ベクトル解析

３回目講義

畠中　英里

本日の講義の流れ

○ 前回の復習

○ 本日の講義内容

・ベクトル関数

・ベクトル関数の微分

・微分の公式

・ベクトル関数の積分

・積分の公式

前回の復習（1）

ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の 外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ は、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の成分によって定義された。

$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{i} + B_y \boldsymbol{j} + B_z \boldsymbol{k}$ とするとき、

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right) \boldsymbol{i} - \left(A_x B_z - A_z B_x\right) \boldsymbol{j} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right) \boldsymbol{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

外積の性質：$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, 分配法則 , スカラー倍

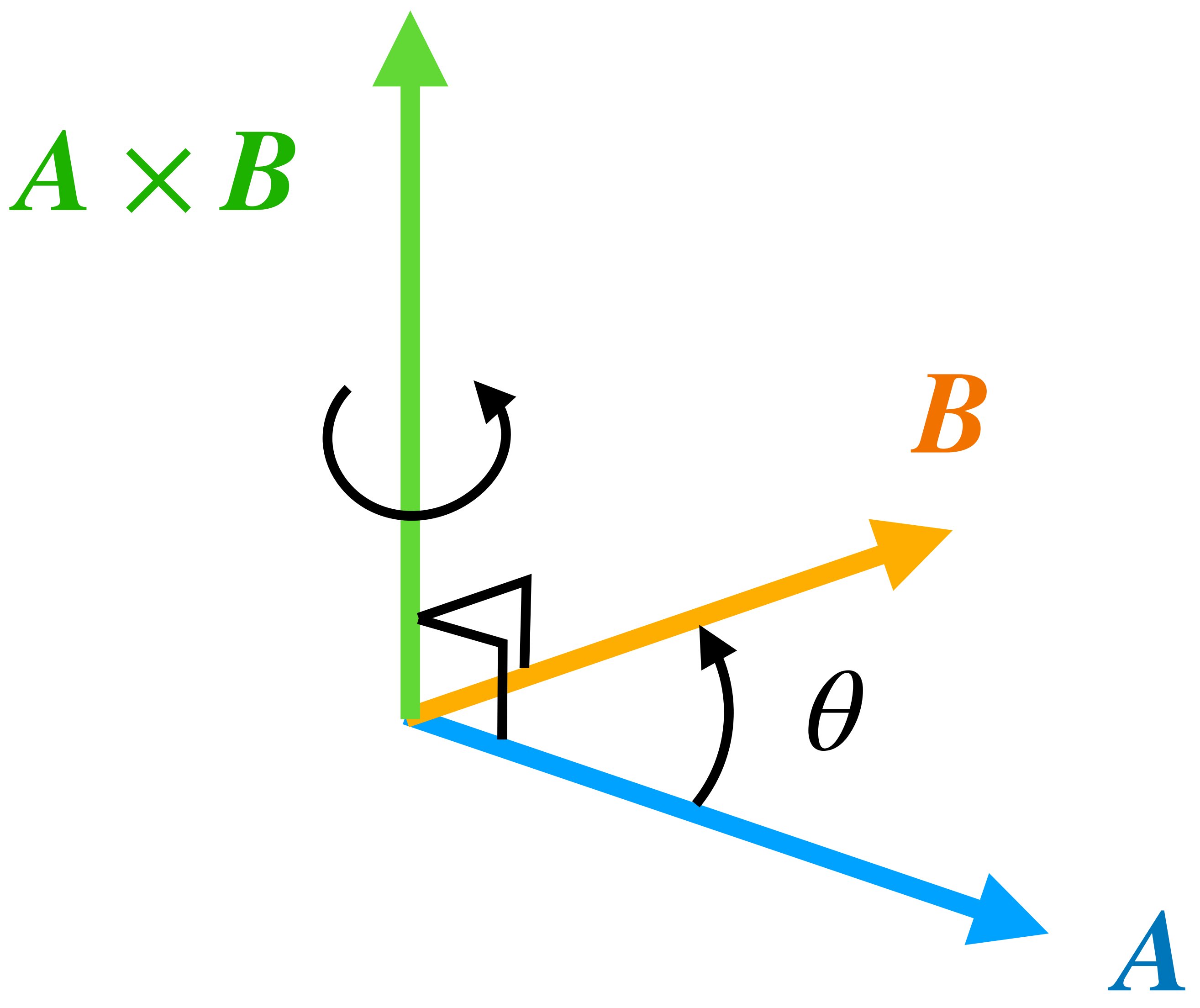
結合法則は一般には成り立たないことに注意：$\left(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\right) \times \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{A} \times \left(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}\right)$

