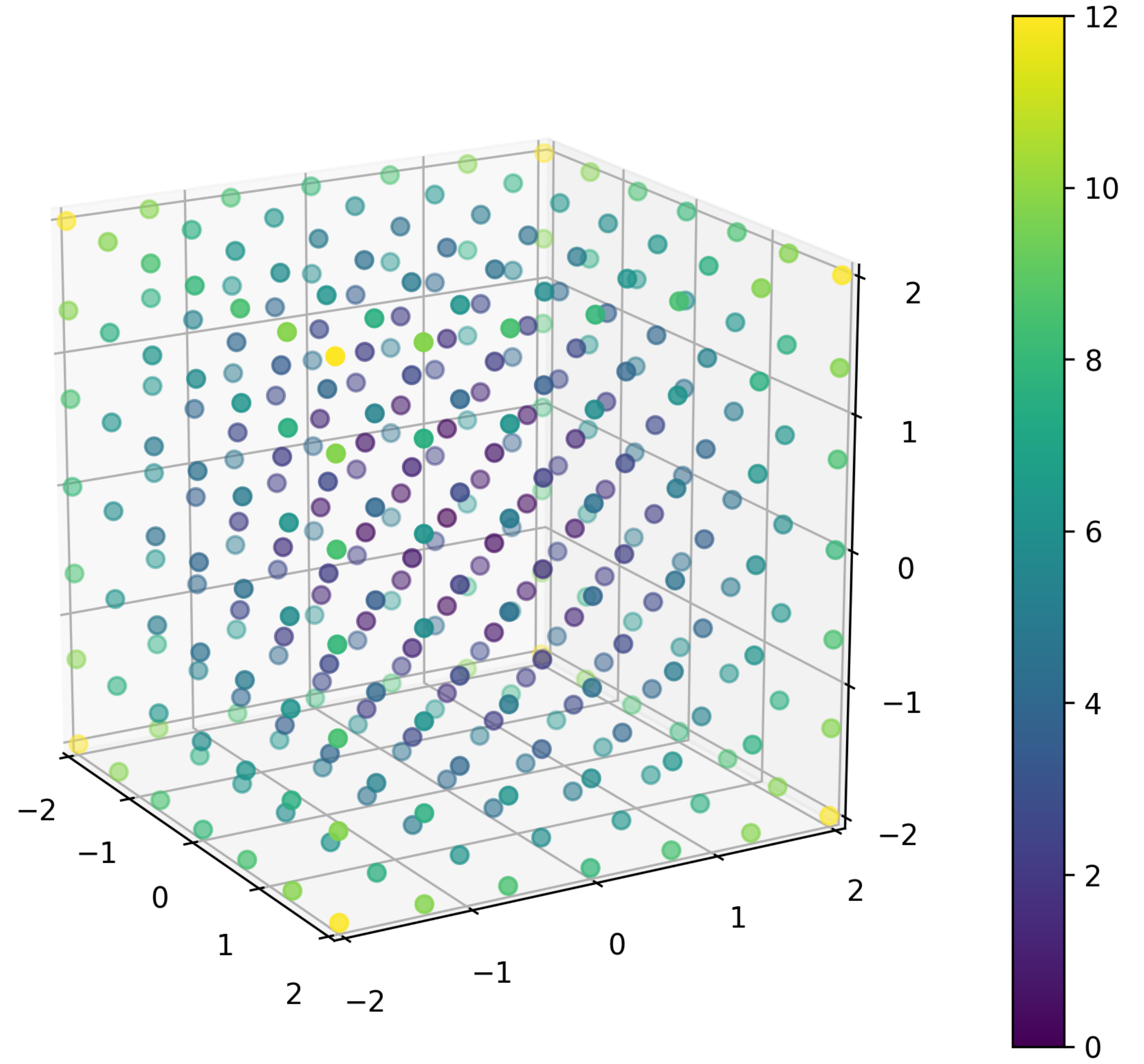
$\varphi = x^2$, $\nabla^2\varphi = 2 > 0$

