ベクトル解析

４回目講義

畠中　英里

本日の講義の流れ

○ 前回の復習

○ 本日の講義内容

・スカラー場

・ベクトル場

・等位面、等位面群

・勾配

・方向微分係数

前回の復習（1）

○ ベクトル関数

変数 t の各値に対してベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ が対応するとき、ベクトル関数 という。

ベクトル関数は成分表示により３つの実数値関数の組み合わせと思える。

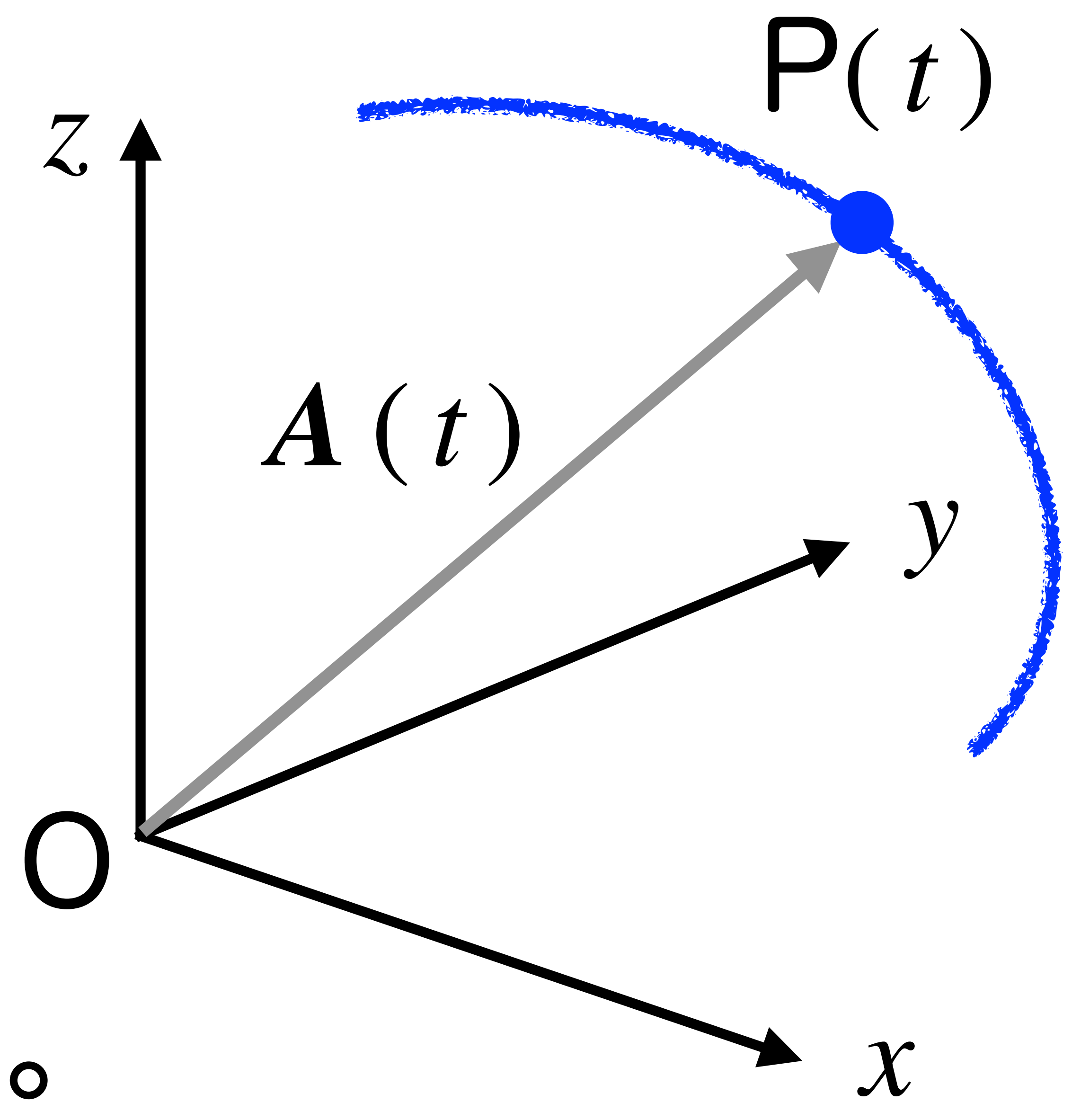
$$\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\,\boldsymbol{i} + A_y(t)\,\boldsymbol{j} + A_z(t)\,\boldsymbol{k}$$

各成分 $A_x(t)$, $A_y(t)$, $A_z(t)$ が t の関数として連続なとき、

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ は 連続 であるという。

原点 O を始点としてベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ を描いたとき、

端点は一般に空間内の曲線を描く。これを ホドグラフ という。



前回の復習（2）

○ ベクトル関数の微分

t の増分 Δt にともなう $\boldsymbol{A}(t)$ の増分を $\Delta \boldsymbol{A}$ とする。

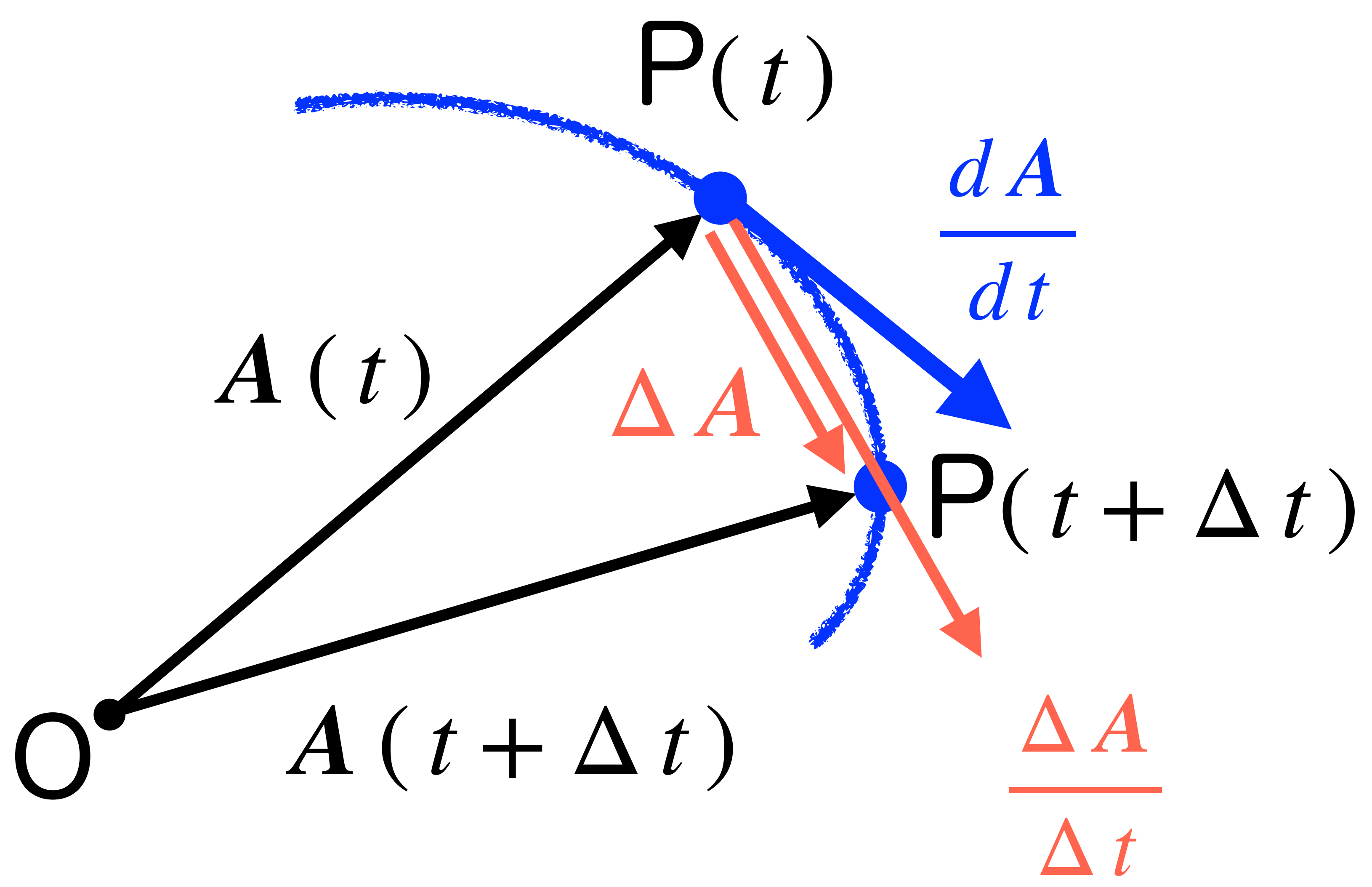
つぎの極限が存在するとき、これを t における $\boldsymbol{A}(t)$ の 微分係数 という。

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t) - \boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}$$ （ $= \boldsymbol{A}'(t)$ とも表す ）

ベクトル関数の微分は成分ごとに行うことができる。

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}'(t) = A'_x(t)\,\boldsymbol{i} + A'_y(t)\,\boldsymbol{j} + A'_z(t)\,\boldsymbol{k}$$

導関数 $\boldsymbol{A}'(t)$ はホドグラフの接ベクトルである。



前回の復習（3）

○ ベクトル関数の不定積分

$\boldsymbol{A}(t)$ が、$\boldsymbol{D}(t)$ の導関数であるとき、$\boldsymbol{D}(t)$ は $\boldsymbol{A}(t)$ の 不定積分 であるという。

$$\boldsymbol{D}(t) = \int \boldsymbol{A}(t)\,dt$$

ベクトル関数の積分も、成分ごとの積分に帰着される。

$$\int \boldsymbol{A}(t)\,dt = \int A_x(t)\,dt\,\boldsymbol{i} + \int A_y(t)\,dt\,\boldsymbol{j} + \int A_z(t)\,dt\,\boldsymbol{k}$$