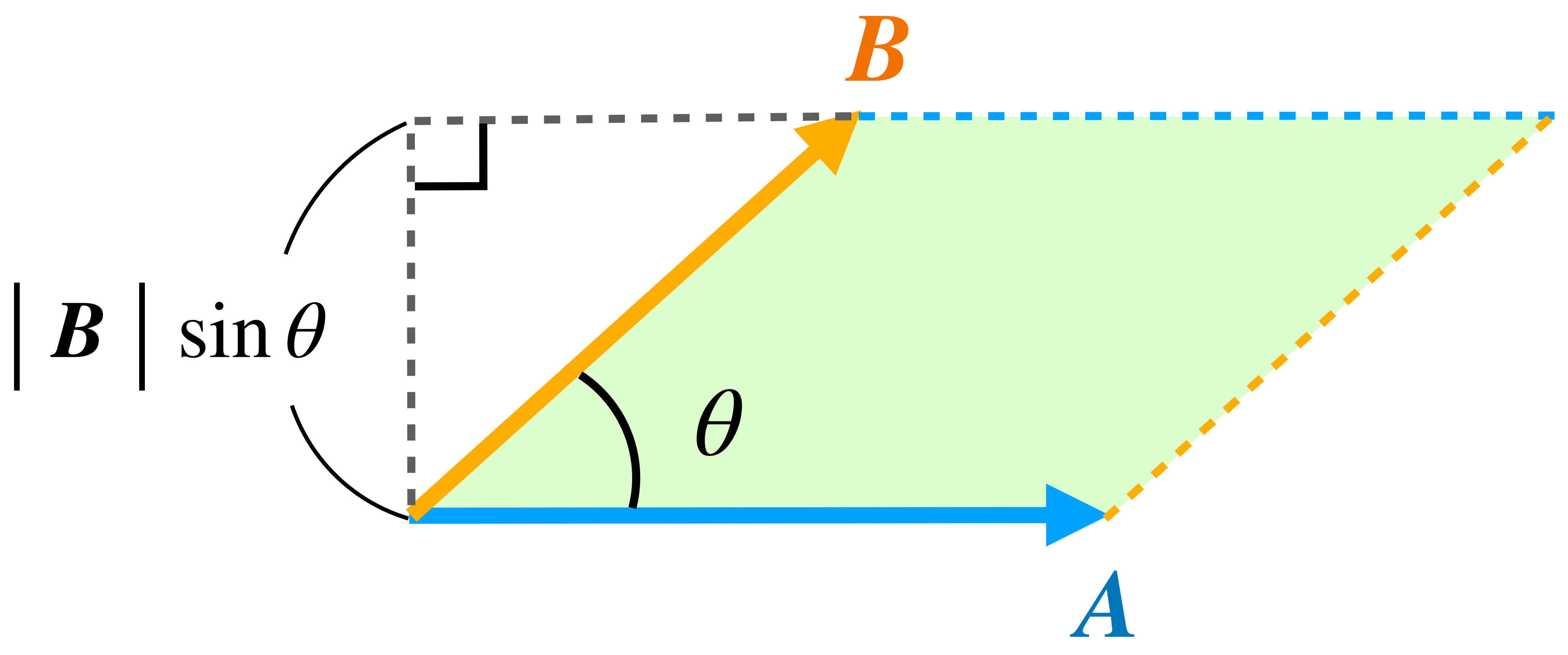
前回の復習（2）

○ 外積の幾何学的意味

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ は、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ に垂直で右手系に従う向きのベクトルであり、

その大きさは $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ で張られる平行四辺形の面積に等しい。





$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|\sin\theta \quad (0 < \theta < \pi)$$

前回の復習（3）

ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ に対し、$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ を スカラー三重積 という（実数値）。

スカラー三重積の絶対値 $\left|\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}|\,|\cos\theta|$ は

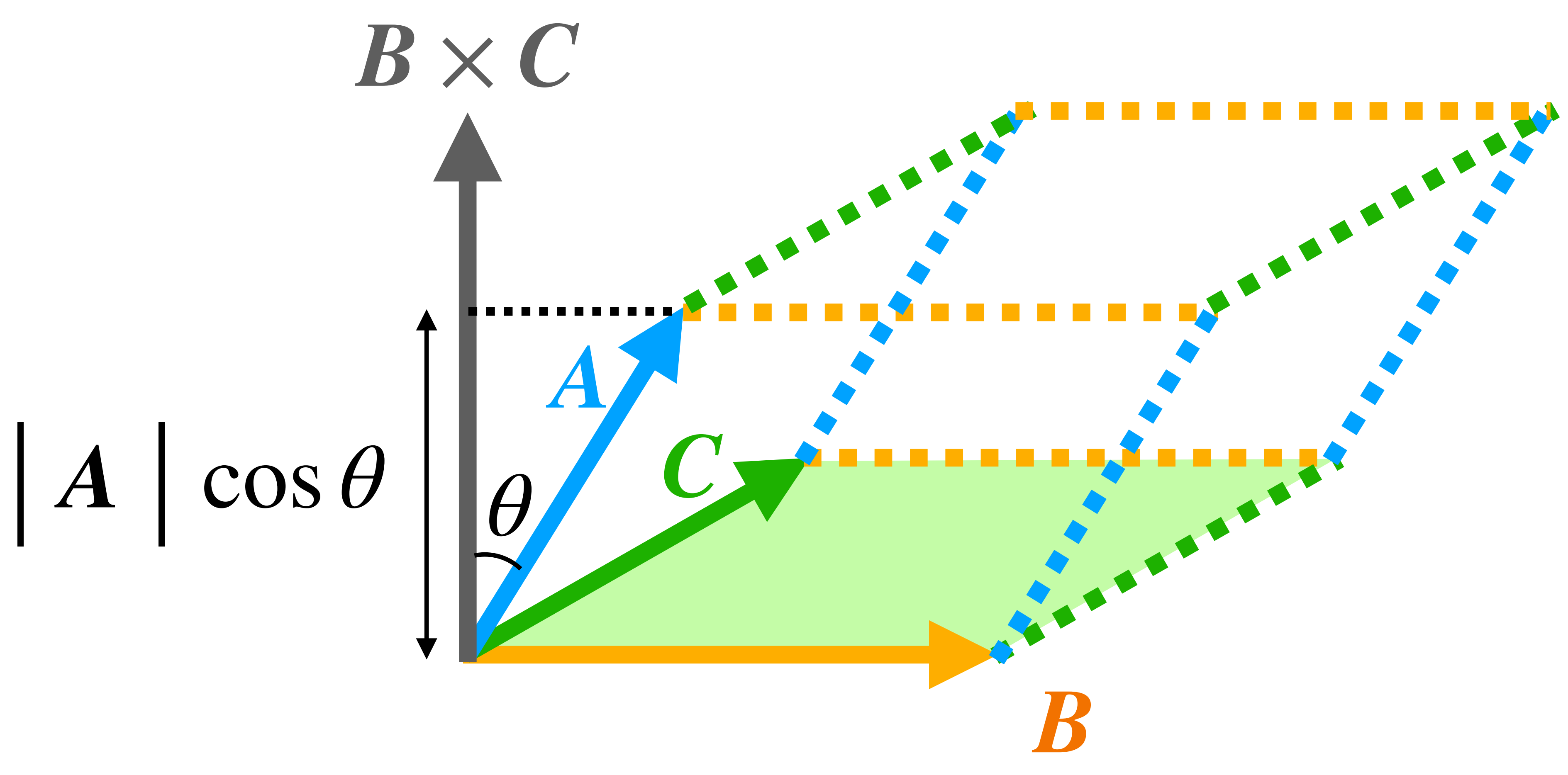
$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ を３辺とする平行六面体の体積に等しい（ θ は右図の角 ）。