グラフは原点中心に下に凸



$\varphi = x^2 + y^2$, $\nabla^2\varphi = 2 + 2 = 4 > 0$

グラフは原点中心に下に凸



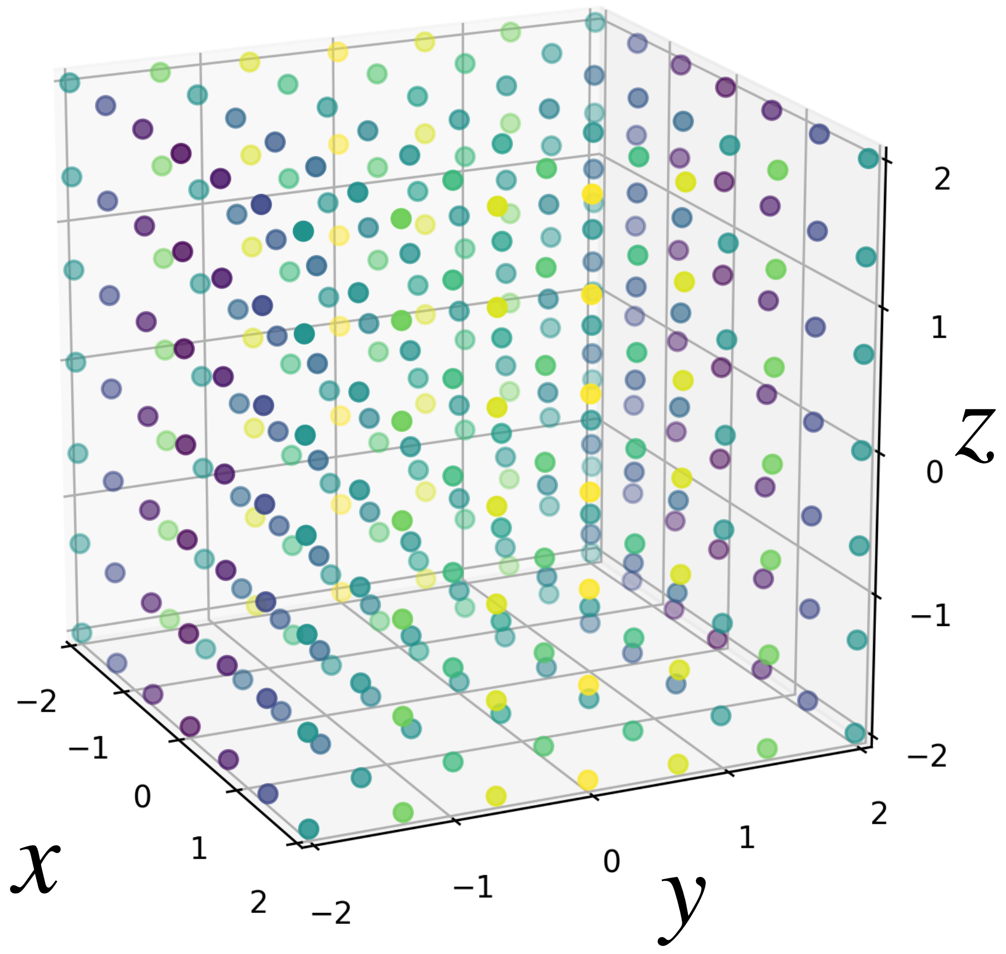
$\varphi = x^2 + y^2 + z^2$, $\nabla^2\varphi = 6 > 0$