○ ベクトル関数の定積分：微分積分学の基本定理 が成り立つ。

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\,dt = \Big[\boldsymbol{D}(t)\Big]_a^b = \boldsymbol{D}(b) - \boldsymbol{D}(a)$$

前回の復習（4）

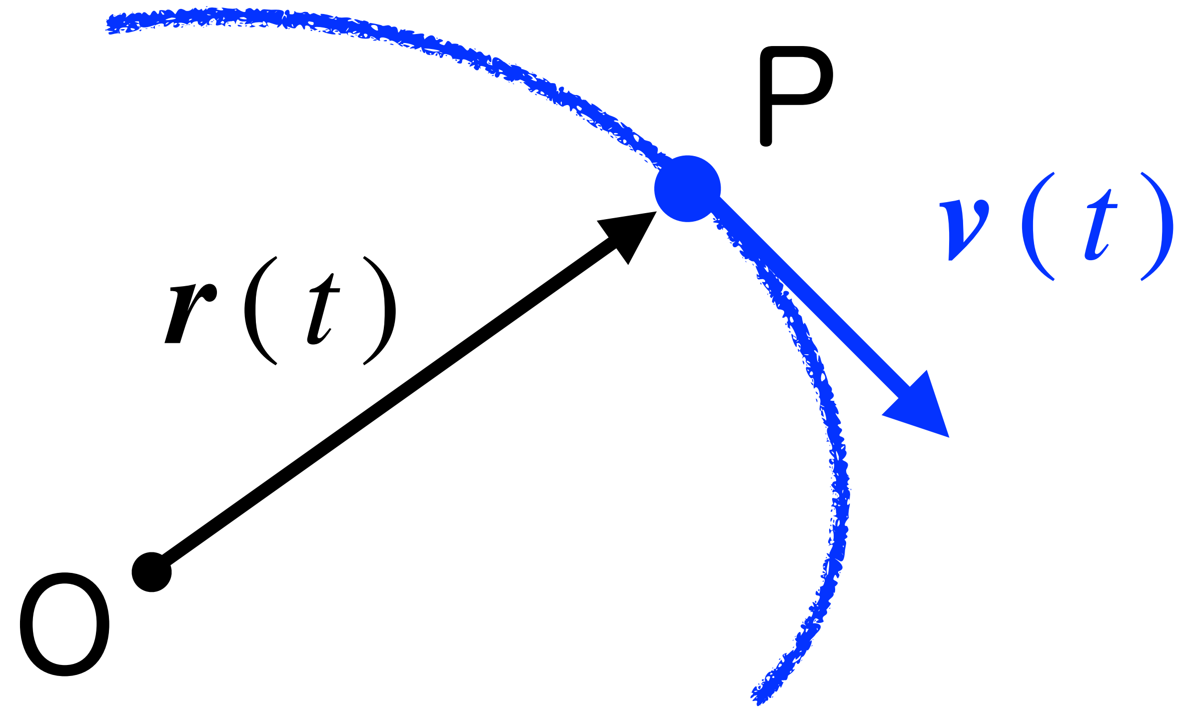
○ 物理的な用語

動点 P が時間 t の経過にともなって $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{r}(t)$ と表されるとき、

$\boldsymbol{r}(t)$ を 位置ベクトル という。

P の 速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$, 加速度ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ はつぎで定まる。

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \ , \ \boldsymbol{a}(t) = \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}$$



$\boldsymbol{v}(t)$ は点 P の軌道に対し P で接する。

始点から終点までの位置ベクトルの変化を 変位 という：

$$\boldsymbol{r}(t_1) - \boldsymbol{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}(u)\,du \ , \ \boldsymbol{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(u)\,du + \boldsymbol{r}(t_0)$$

本日の講義

勾配

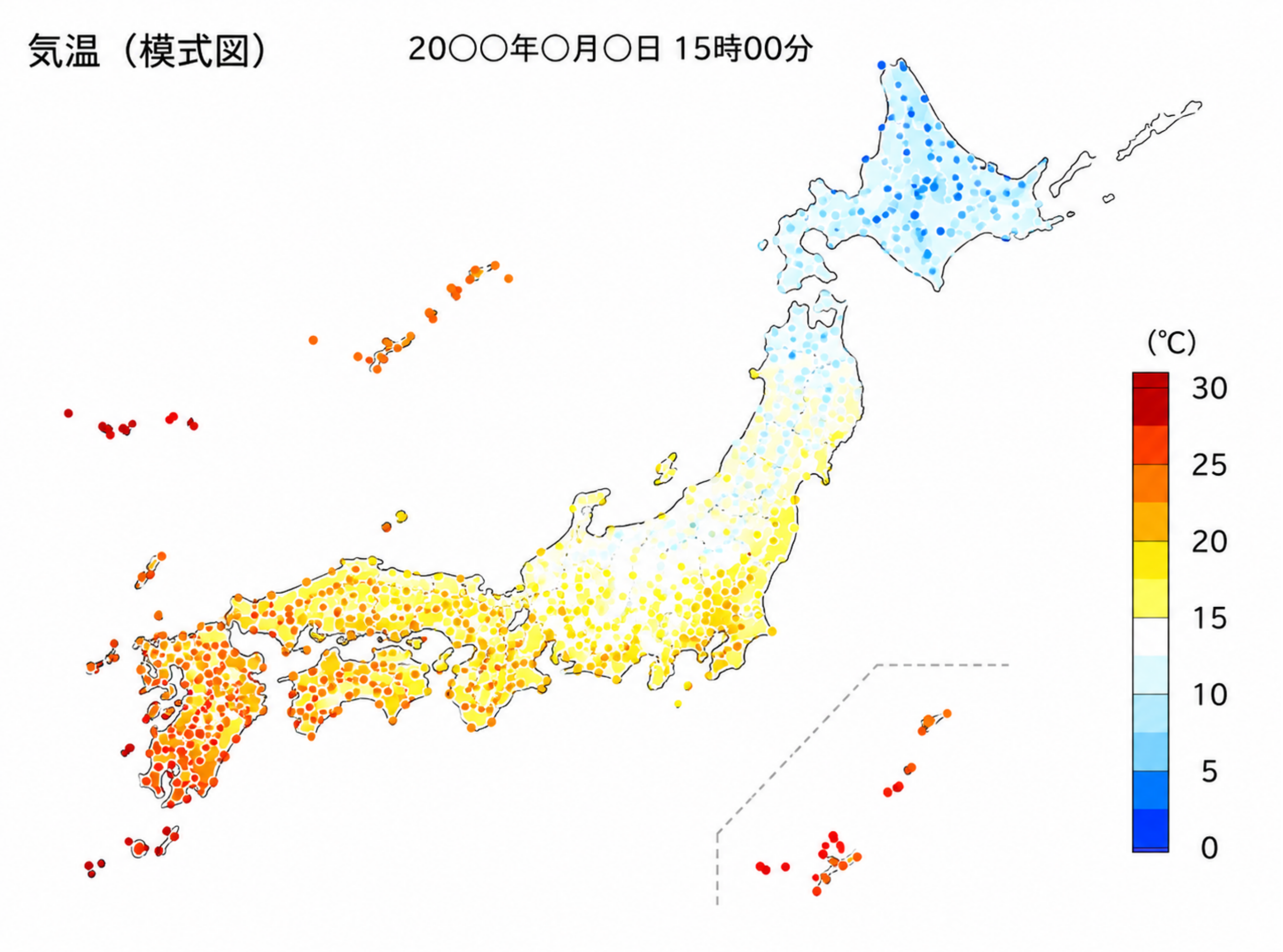
場

前回登場したベクトル関数は、変数 t に依存するベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ であった。