$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ が右手系 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) > 0$

$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$ が左手系 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) < 0$

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ が一次従属 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = 0$

(いずれかのベクトルが $\boldsymbol{0}$ である場合も含む)



前回の復習（4）

○ スカラー三重積の性質：

$$\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right)=\boldsymbol{B}\cdot\left(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{C}\cdot\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)$$
$$=-\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}\right)=-\boldsymbol{B}\cdot\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}\right)=-\boldsymbol{C}\cdot\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}\right)$$

ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ に対し、$\boldsymbol{A}\times\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right)$ を ベクトル三重積 という。

○ ベクトル三重積の性質：

$$\boldsymbol{A}\times\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right)=\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{B}-\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{A}\times\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right)+\boldsymbol{B}\times\left(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}\right)+\boldsymbol{C}\times\left(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{0}$$

本日の講義

ベクトルの微分と積分

ベクトル関数

変数 t の各値に対してベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ が対応するとき、

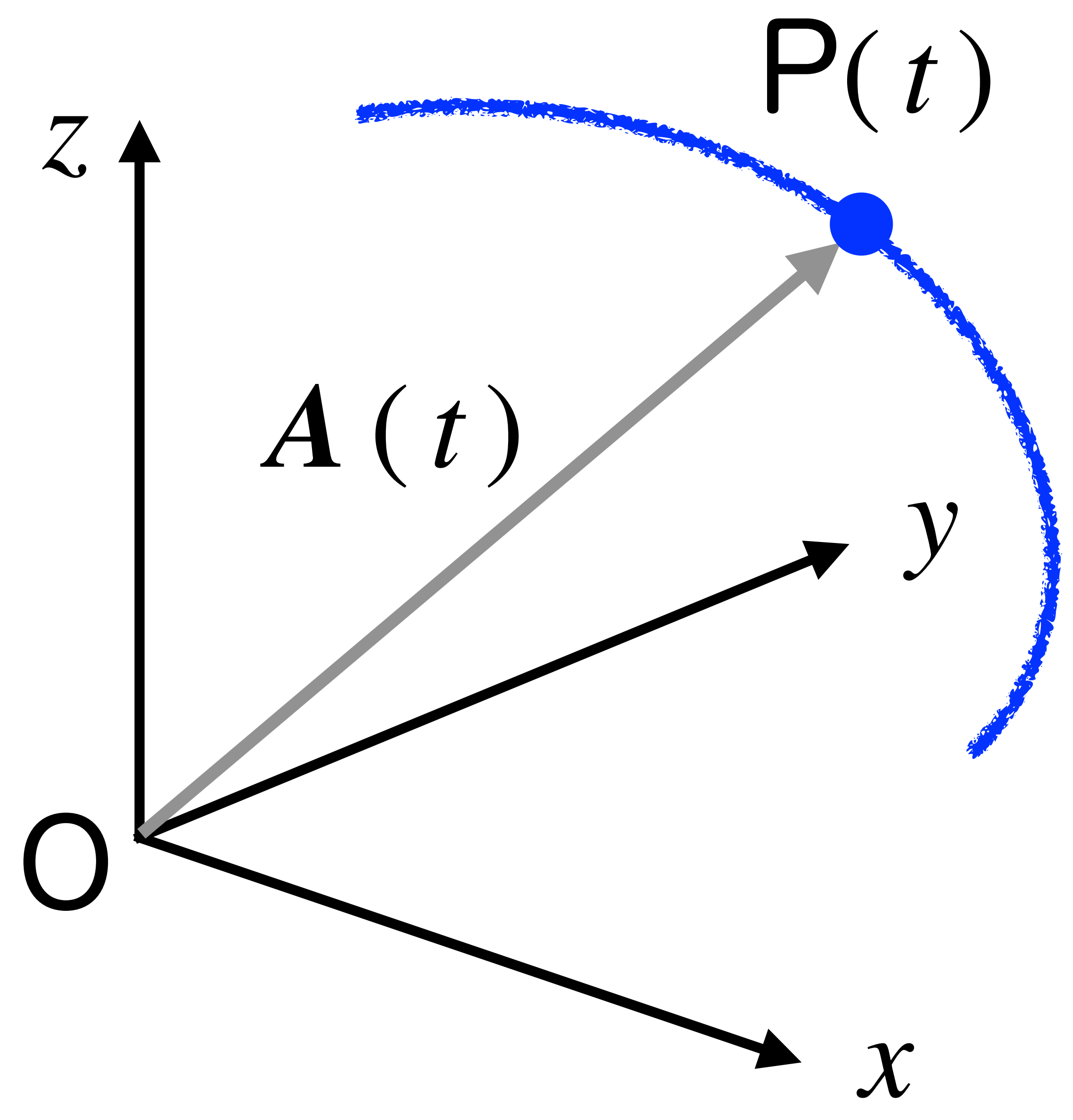
$\boldsymbol{A}(t)$ を ベクトル関数 という。

原点 O を始点としてベクトル $\boldsymbol{A}(t)$ を描いたとき、

$$\boldsymbol{A}(t) = \overrightarrow{\mathrm{OP}(t)}$$

とすると、点 P(t) は一般に空間内の曲線を描く。

この曲線を ホドグラフ（終点が描く曲線）という。



ベクトル関数の連続性

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ の成分表示がつぎのように表されているとする。

$$\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\,\boldsymbol{i} + A_y(t)\,\boldsymbol{j} + A_z(t)\,\boldsymbol{k}$$