原点で最小、どの方向にも同じ増加

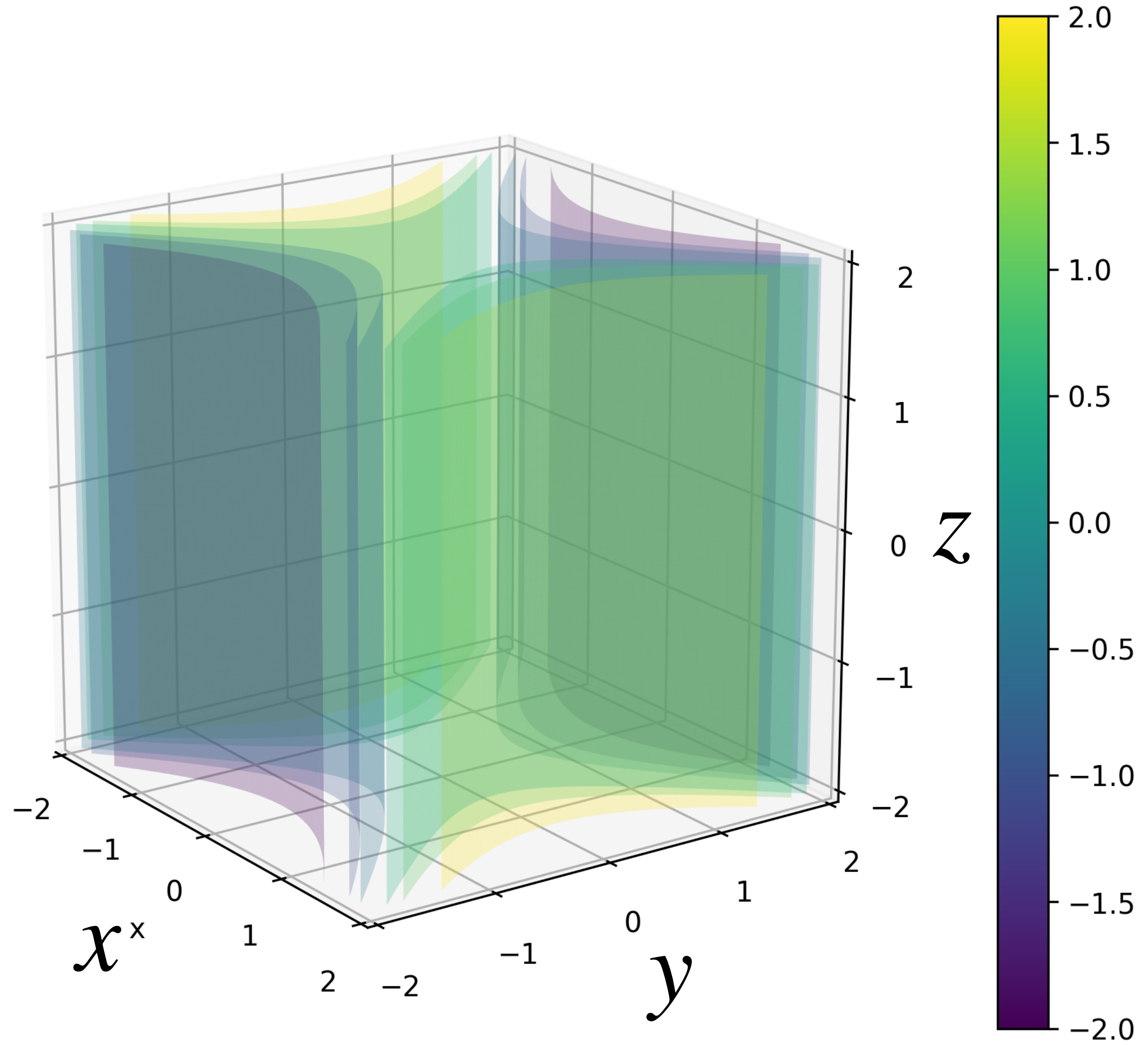
例題（ラプラシアンの計算２）

$\varphi = x^2 - y^2$ のラプラシアン $\nabla^2\varphi$ を求めなさい。