今回は、位置 (x, y, z) に依存する量を扱う。

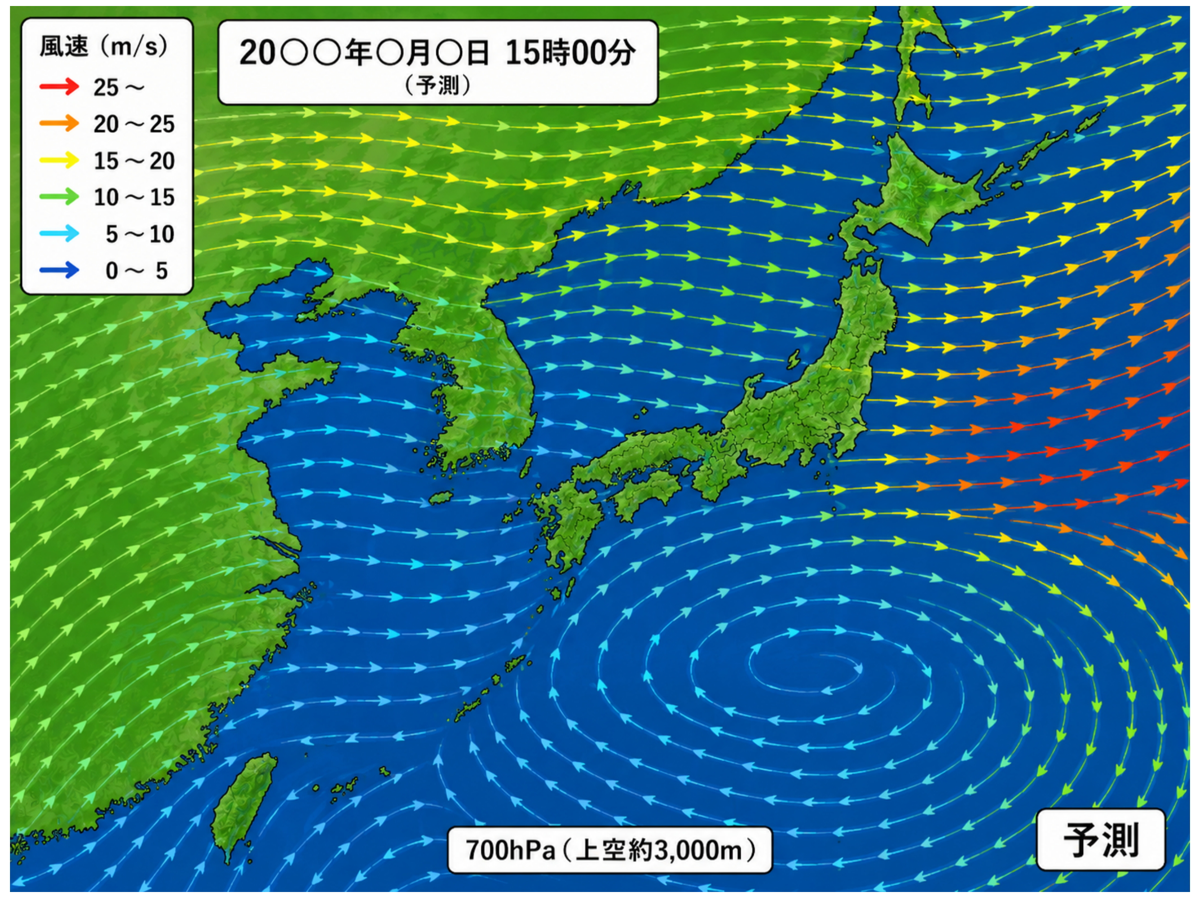
例： 温度、濃度、圧力 … スカラー場と呼ばれる

速度、電場 … ベクトル場と呼ばれる



気温（2次元スカラー場）

（自作の模式図）



風予測図（2次元ベクトル場）

（自作の模式図）

(x, y, z) によって値が決まる量のことを **場**（ field ）という。

スカラー場

xyz 空間内の領域 D において定義された実数値関数 $\varphi(x, y, z)$ のことを

スカラー場 という。

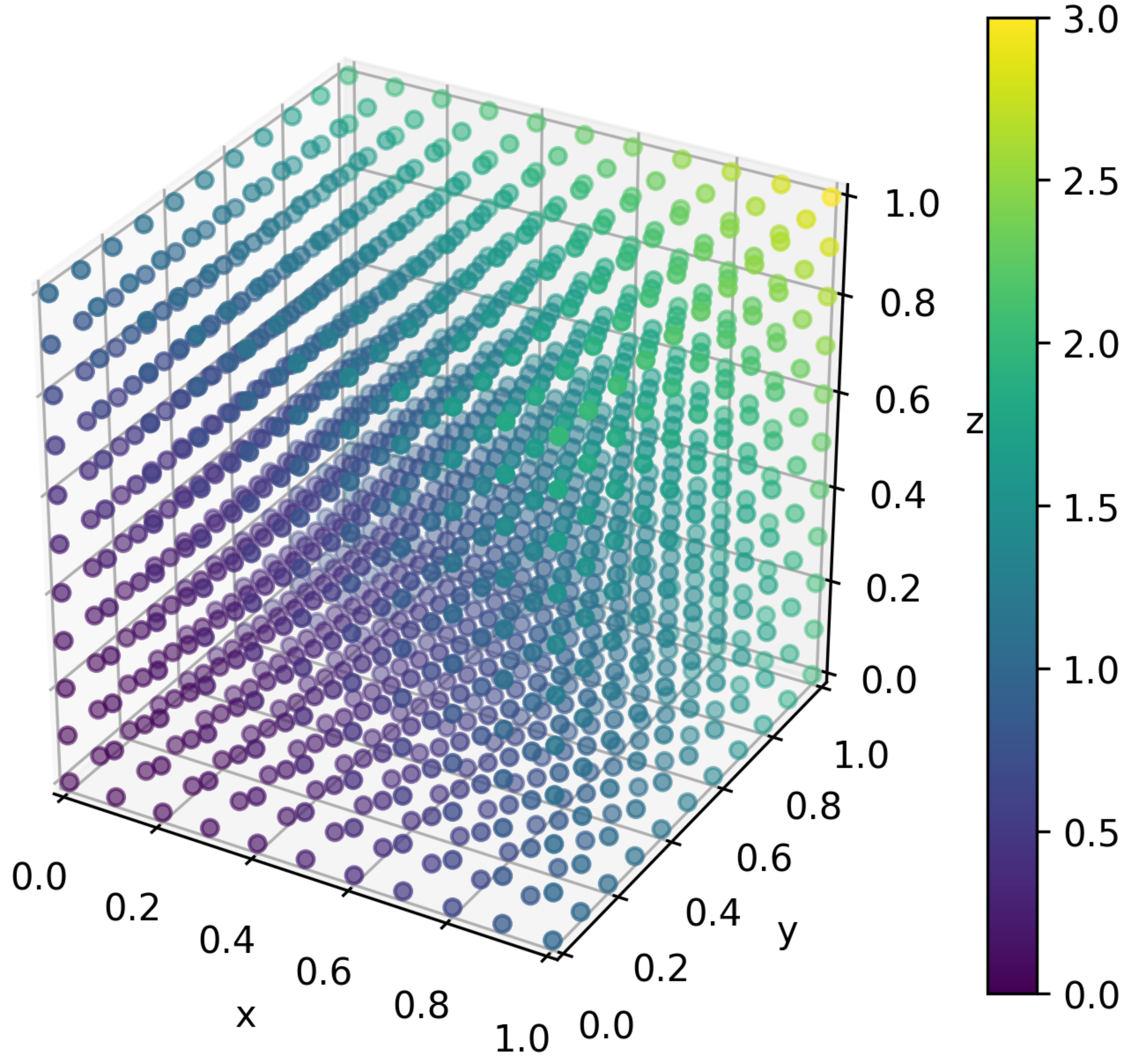
$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

例：$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$,

$$D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$$

各点 (x, y, z) にスカラーが割り当てられている。

右の図ではそのスカラーが色で表されている。



スカラー場 φ における点 P の値を $\varphi(\mathrm{P})$ $(= \varphi(\mathrm{P}_x, \mathrm{P}_y, \mathrm{P}_z))$ とも表す。