このとき、各 $A_x(t)$, $A_y(t)$, $A_z(t)$ は t の実数値関数である。

$A_x(t)$, $A_y(t)$, $A_z(t)$ が t の関数としてすべて連続なとき、

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\,\boldsymbol{i} + A_y(t)\,\boldsymbol{j} + A_z(t)\,\boldsymbol{k}$ は 連続 であるという。

復習：関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で連続であるとは、つぎが成り立つときをいう。

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

定義域の各点で連続な関数を、連続関数というのであった。

ベクトル関数の微分

ある区間 I における t の増分 Δt にともなう $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t)$ の増分は

$$\Delta \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(t + \Delta t) - \boldsymbol{A}(t)$$

である。

つぎの極限が存在するとき、これを t における $\boldsymbol{A}(t)$ の 微分係数 という。

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t + \Delta t) - \boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}$$

微分係数は $\boldsymbol{A}'(t)$ とも表される。微分係数はベクトルであることに注意。

区間 I の各 t において微分係数が存在するとき、$\boldsymbol{A}(t)$ は I で 微分可能 という。

微分係数によって定まる関数 $\boldsymbol{A}'(t)$ を $\boldsymbol{A}(t)$ の 導関数 という。

微分の成分表示

ベクトル関数が成分表示されれば、その微分係数、導関数も成分表示される。

$$\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\,\boldsymbol{i} + A_y(t)\,\boldsymbol{j} + A_z(t)\,\boldsymbol{k}$$

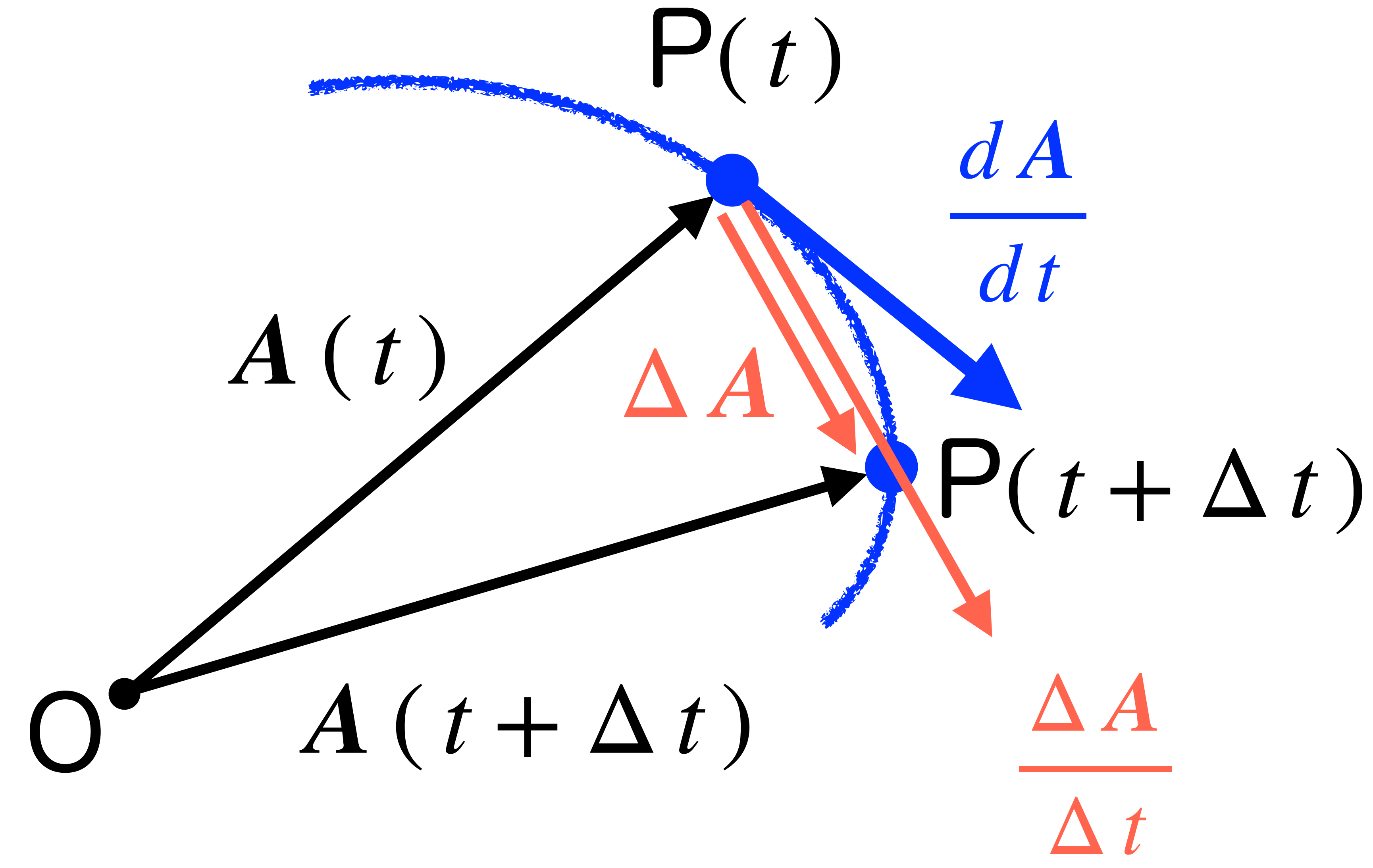
ならば

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} = \boldsymbol{A}'(t) = A'_x(t)\,\boldsymbol{i} + A'_y(t)\,\boldsymbol{j} + A'_z(t)\,\boldsymbol{k}$$