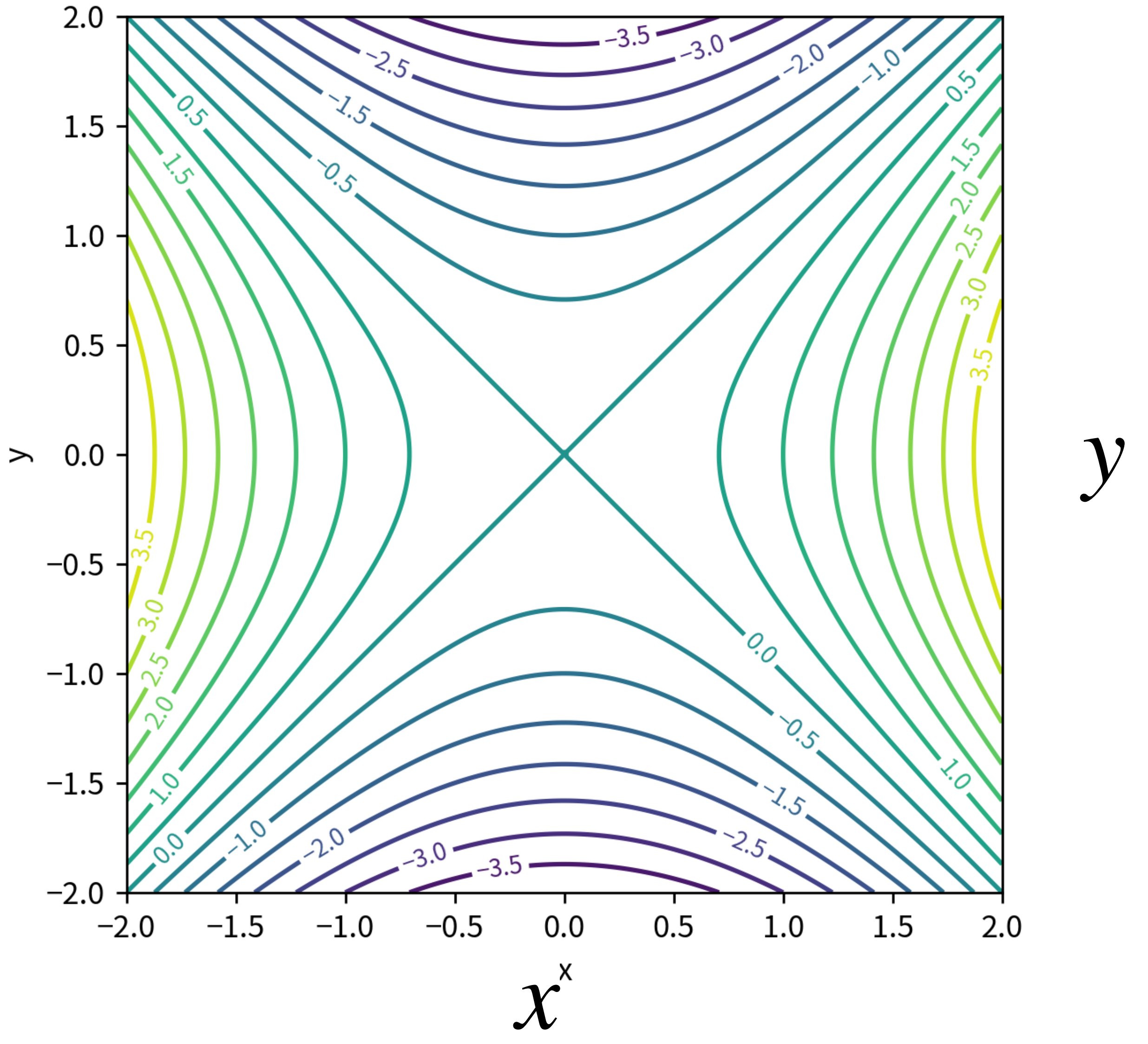
（解答）$\nabla^2\varphi = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 2 + (-2) + 0 = \underline{0}$