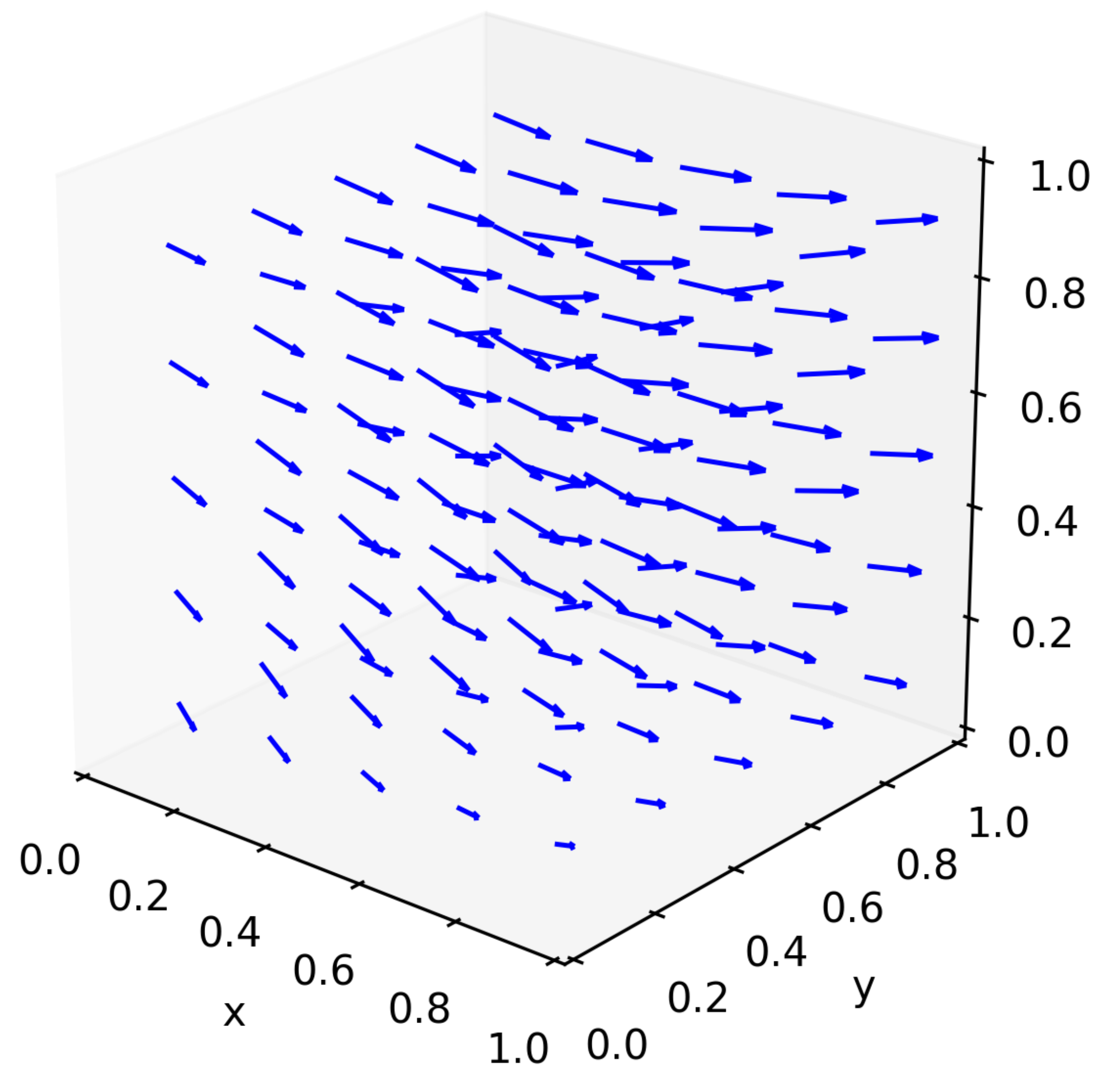
ベクトル場

xyz 空間内の領域 D において定義されたベクトル値関数

$\boldsymbol{A}(x, y, z)$ を ベクトル場 という。

$$\boldsymbol{A} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

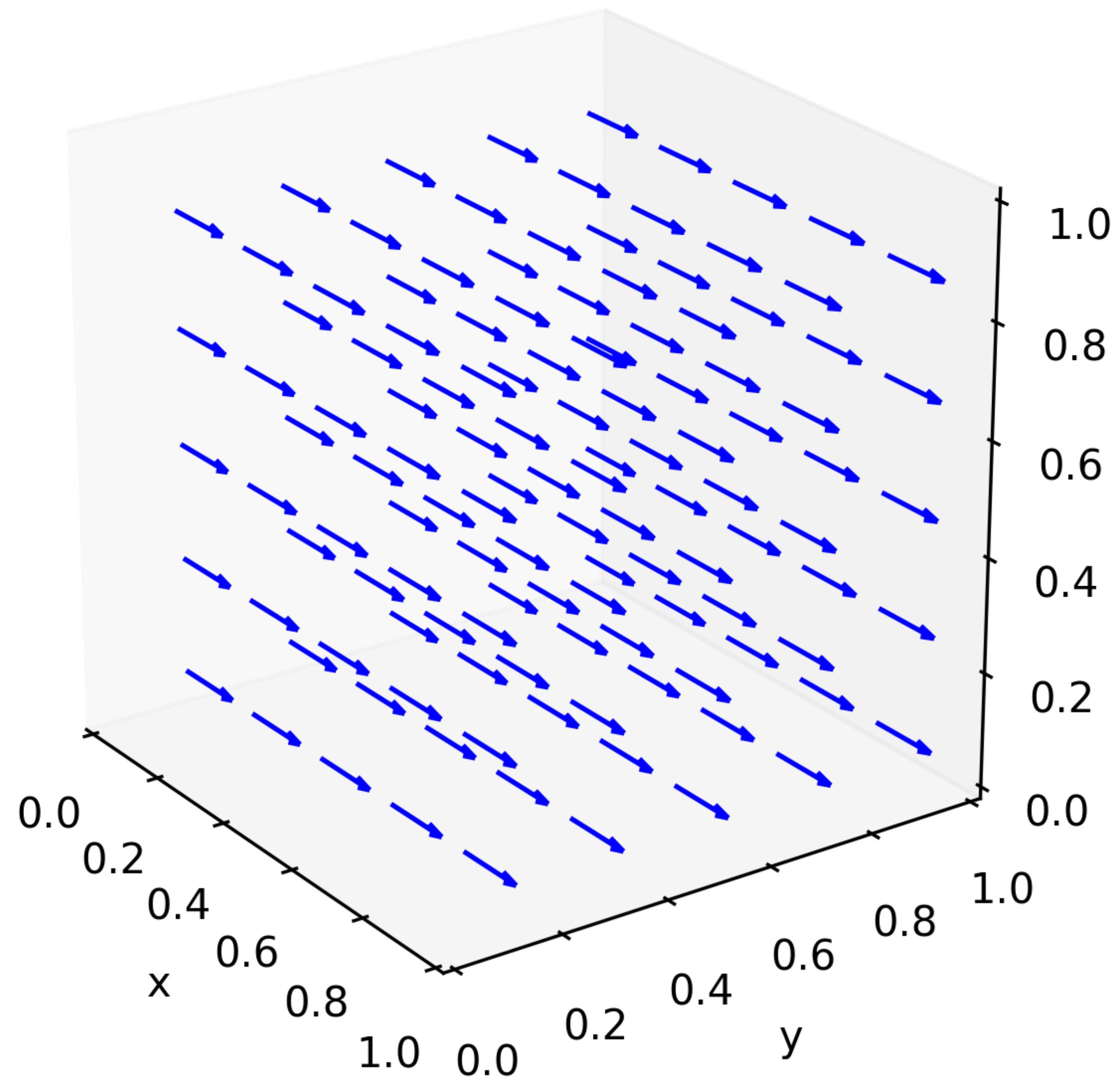
各点 (x, y, z) にベクトルが割り当てられている。



例：$\boldsymbol{A}(x, y, z) = (1, 0, 0)$

各点 (x, y, z) には定ベクトル $(1, 0, 0)$ が

割り当てられている（右下図）。



等位線

2 次元のスカラー場 $\varphi(x, y)$ を考えよう（右上図）。

c を定数とする。

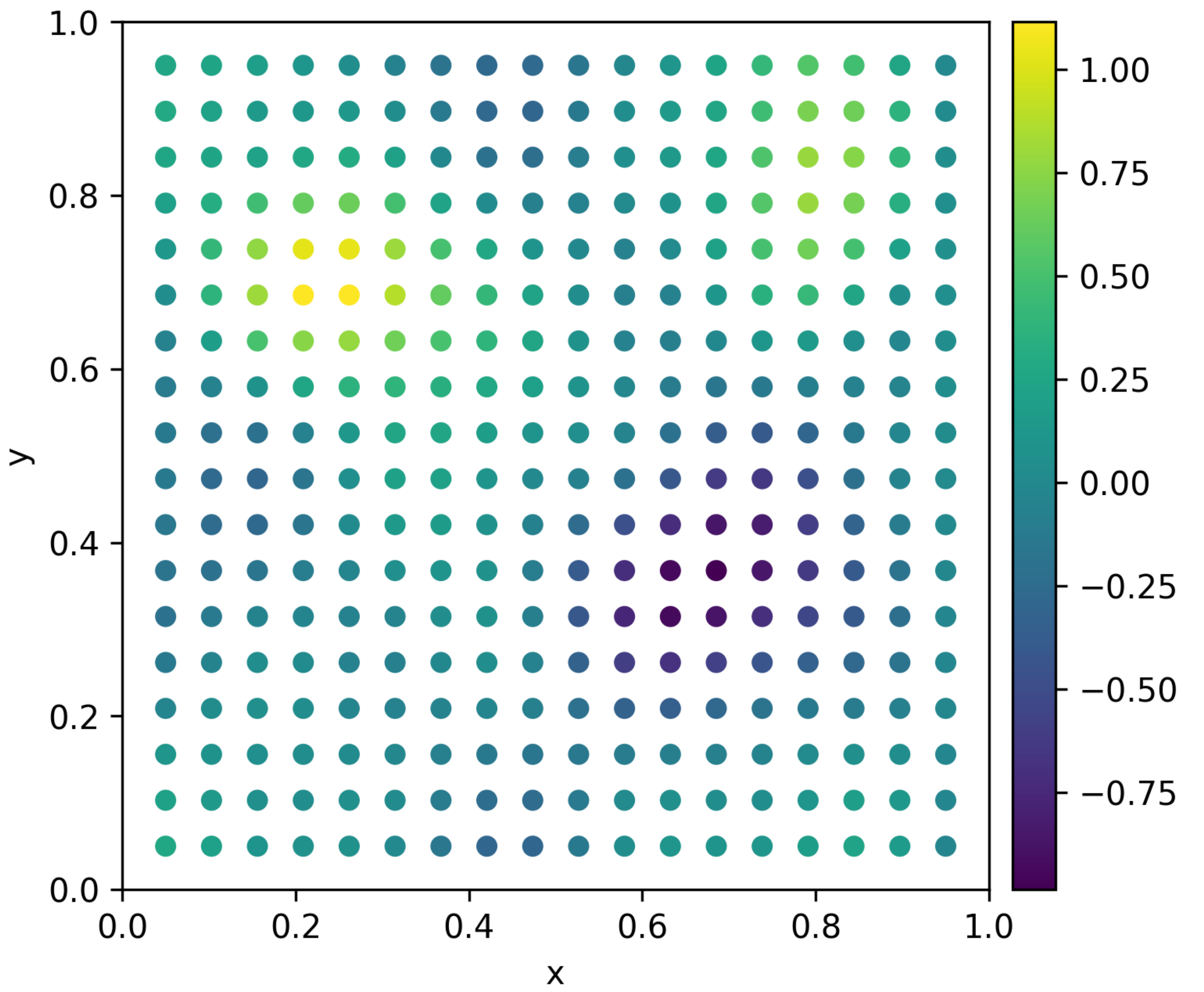
$$\varphi(x, y) = c$$

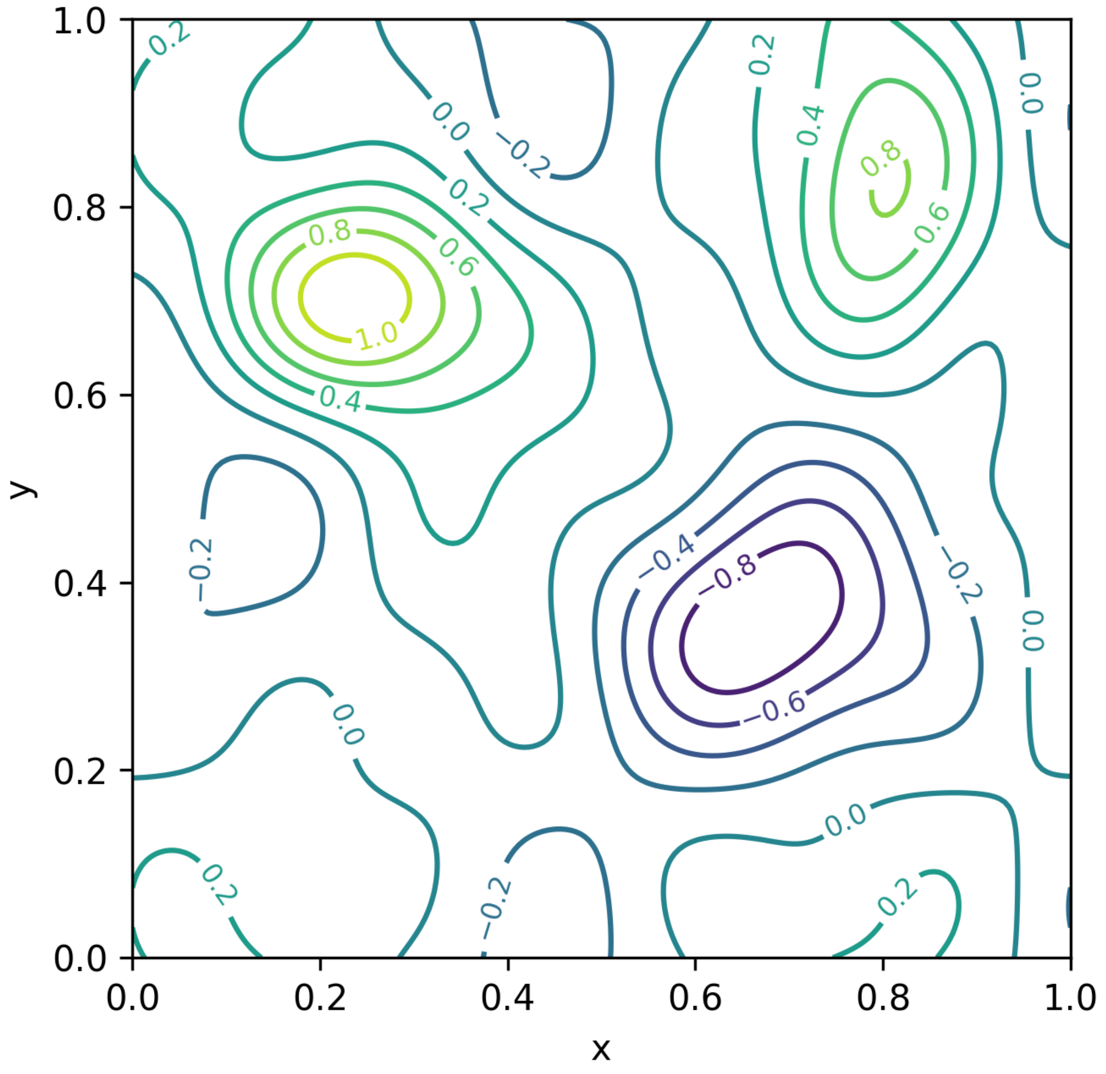
をみたす点の集まりは、一般に曲線をなす。

これを 等位線 という（右下図）。

地図の等高線と同じものである。

地図の場合には、$\varphi(x, y)$ は高さ関数である。





等位面

同様に、3 次元のスカラー場 $\varphi(x,y,z)$ について考える。

c を定数として

$$\varphi(x,y,z) = c$$

を満たす点の集まりは一般に曲面をなす。

これを 等位面 という（右下図）。

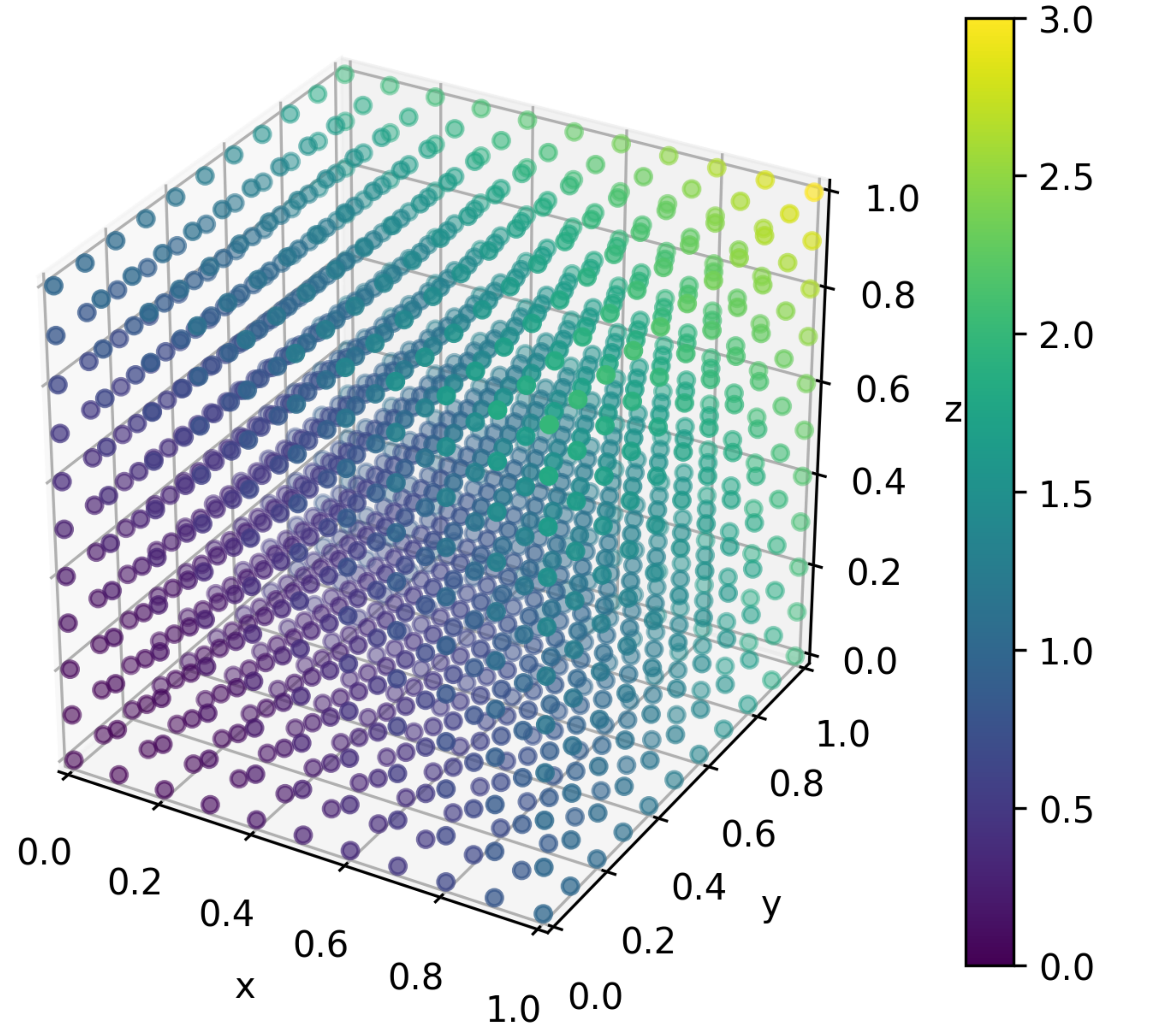
c をいろいろと変化させたときの等位面の集まりを

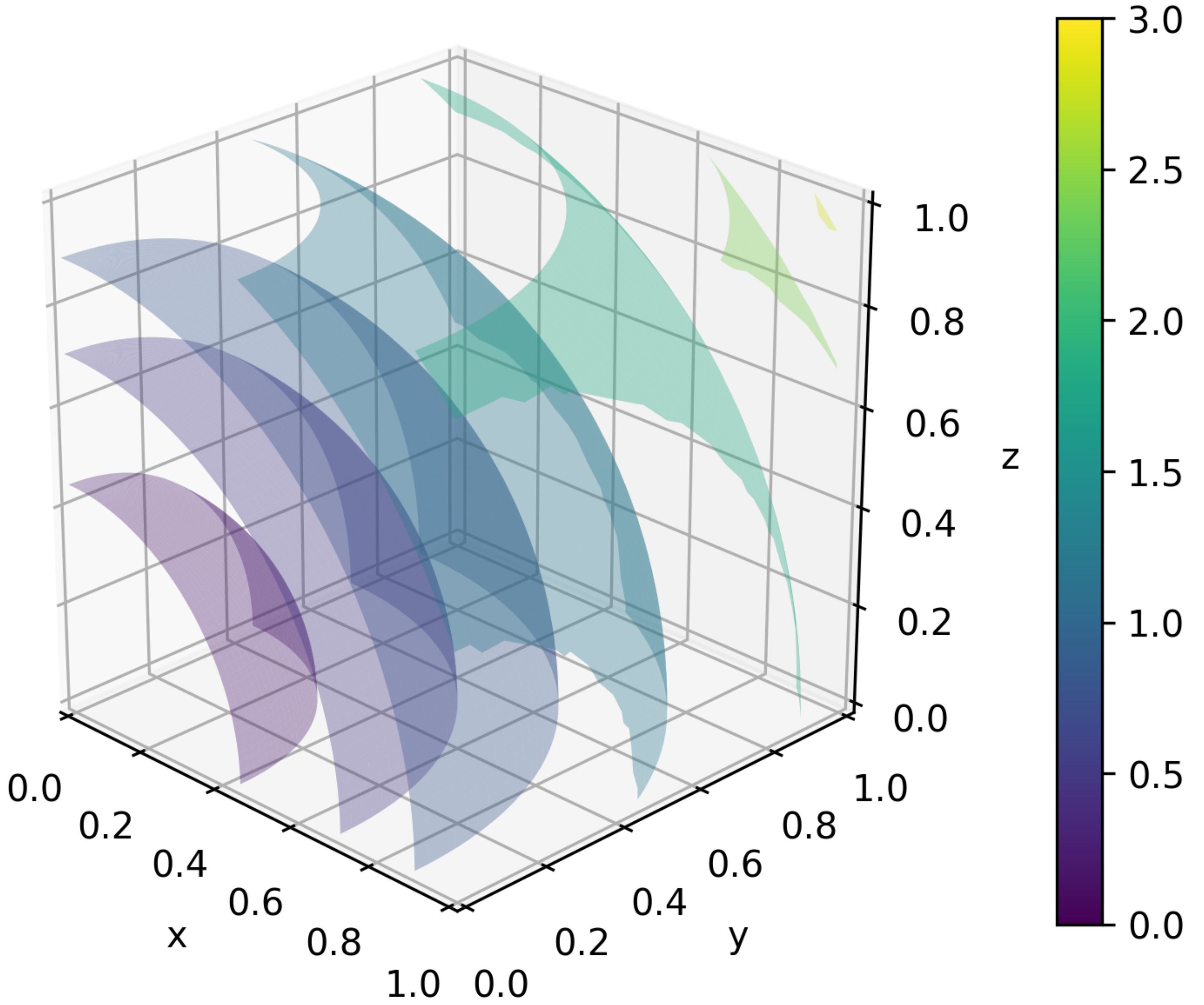
等位面群 という。

$\varphi = x^2 + y^2 + z^2$ なら、等位面 $x^2 + y^2 + z^2 = c$ は、

$c > 0$ のとき原点を中心とする半径 $\sqrt{c}$ の球面である。