ベクトル関数の微分は成分ごとに行えばよい。

また、$\boldsymbol{A}(t)$ が微分可能であれば、

導関数 $\boldsymbol{A}'(t)$ はホドグラフの接ベクトルである。



微分の公式

$\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$ ： 微分可能なベクトル関数

$f(t)$ ： 微分可能なスカラー関数（ 実数値関数 ）

とするとき、つぎの ① 〜 ④ が成り立つ。
（ 各等式の左辺は微分可能で、導関数は右辺で表せる、という意味。 ）

① $\left(\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t)\right)'=\boldsymbol{A}'(t)+\boldsymbol{B}'(t)$

② $\left(f(t)\boldsymbol{A}(t)\right)'=f(t)'\boldsymbol{A}(t)+f(t)\boldsymbol{A}'(t)$

③ $\left(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)\right)'=\boldsymbol{A}'(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}'(t)$

④ $\left(\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t)\right)'=\boldsymbol{A}'(t)\times\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}'(t)$

微分の公式 ③ の証明

③ $\left(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)\right)' = \boldsymbol{A}'(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}'(t)$ の証明

t の増分 Δt にともなう $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$ の増分を $\Delta\boldsymbol{A}$, $\Delta\boldsymbol{B}$ とする。

左辺の内積 $\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)$ の変化の割合について考えると

$$\frac{\left(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}\right)\cdot(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{\Delta t} = \frac{\Delta\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})+\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{B}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}\cdot(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})+\boldsymbol{A}\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{B}}{\Delta t} \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} = \text{（右辺）} \blacksquare$$

（注１）Δt はスカラーであった。

（注２）$\boldsymbol{B}(t)$ は微分可能なので連続、よって $\Delta t\to 0$ のとき $\Delta\boldsymbol{B}(t)\to\boldsymbol{0}$ 。

微分の公式から導かれる性質

③ $\left(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)\right)' = \boldsymbol{A}'(t)\cdot\boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}'(t)$

において $\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{A}(t)$ とおくことにより、つぎを得る。

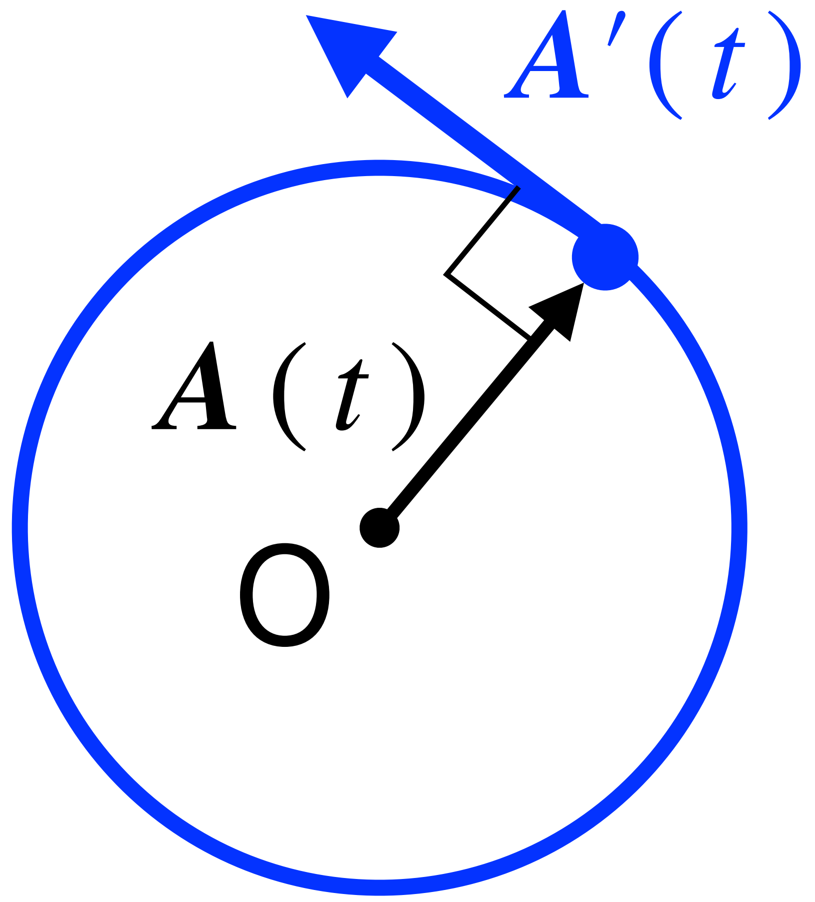
$$\left(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{A}(t)\right)' = \boldsymbol{A}'(t)\cdot\boldsymbol{A}(t) + \boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{A}'(t) = 2\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{A}'(t)$$

内積の性質より $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|^2$ であったから、つぎの等式となる。

$$\left\{|\boldsymbol{A}(t)|^2\right\}' = 2\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{A}'(t)$$

とくに、つぎが成り立つ。

$$|\boldsymbol{A}(t)| \text{ が一定} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{A}'(t) = 0$$



$|\boldsymbol{A}(t)|$ が一定 $\Leftrightarrow$ 端点は

原点を中心とした球面上を動く

例題

$\boldsymbol{A}(t) = \cos t\, \boldsymbol{i} + \sin t\, \boldsymbol{j} = \left(\cos t,\ \sin t, 0\right)$ とする。