$\varphi = x^2 - y^2$



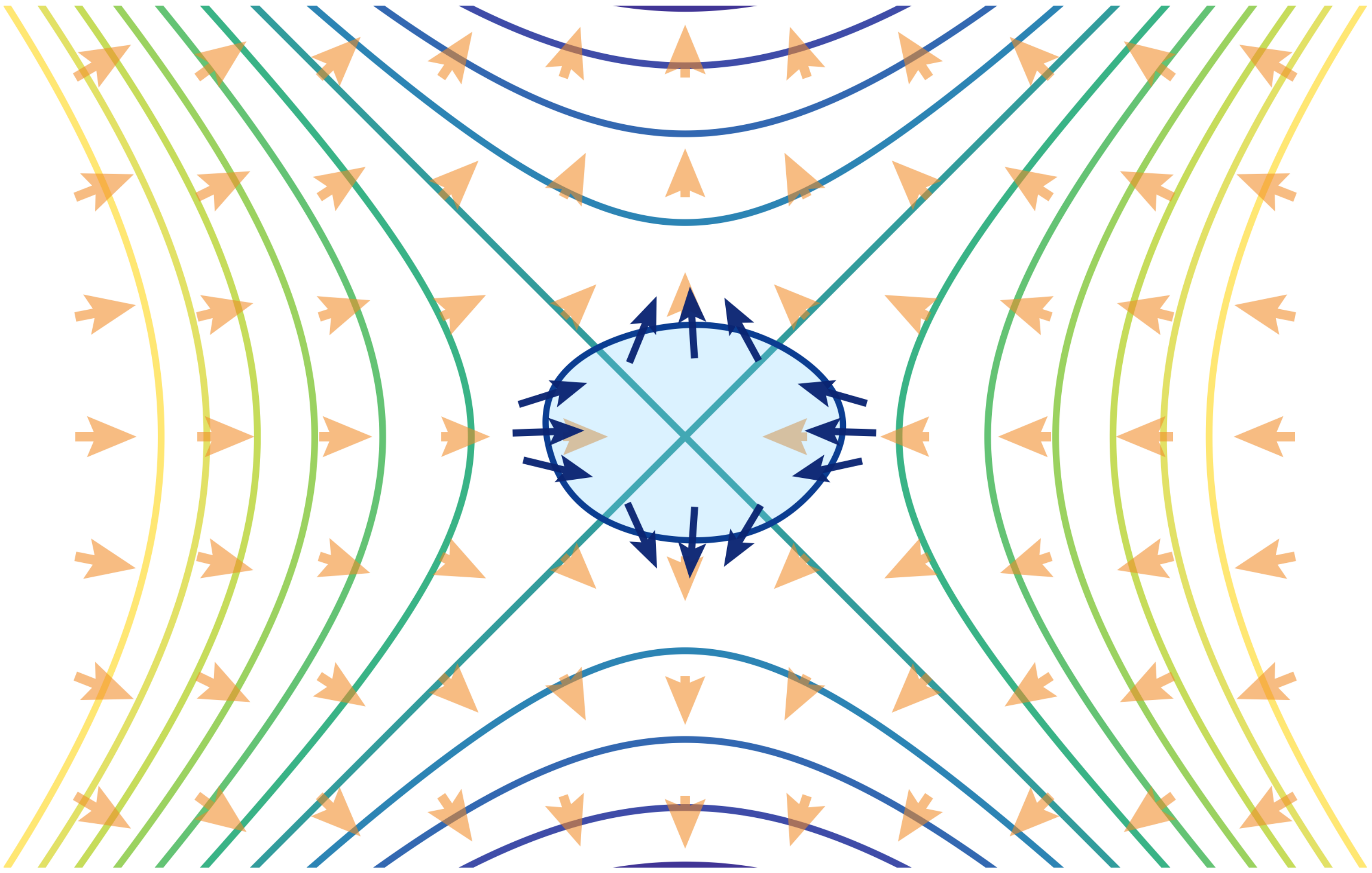
等位面



等位面の $z = 0$ による断面図

各点の周りで、x 方向の曲がり $\varphi_{xx} = 2$ と y 方向の曲がり $\varphi_{yy} = -2$ が打ち消し合い、z 軸方向は $\varphi_{zz} = 0$ 。