$c = 0$ のときは原点 1 点となる。





勾配

3 次元のスカラー場 $\varphi(x, y, z)$ に対し、つぎのベクトル場を考える。

$$\mathrm{grad}\,\varphi(x, y, z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z)\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z)\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z)\,\boldsymbol{k}$$

これをスカラー場 φ の 勾配 または グラジエント（ gradient ）という。

例：$\varphi(x, y, z) = x^2 y + z^3$ なら

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} = 2xy\,\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + 3z^2\boldsymbol{k}$$

偏微分の計算方法について思い出しておこう。

連鎖律

○ 連鎖律 1 （ 2 変数関数 ）

$f = f(x, y)$ は 全微分可能 , $x = x(t)$, $y = y(t)$ は微分可能であるとする。

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

⬇

○ 連鎖律 1 （ 3 変数関数 ）

$f = f(x, y, z)$ は 全微分可能で , $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ は微分可能であるとする。

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

ナブラ

記号的に、つぎのようなベクトルの形をした微分演算子を考える。

ナブラ

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

この記号 ∇ を ナブラ という。

勾配 grad φ はつぎのように書ける。

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi = \nabla\varphi$$

∇ は、スカラー場に作用し、ベクトル場を与える微分演算子である。

以降は grad φ の代わりに $\nabla\varphi$ を用いることもある。

例題（勾配の計算）

$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ とする。

$\nabla \varphi(1, 2, 3)$ および $\left| \nabla \varphi(x, y, z) \right|$ を求めなさい。

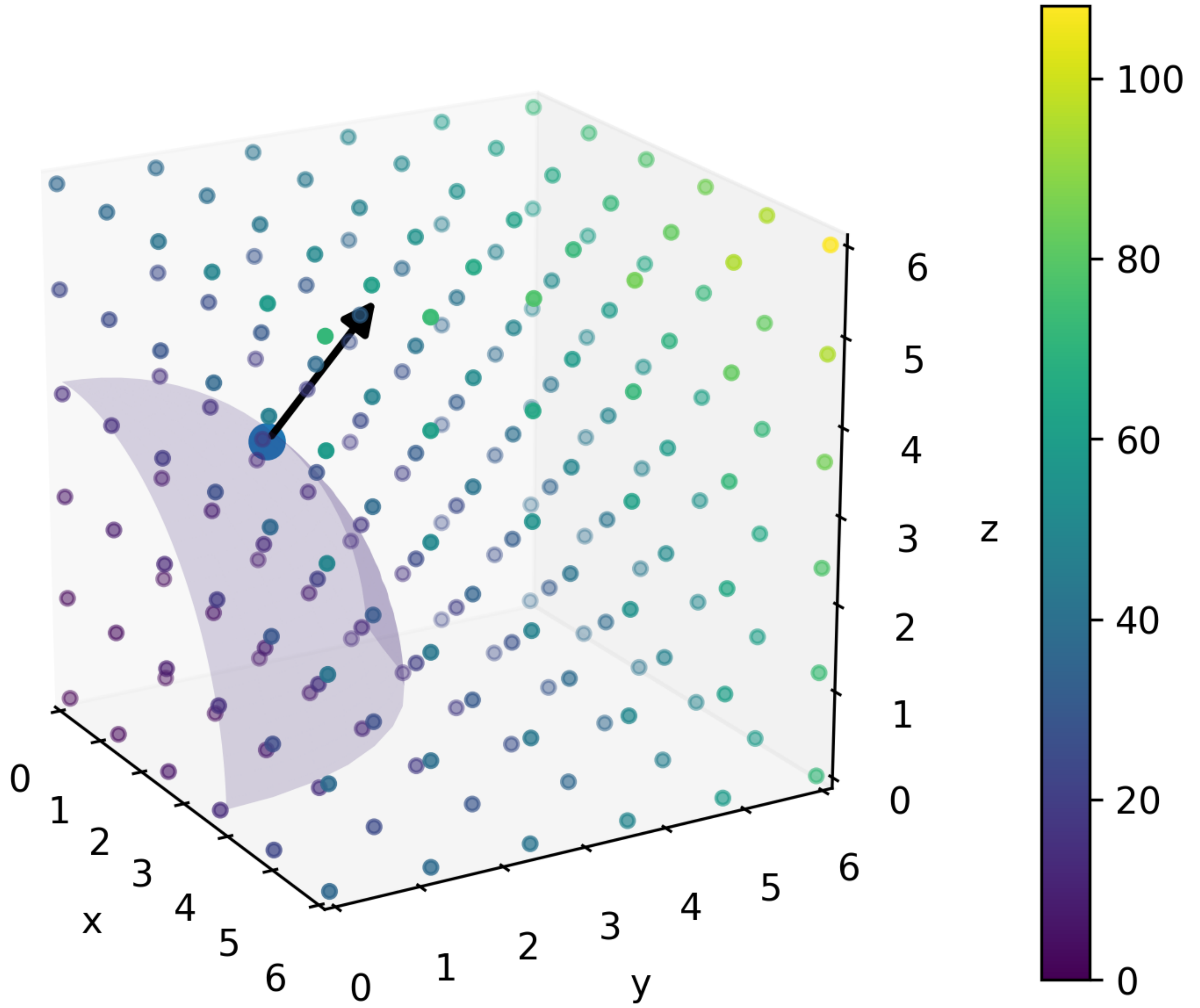
（解答）

$\nabla \varphi(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$ であるので、

$$\nabla \varphi(1, 2, 3) = \underline{(2, 4, 6)}$$

$$\left| \nabla \varphi(x, y, z) \right| = \underline{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

（原点から遠ざかるほど $\left| \nabla \varphi \right|$ が大きくなる。）



勾配が零ベクトルのスカラー場

連結な領域 D のすべての点で $\nabla\varphi = (0,0,0) \iff \varphi(x,y,z)$ は一定

（証明）

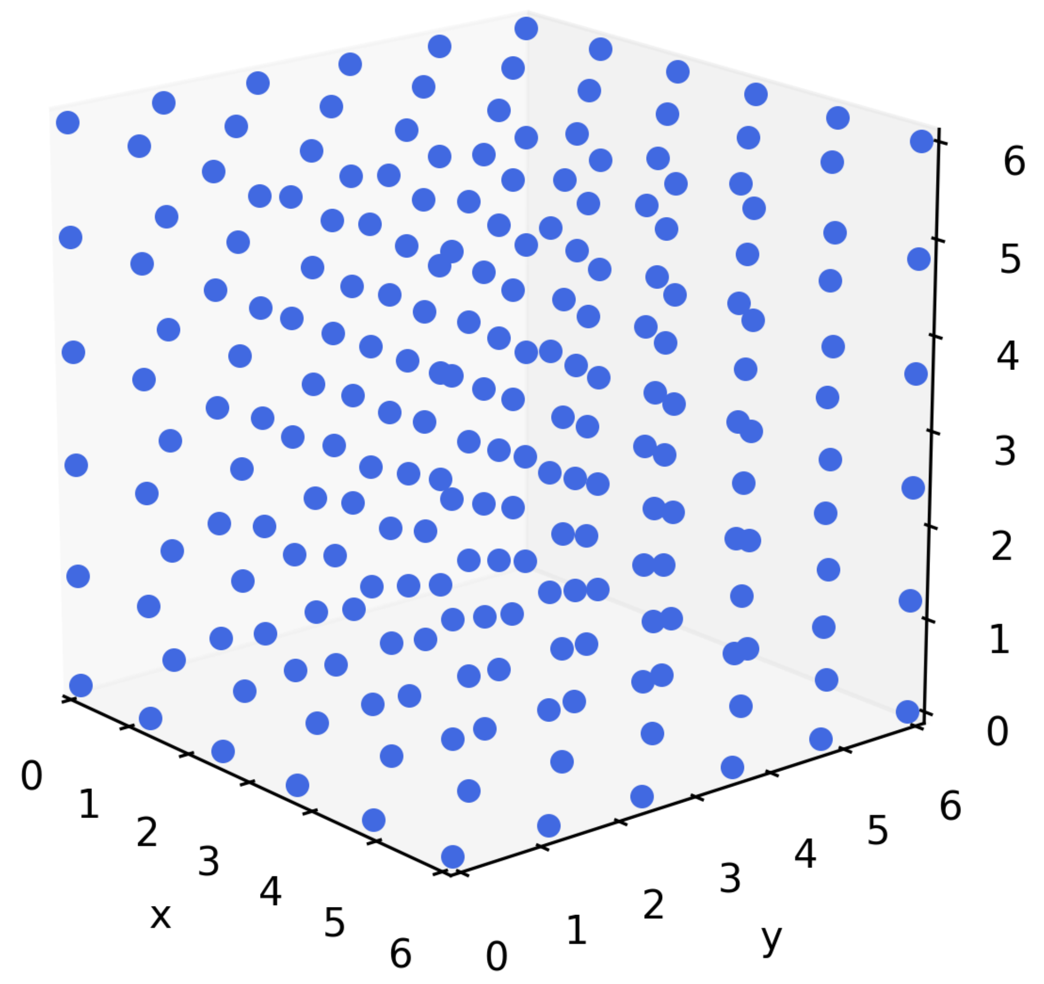
領域 D のすべての点で $\nabla\varphi = (0,0,0)$

$\iff \varphi(x,y,z)$ について $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ が恒等的に成り立つ。