（1） $\left|\boldsymbol{A}(t)\right|$ を求めなさい。

（2）内積 $\boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{A}'(t)$ の値を求めなさい。

（解答）

（1） $\left|\boldsymbol{A}(t)\right| = \sqrt{\boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{A}(t)} = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{1} = \underline{1}$ （ $\left|\boldsymbol{A}(t)\right|$ が一定）

（2） $\boldsymbol{A}'(t) = -\sin t\, \boldsymbol{i} + \cos t\, \boldsymbol{j}$ より $\boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{A}'(t) = \cos t \cdot \left(-\sin t\right) + \sin t \cdot \cos t = \underline{0}$

$\left|\boldsymbol{A}(t)\right|$ が一定 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{A}'(t) = 0$ が確かめられた。

n 回微分

ベクトル関数の n 次導関数（ $n \geq 2$ ）もスカラー関数のときと同様に定め、同様の記号を用いて表すことにする。

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}\ ,\ \frac{d^2\boldsymbol{A}(t)}{dt^2}\ ,\ \cdots\ ,\ \frac{d^n\boldsymbol{A}(t)}{dt^n}\ ,\ \cdots$$

あるいは

$$\boldsymbol{A}'(t)\ ,\ \boldsymbol{A}''(t)\ ,\ \cdots\ ,\ \boldsymbol{A}^{(n)}(t)\ ,\ \cdots$$

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ が n 回微分可能であれば、つぎが成り立つ。

$$\frac{d^n\boldsymbol{A}(t)}{dt^n} = \boldsymbol{A}^{(n)}(t) = A_x^{(n)}(t)\,\boldsymbol{i} + A_y^{(n)}(t)\,\boldsymbol{j} + A_z^{(n)}(t)\,\boldsymbol{k}$$

物理的な用語

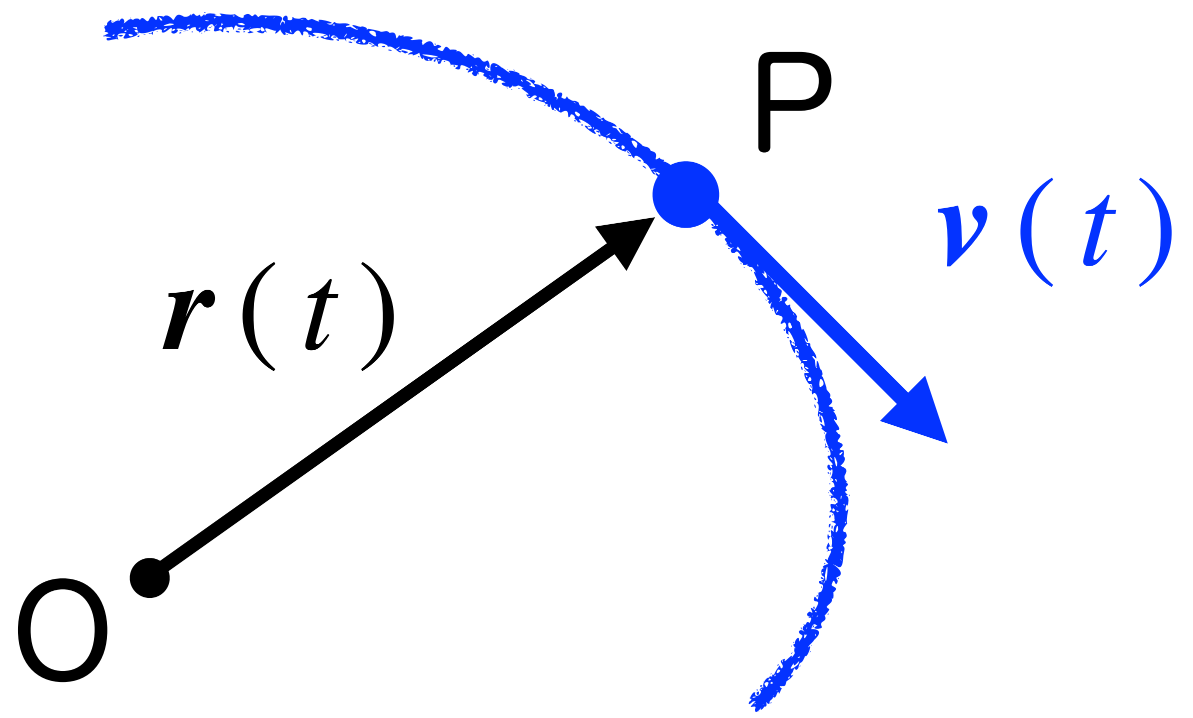
xyz 座標空間内の１点 P が、ベクトル $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ によって表されるとする。

このとき、$\boldsymbol{r}$ のことを点 P の 位置ベクトル という。

点 P が時間 t の経過とともに空間内を動くとき、
位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ は点 P の位置を表す。

P の 速度ベクトル を $\boldsymbol{v}(t)$, 加速度ベクトル を $\boldsymbol{a}(t)$ とすると、つぎが成り立つ。

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \ , \quad \boldsymbol{a}(t) = \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}$$



速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ は、点 P で軌道に接している。

ベクトル関数の積分

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ が、ベクトル関数 $\boldsymbol{D}(t)$ の導関数であるとき、

$\boldsymbol{D}(t)$ は $\boldsymbol{A}(t)$ の 不定積分 であるという。

$$\boldsymbol{D}(t) = \int \boldsymbol{A}(t)\,dt$$

と表す。ひとつのベクトル関数に対し、不定積分は無数にあり、これらは

$$\int \boldsymbol{A}(t)\,dt + \boldsymbol{C} \quad (\boldsymbol{C}\text{ は任意の定ベクトル})$$