調和関数



偏微分方程式

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

を ラプラスの方程式 という。

ラプラスの方程式をみたす関数 $\varphi(x, y, z)$ を 調和関数 という。

ベクトル場 $\boldsymbol{A}$ と、そのポテンシャルとなるスカラー場 φ があるとする。

$$\boldsymbol{A} = -\nabla \varphi$$

このとき $\boldsymbol{A}$ の発散は

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \nabla \cdot (-\nabla \varphi) = -\nabla^2 \varphi$$

すなわち φ が調和関数なら $\boldsymbol{A}$ の発散は 0 となる（（出る量）＝（入る量））。

調和関数の例（1）

11ページの例 $\varphi = -\dfrac{1}{r}$（$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r \neq 0$）は、調和関数である。

これを証明しよう。11ページより $\nabla\varphi$ はつぎのとおり。

$$\nabla\varphi = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \qquad (\boldsymbol{r} = (x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\text{, 位置ベクトル})$$

また、17ページより一般につぎの公式が成り立つのであった。

② $\nabla \cdot (\varphi\boldsymbol{A}) = (\nabla\varphi) \cdot \boldsymbol{A} + \varphi(\nabla \cdot \boldsymbol{A})$

この公式を、スカラー場 $\dfrac{1}{r^3}$ とベクトル場 $\boldsymbol{r}$ に適用する。ラプラシアン $\nabla^2\varphi$ は

$$\nabla^2\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\right) = \underline{\left(\nabla\frac{1}{r^3}\right)} \cdot \boldsymbol{r} + \frac{1}{r^3}\underline{(\nabla \cdot \boldsymbol{r})} \quad \cdots \ (*)$$

調和関数の例（２）

合成関数の勾配の公式より、つぎが成り立つ。

$$\nabla f(\psi) = \frac{df(\psi)}{d\psi}\nabla\psi$$ （$f(\psi)$ は、１変数 ψ の関数 ）

これよりつぎが成り立つ。

$$\nabla\frac{1}{r^3} = \frac{d}{dr}\frac{1}{r^3}\nabla r = -\frac{3}{r^4}\nabla r = -\frac{3}{r^4}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = -\frac{3}{r^5}\boldsymbol{r}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ なので、$\nabla r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ となることを使った。

また、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ であったから、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$

調和関数の例（3）

以上より23ページの（∗）に代入して

$$（*） = \left(\nabla \frac{1}{r^3}\right) \cdot \boldsymbol{r} + \frac{1}{r^3}(\nabla \cdot \boldsymbol{r}) = -\frac{3}{r^5}\underline{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}} + \frac{3}{r^3}$$

$\underline{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}} = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ となるから、結局、$r \neq 0$ において

$$\nabla^2 \varphi = （*） = -\frac{3}{r^5} r^2 + \frac{3}{r^3} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0 \quad \blacksquare$$