$\iff \varphi(x,y,z)$ は x,y,z のいずれにも依存しない関数

$\iff \varphi(x,y,z) = c$ （c は定数）

$\iff \varphi(x,y,z)$ は一定



直線のパラメータ表示

スカラー場 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ 内に１点 P(x_0, y_0, z_0) をとる。

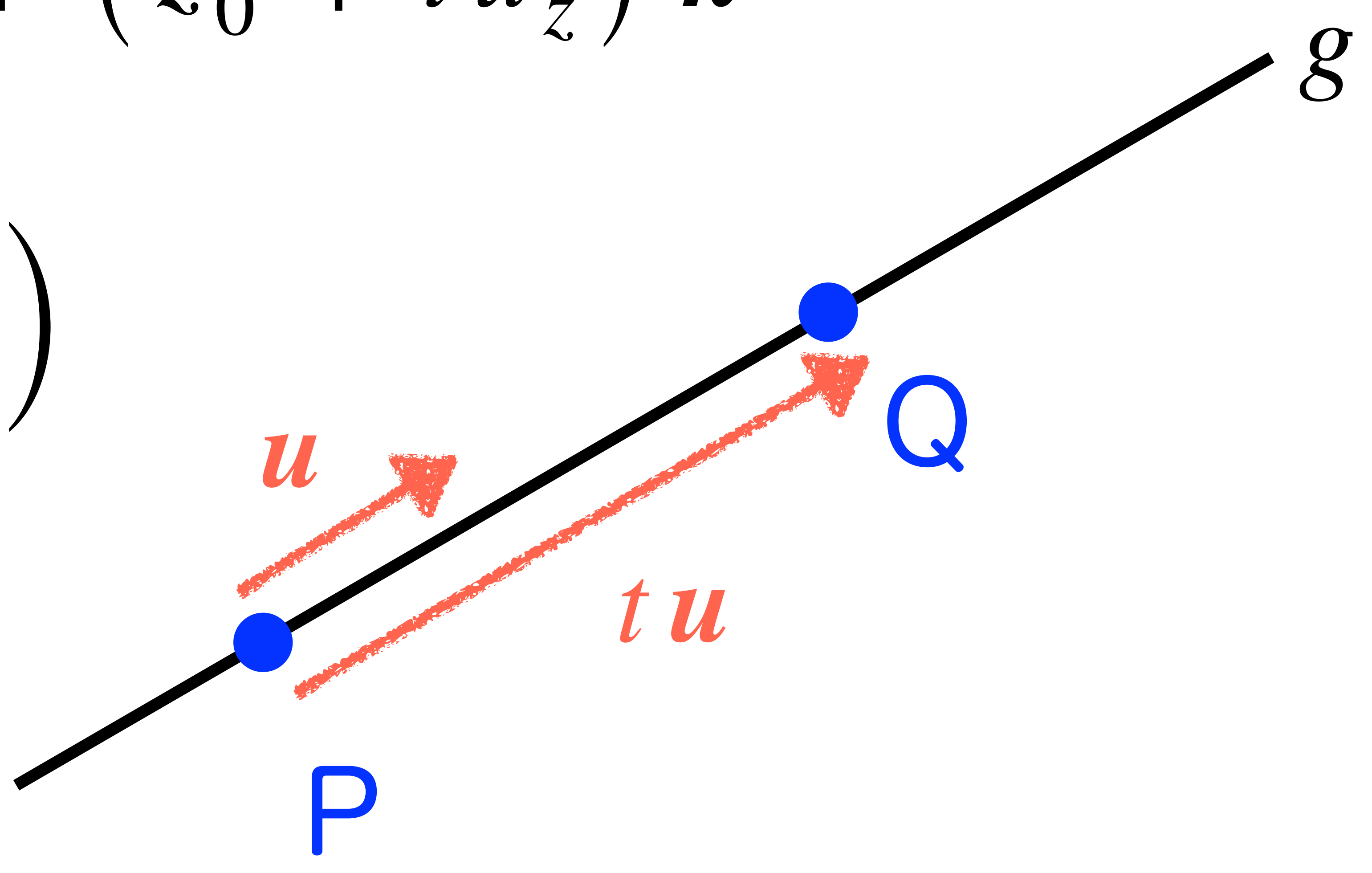
単位ベクトル $\boldsymbol{u} = u_x \boldsymbol{i} + u_y \boldsymbol{j} + u_z \boldsymbol{k}$（ベクトルの大きさが 1 ）を用意し、

P を通り、$\boldsymbol{u}$ に平行な直線を g とする。

直線 g 上の任意の点 Q は、パラメータ t を用いてつぎのように表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\boldsymbol{u} = (x_0 + tu_x)\,\boldsymbol{i} + \left(y_0 + tu_y\right)\boldsymbol{j} + (z_0 + tu_z)\,\boldsymbol{k}$$

$$= \left(x_0 + tu_x,\, y_0 + tu_y,\, z_0 + tu_z\right)$$



u は単位ベクトルなので、パラメータ t は

直線 g 上での符号付き距離とみなせる。

直線上に制限したスカラー場 $\Phi(t)$

スカラー場 $\varphi = \varphi(x, y, z)$ を直線 g 上に制限し、$\boldsymbol{u}$ 方向の変化率を考えたい。

直線 g 上の点は、パラメータ t によって $\left(x_0 + tu_x, y_0 + tu_y, z_0 + tu_z\right)$ と

表されるのであったから、 g 上のスカラー場 φ はパラメータ t を用いて表せる。

$$\Phi(t) = \varphi\left(x_0 + tu_x, y_0 + tu_y, z_0 + tu_z\right)$$

1変数関数 $\Phi(t)$ について、$t = 0$ すなわち点 P における微分係数を求める。

$$\left[\frac{d\Phi(t)}{dt}\right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt}\varphi\left(x_0 + tu_x, y_0 + tu_y, z_0 + tu_z\right)\right]_{t=0} \quad \cdots \quad (*)$$

$x = x(t) = x_0 + tu_x$, $y = y(t) = y_0 + tu_y$, $z = z(t) = z_0 + tu_z$ とおく。

方向微分係数

合成関数の微分（連鎖律）と $\dfrac{dx}{dt} = u_x$, $\dfrac{dy}{dt} = u_y$, $\dfrac{dz}{dt} = u_z$ よりつぎを得る。

$$\frac{d}{dt}\varphi\left(x_0 + tu_x, y_0 + tu_y, z_0 + tu_z\right) = \frac{d}{dt}\varphi(x, y, z)$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = u_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + u_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + u_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdots (**)$$

$t = 0$ のとき、$\left(x, y, z\right) = \left(x_0, y_0, z_0\right)$ であるから、前ページ（＊）については

$$(*) = u_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(x_0, y_0, z_0\right) + u_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(x_0, y_0, z_0\right) + u_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(x_0, y_0, z_0\right)$$

これを、スカラー場 φ の点 P における $\boldsymbol{u}$ 方向の 方向微分係数 という。

方向微分と勾配

前ページ（＊＊）をつぎの左辺の記号で表す。

$$\frac{d\varphi}{du} = u_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + u_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \boldsymbol{u} \cdot \nabla \varphi$$

φ の $\boldsymbol{u}$ 方向への変化率（＝方向微分）は、$\boldsymbol{u}$ と勾配との内積により求まる。

ここで、$\boldsymbol{u}$ は単位ベクトルであった（これを 単位方向ベクトル ともいう。）。

$\dfrac{d}{du}$ は、$\boldsymbol{u}$ 方向の方向微分を表す慣習記号である。すなわちつぎのとおり。

$$\frac{d\varphi}{du}(\mathrm{P}) = \left[\frac{d\varphi}{dt}(\mathrm{P} + t\boldsymbol{u})\right]_{t=0} = \left[\frac{d}{dt}\varphi\left(x_0 + tu_x, y_0 + tu_y, z_0 + tu_z\right)\right]_{t=0}$$

等位面と勾配

等位面 $\varphi(x,y,z) = c$ 上の点 P をとる。

点 P がこの等位面上を動くとき、$\varphi(x,y,z)$ の値は変化しない。

すなわち、$\boldsymbol{u}$ が等位面に接する単位ベクトルであるとき $\dfrac{d\varphi}{du} = 0$ となる。

$$\frac{d\varphi}{du}(\mathrm{P}) = \boldsymbol{u} \cdot \nabla\varphi(\mathrm{P}) = 0$$