と表される。また、ベクトル関数の積分も、成分ごとの積分に帰着される。

$$\int \boldsymbol{A}(t)\,dt = \int A_x(t)\,dt\,\boldsymbol{i} + \int A_y(t)\,dt\,\boldsymbol{j} + \int A_z(t)\,dt\,\boldsymbol{k}$$

積分の性質

$\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$ ： ベクトル関数

c ： 定数（ 実数 ）

$\boldsymbol{e}$ ： 定ベクトル（ t によらないベクトル ）

とすると、つぎの ① ～ ④ が成り立つ（ 積分定数（定数または定ベクトル）の差を除く ）。

① $\displaystyle\int \left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\right) dt = \int \boldsymbol{A}\, dt + \int \boldsymbol{B}\, dt$

② $\displaystyle\int c\boldsymbol{A}\, dt = c \int \boldsymbol{A}\, dt$

③ $\displaystyle\int \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{A}\, dt = \boldsymbol{e} \cdot \int \boldsymbol{A}\, dt$

④ $\displaystyle\int \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{A}\, dt = \boldsymbol{e} \times \int \boldsymbol{A}\, dt$

積分の性質の証明（1）

$\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\,\boldsymbol{i} + A_y(t)\,\boldsymbol{j} + A_z(t)\,\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B}(t) = B_x(t)\,\boldsymbol{i} + B_y(t)\,\boldsymbol{j} + B_z(t)\,\boldsymbol{k}$ とする。

ベクトル関数の不定積分は、成分ごとの不定積分に帰着されるのであった。

① $\int \left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\right) dt = \int \boldsymbol{A}\,dt + \int \boldsymbol{B}\,dt$ の証明

$$\int \left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\right) dt = \int \left(A_x + B_x\right) dt\,\boldsymbol{i} + \int \left(A_y + B_y\right) dt\,\boldsymbol{j} + \int \left(A_z + B_z\right) dt\,\boldsymbol{k}$$

$$= \left(\int A_x\,dt + \int B_x\,dt\right)\boldsymbol{i} + \left(\int A_y\,dt + \int B_y\,dt\right)\boldsymbol{j} + \left(\int A_z\,dt + \int B_z\,dt\right)\boldsymbol{k}$$

$$= \left(\int A_x\,dt\,\boldsymbol{i} + \int A_y\,dt\,\boldsymbol{j} + \int A_z\,dt\,\boldsymbol{k}\right) + \left(\int B_x\,dt\,\boldsymbol{i} + \int B_y\,dt\,\boldsymbol{j} + \int B_z\,dt\,\boldsymbol{k}\right) = \int \boldsymbol{A}\,dt + \int \boldsymbol{B}\,dt$$

積分の性質の証明（2）

② $\int c\boldsymbol{A}\,dt = c\int \boldsymbol{A}\,dt$ の証明

$$\int c\boldsymbol{A}\,dt = \int cA_x\,dt\,\boldsymbol{i} + \int cA_y\,dt\,\boldsymbol{j} + \int cA_z\,dt\,\boldsymbol{k} = c\int A_x\,dt\,\boldsymbol{i} + c\int A_y\,dt\,\boldsymbol{j} + c\int A_z\,dt\,\boldsymbol{k}$$

$$= c\left(\int A_x\,dt\,\boldsymbol{i} + \int A_y\,dt\,\boldsymbol{j} + \int A_z\,dt\,\boldsymbol{k}\right) = c\int \boldsymbol{A}\,dt$$

③ $\int \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{A}\,dt = \boldsymbol{e}\cdot\int \boldsymbol{A}\,dt$ の証明

$\boldsymbol{e} = e_x\boldsymbol{i} + e_y\boldsymbol{j} + e_z\boldsymbol{k}$ とする（e_x , e_y , e_z は t によらない定数）。

$$\int \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{A}\,dt = \int\left(e_xA_x + e_yA_y + e_zA_z\right)dt = e_x\int A_x\,dt + e_y\int A_y\,dt + e_z\int A_z\,dt = \boldsymbol{e}\cdot\int \boldsymbol{A}\,dt$$

積分の性質の証明（3）

④ $\int \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{A}\, dt = \boldsymbol{e} \times \int \boldsymbol{A}\, dt$ の証明

$\boldsymbol{e} = e_x \boldsymbol{i} + e_y \boldsymbol{j} + e_z \boldsymbol{k}$ として、e_x , e_y , e_z は t によらない定数であることに注意。

$$\text{左辺} = \int \left\{ \left(e_y A_z - e_z A_y \right) \boldsymbol{i} - \left(e_x A_z - e_z A_x \right) \boldsymbol{j} + \left(e_x A_y - e_y A_x \right) \boldsymbol{k} \right\}$$

$$\text{右辺} = \left(e_x \boldsymbol{i} + e_y \boldsymbol{j} + e_z \boldsymbol{k} \right) \times \left(\int A_x dt\, \boldsymbol{i} + \int A_y dt\, \boldsymbol{j} + \int A_z dt\, \boldsymbol{k} \right)$$

$$= \left(e_y \int A_z dt - e_z \int A_y dt \right) \boldsymbol{i} - \left(e_x \int A_z dt - e_z \int A_x dt \right) \boldsymbol{j} + \left(e_x \int A_y dt - e_y \int A_x dt \right) \boldsymbol{k}$$

$$= \int \left(e_y A_z - e_z A_y \right) dt\, \boldsymbol{i} - \int \left(e_x A_z - e_z A_x \right) dt\, \boldsymbol{j} + \int \left(e_x A_y - e_y A_x \right) dt\, \boldsymbol{k} = \text{左辺}$$