$\boldsymbol{A}$ を、φ をポテンシャルとするベクトル場とすると

$$\boldsymbol{A} = -\nabla \varphi$$

が成り立ち、φ が調和関数なら $\boldsymbol{A}$ の発散は 0 となるのであった（ 22ページ ）。

調和関数の例（４）

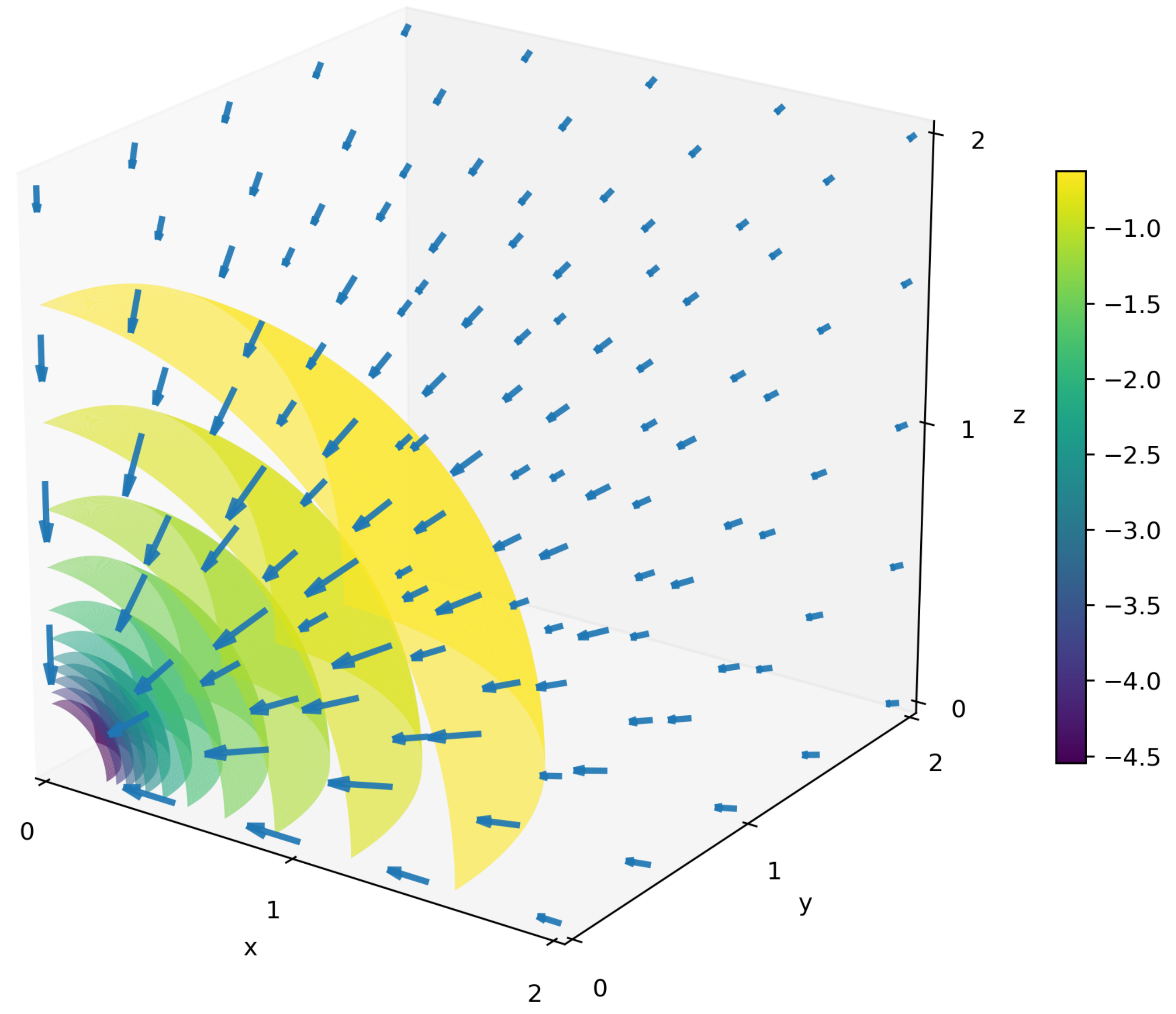
今回の調和関数 $\varphi = -\dfrac{1}{r}$（$r \neq 0$）をポテンシャルとするベクトル場については

$$\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \quad (r \neq 0), \ \mathrm{div}\boldsymbol{A} = -\nabla^2\varphi = -0 = 0$$

各点の周りの小領域 V に関してつぎの式が成り立つのであった（13ページ）。

$$(V\text{から出る量}) - (V\text{へと入る量}) = \iint_{\partial V} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \quad (\partial V\text{は}V\text{の境界を表す})$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}(\mathrm{P}) = \lim_{V\to\mathrm{P}} \frac{1}{|V|}\iint_{\partial V} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$



いま、原点以外で $\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0$ なので、原点を含まない

十分小さい領域 V では、境界を通る正味の流束

（出る量 − 入る量）はほぼ 0（局所的に釣り合う）。