であるから、$\nabla\varphi(\mathrm{P})$ は $\nabla\varphi(\mathrm{P}) \neq \mathbf{0}$ のとき、等位面の接ベクトル $\boldsymbol{u}$ に直交する。

$\boldsymbol{u}$ は任意の接ベクトルであるので、$\nabla\varphi(\mathrm{P})$ は等位面 $\varphi(x,y,z) = c$ に直交する。

勾配 $\nabla\varphi(\mathrm{P})$ は $\mathbf{0}$ でないとき、等位面の法線ベクトルである。

勾配の大きさ

$\nabla\varphi(\mathrm{P}) \neq \mathbf{0}$ のとき、$\nabla\varphi(\mathrm{P})$ と単位方向ベクトル $\boldsymbol{u}$ とのなす角を θ とおくと $|\boldsymbol{u}| = 1$ であることよりつぎを得る。

$$\frac{d\varphi}{du}(\mathrm{P}) = \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi(\mathrm{P}) = |\boldsymbol{u}|\left|\nabla\varphi(\mathrm{P})\right|\cos\theta = \left|\nabla\varphi(\mathrm{P})\right|\cos\theta$$

点 P を通る等位面に垂直な単位ベクトルを 法単位ベクトル とよぶ。

いま、2方向ある法単位ベクトルのうち φ が増大する向きを $\boldsymbol{n}$ とすると、

このとき $\theta = 0$ であるから

$$\frac{d\varphi}{dn}(\mathrm{P}) = \left|\nabla\varphi(\mathrm{P})\right|$$

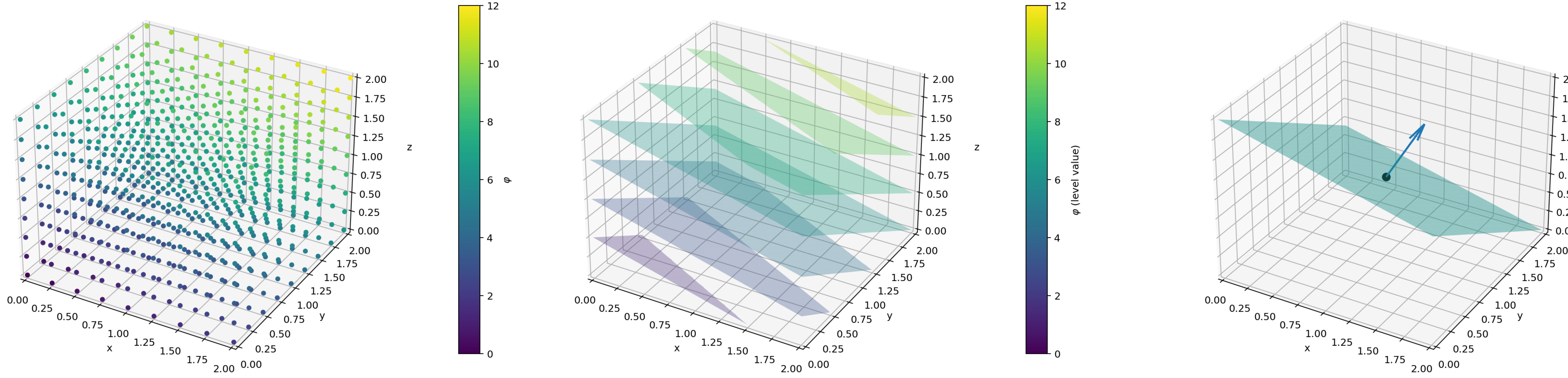
すなわち勾配の大きさは、等位面に垂直で φ が増大する向きへの増加率を表す。

一次関数のスカラー場の例

$\varphi(x, y, z) = x + 2y + 3z$ とする。

勾配は $\nabla\varphi = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = (1, 2, 3)$（定ベクトル）

方向微分は $\dfrac{d\varphi}{du} = \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi = \boldsymbol{u}\cdot(1, 2, 3)$ となり、座標 (x, y, z) によらない。



点 $(1, 1, 1)$ は等位面 $\varphi(x, y, z) = 6$ 上にあり、法線ベクトルは $\nabla\varphi = (1, 2, 3)$ 。

等位面が球面となる例

$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ とする。

勾配は $\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 2z)$ であった（16ページ例題）。

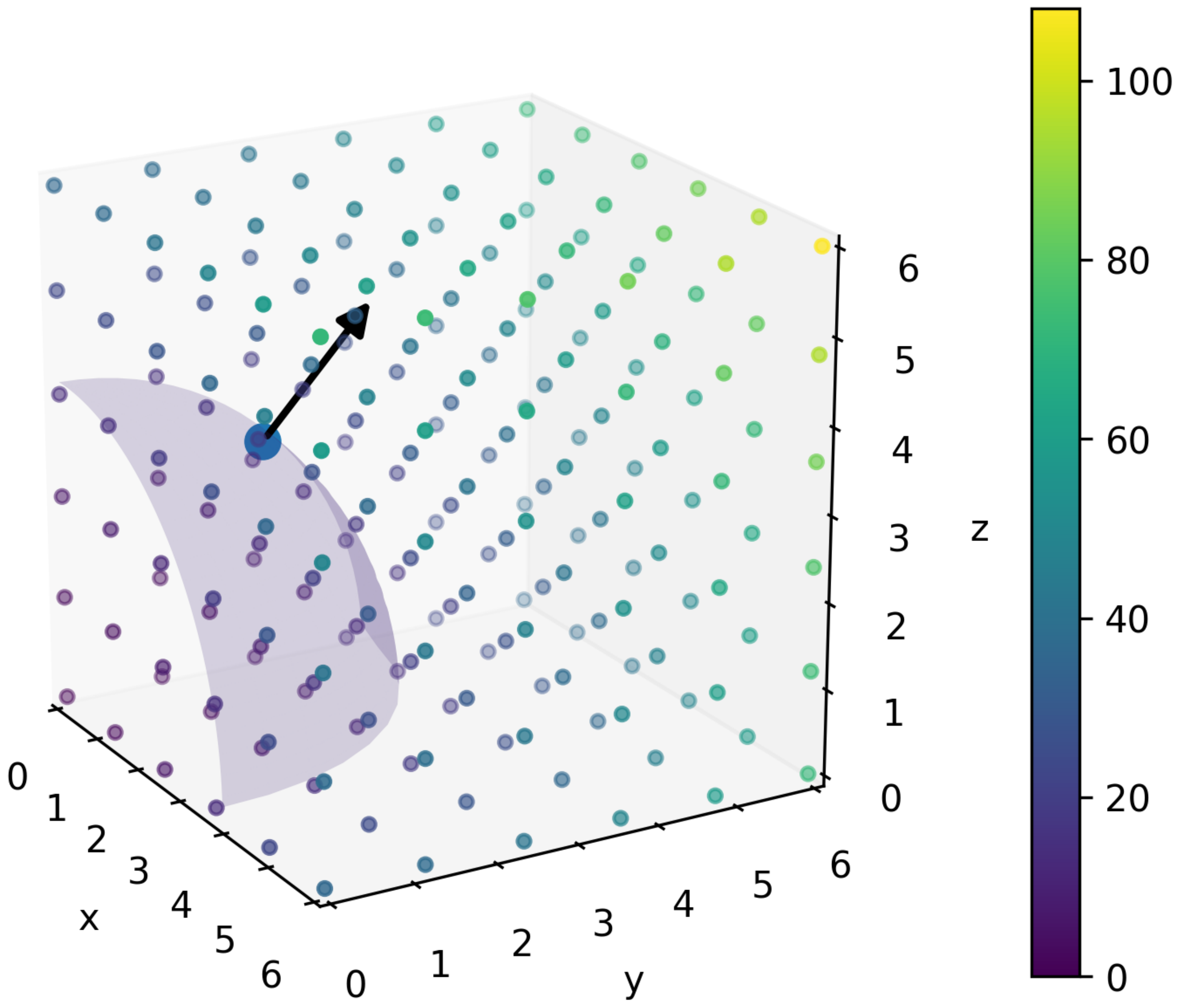
等位面 $x^2 + y^2 + z^2 = c$ （$c > 0$）は原点を中心とする半径 $\sqrt{c}$ の球面。

点 $(1, 2, 3)$ は等位面 $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ 上にあり、

等位面の法線ベクトルは $\nabla\varphi(1, 2, 3) = (2, 4, 6)$ 。

$\left|\nabla\varphi(x, y, z)\right| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ は

原点から遠ざかるほど大きくなる。



例題（方向微分係数の計算）

$\varphi(x, y, z) = xy + z^2$ とする。

（1）$\nabla\varphi$ を求めなさい。

（2）点 P $(1, 2, 2)$ における $\nabla\varphi(\mathrm{P})$ を求めなさい。

（3）ベクトル $\boldsymbol{v} = (2, -1, 2)$ の単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ を求めなさい。

（4）φ の P における $\boldsymbol{u}$ 方向の方向微分係数 $\dfrac{d\varphi}{du}(\mathrm{P})$ を求めなさい。

例題の解答

（1） $\nabla\varphi = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \underline{(y, x, 2z)}$

（2） $\nabla\varphi(\mathrm{P}) = \nabla\varphi(1,2,2) = \underline{(2,1,4)}$

（3） $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$ より

$$\boldsymbol{u} = \underline{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}$$

（4） $\dfrac{d\varphi}{du}(\mathrm{P}) = \boldsymbol{u}\cdot\nabla\varphi(\mathrm{P})$

$= \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right)\cdot(2,1,4) = \underline{\dfrac{11}{3}}$ （Ｐの近くで $\boldsymbol{u}$ 方向に進むと φ の値は上がる。）