部分積分の公式

さらに、

$f = f(t)$ ：スカラー関数

とすると、つぎに挙げる 部分積分の公式 が成り立つ。

（ 積分定数（定数または定ベクトル）の差を除く ）

⑤ $$\int f\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}dt = f\boldsymbol{A} - \int \frac{df}{dt}\boldsymbol{A}\,dt$$

⑥ $$\int \frac{df}{dt}\boldsymbol{A}\,dt = f\boldsymbol{A} - \int f\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}dt$$

⑦ $$\int \boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}dt = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} - \int \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}\,dt$$

⑧ $$\int \boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}dt = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} - \int \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}\,dt$$

部分積分の公式の証明

⑤ $\displaystyle\int f\,\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\,dt = f\boldsymbol{A} - \int \frac{df}{dt}\,\boldsymbol{A}\,dt$ の証明

微分の公式 ② より、つぎの等式が成り立つのであった。（ 12ページ ）

$$\big(f(t)\boldsymbol{A}(t)\big)' = f(t)'\boldsymbol{A}(t) + f(t)\boldsymbol{A}'(t)$$

両辺を積分してつぎを得る（ 積分定数の差を除いて等しい ）。

$$f(t)\boldsymbol{A}(t) = \int f(t)'\boldsymbol{A}(t)\,dt + \int f(t)\boldsymbol{A}'(t)\,dt$$

式を整理して部分積分の公式 ⑤ を得る。

部分積分の公式 ⑥ 〜 ⑧ の証明も同様である。∎

定積分

ベクトル関数 $\boldsymbol{A}(t)$ が、閉区間 $I = [a, b]$ で連続であるとする。

I を n 個の小区間 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ に分割し、

各小区間の長さを $\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n$ とする。

さらに、各小区間内における代表点 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ をひとつずつ任意にとる。

ベクトルの和 $\boldsymbol{S}_\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}(t_i)\,\Delta t_i$

を考える。分割を細かくしていくと、$\boldsymbol{S}_\Delta$ は一定の極限値 $\boldsymbol{S}$ に収束する。

この極限値 $\boldsymbol{S}$ を 定積分 といい、つぎの記号で表す。

$$\boldsymbol{S} = \int_a^b \boldsymbol{A}(t)\,dt$$

微分積分学の基本定理（ベクトル版）

ベクトル関数の定積分も、成分ごとの積分によって求まる。

$$\boldsymbol{A}(t) = A_x(t)\,\boldsymbol{i} + A_y(t)\,\boldsymbol{j} + A_z(t)\,\boldsymbol{k}$$

ならば

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\,dt = \int_a^b A_x(t)\,dt\,\boldsymbol{i} + \int_a^b A_y(t)\,dt\,\boldsymbol{j} + \int_a^b A_z(t)\,dt\,\boldsymbol{k}$$

また、微分積分学の基本定理 が成り立つ：

$\boldsymbol{A}(t)$ の不定積分のひとつを $\boldsymbol{D}(t)$ とすると、つぎが成り立つ。

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(t)\,dt = \Big[\boldsymbol{D}(t)\Big]_a^b = \boldsymbol{D}(b) - \boldsymbol{D}(a)$$

変位

運動する点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ の導関数が速度ベクトル $\boldsymbol{v}(t)$,

$\boldsymbol{r}(t)$ の 2 次導関数が加速度ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ であった。

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} \quad , \quad \boldsymbol{a}(t) = \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}$$

始点から終点までの位置ベクトルの変化を表すベクトルを 変位 という。

変位は速度ベクトルの積分により求まる。

$$\boldsymbol{r}(t_1) - \boldsymbol{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{v}(u)\,du \quad , \quad \boldsymbol{r}(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(u)\,du + \boldsymbol{r}(t_0)$$

同様に加速度ベクトルの積分から速度が求まる： $\boldsymbol{v}(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{a}(u)\,du + \boldsymbol{v}(t_0)$

例題

動点 P の速度ベクトルを $\boldsymbol{v}(t) = (2t, 1, \cos t)$ とする。

時刻 $t = 0$ から $t = 1$ までの点 P の変位 $\boldsymbol{r}(1) - \boldsymbol{r}(0)$ を求めよ。

（解答）変位は速度ベクトルの積分で求まるのであった。

$$\boldsymbol{r}(1) - \boldsymbol{r}(0) = \int_0^1 \boldsymbol{v}(t)\,dt$$

定積分の計算は、成分ごとにできるのであったから、つぎのようになる。

$$\int_0^1 \boldsymbol{v}(t)\,dt = \int_0^1 (2t, 1, \cos t)\,dt = \left(\int_0^1 2t\,dt, \int_0^1 1\,dt, \int_0^1 \cos t\,dt\right) = (1, 1, \sin 1)$$

したがって、変位は $\underline{(1, 1, \sin 1)}$ ∎

例題

加速度ベクトルが一定 $\boldsymbol{a}$ である運動の位置ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ を求めよ。

ただし、初期時刻を $t=0$ とし、$\boldsymbol{r}(0)=\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{v}_0$ とする。

（解答）

いま、加速度ベクトル $\boldsymbol{a}(t)$ は t によらないベクトル $\boldsymbol{a}$ である。

初期時刻は $t=0$ であるから、加速度を 0 から t まで積分する。

$$\boldsymbol{v}(t)=\int_0^t \boldsymbol{a}(u)\,du+\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{a}\int_0^t du+\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{a}t+\boldsymbol{v}_0,$$ さらに

$$\boldsymbol{r}(t)=\int_0^t \boldsymbol{v}(u)\,du+\boldsymbol{r}(0)=\int_0^t\left(\boldsymbol{a}u+\boldsymbol{v}_0\right)du+\boldsymbol{r}(0)=\underline{\frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2+\boldsymbol{v}_0t+\boldsymbol{r}_0}\ \blacksquare$$