ベクトル解析

２回目講義

畠中　英里

本日の講義の流れ

○ 前回の復習

○ 本日の講義内容

・外積の基本的な性質

・外積の幾何学的意味

・スカラー三重積

・ベクトル三重積

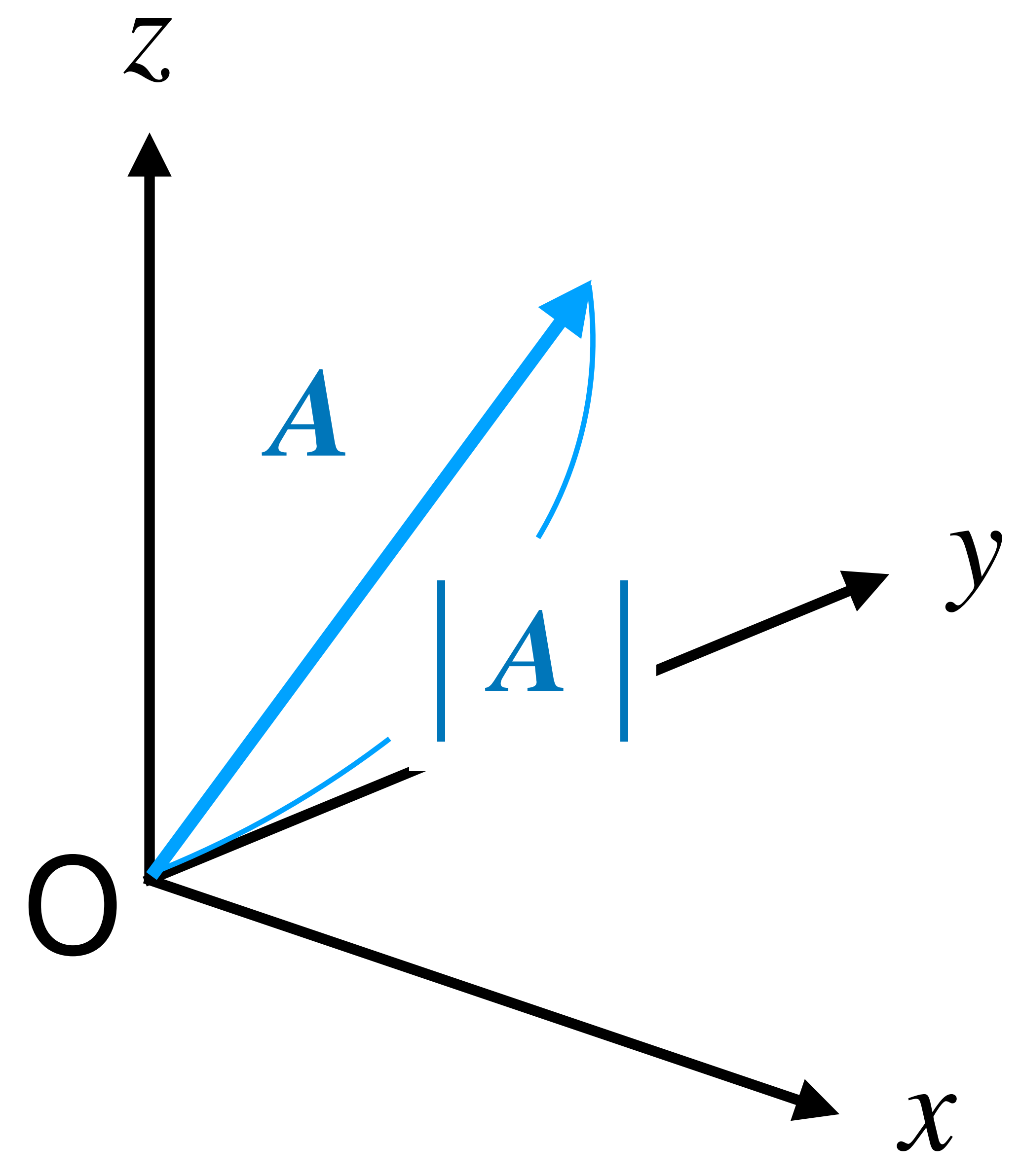
前回の復習（1）

ベクトルとは：向きと大きさを持つ量。太字（ $\boldsymbol{A}$ ）で表す。

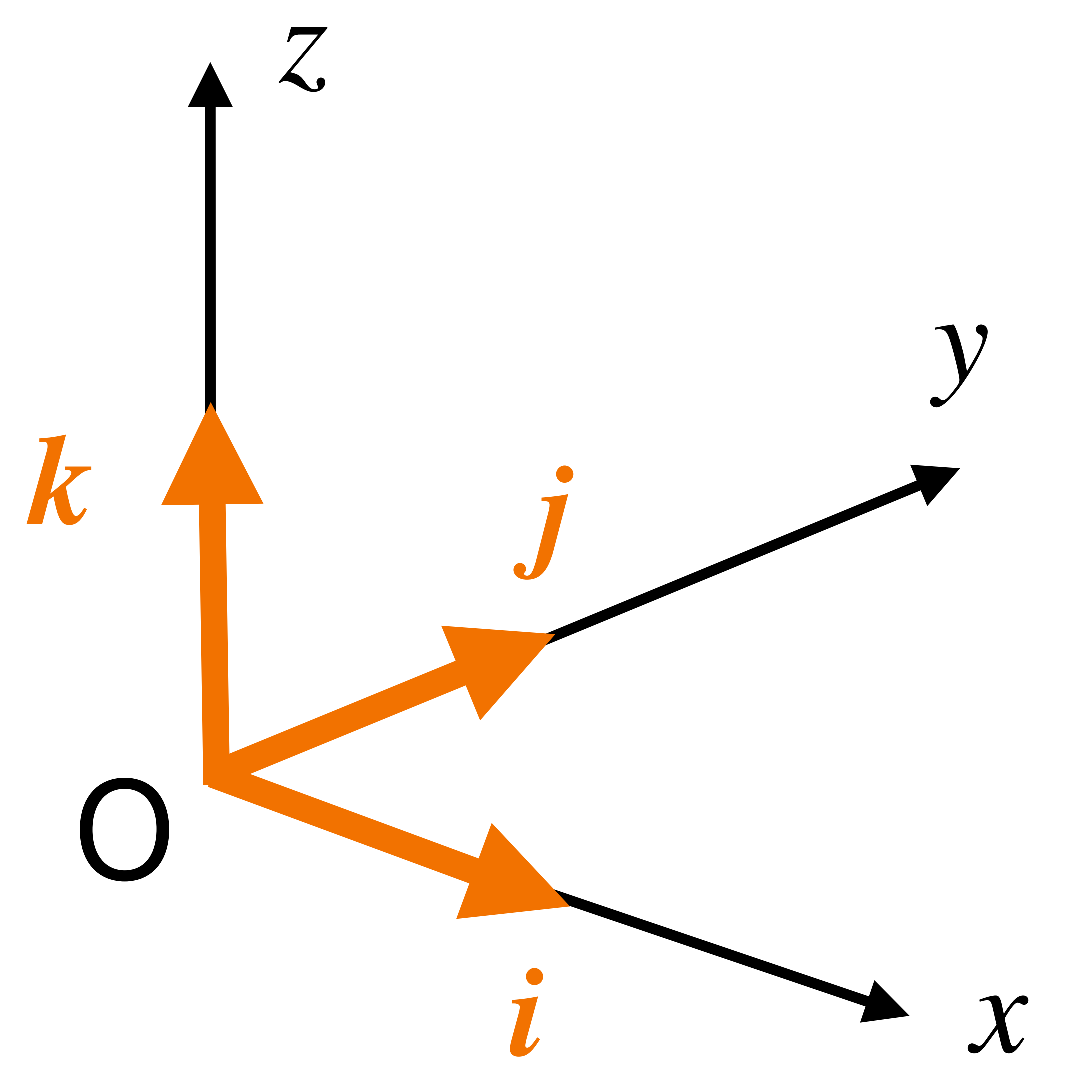
スカラーとは：大きさ（数値）だけを持つ量。

ベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分表示： $\boldsymbol{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right)$

ベクトルの大きさ： $\left|\boldsymbol{A}\right| = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}$



単位ベクトル および 基本ベクトル $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ の定義



ベクトルの加法：$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \left(A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z\right)$

ベクトルのスカラー倍：$a\boldsymbol{A} = \left(aA_x, aA_y, aA_z\right)$ である。

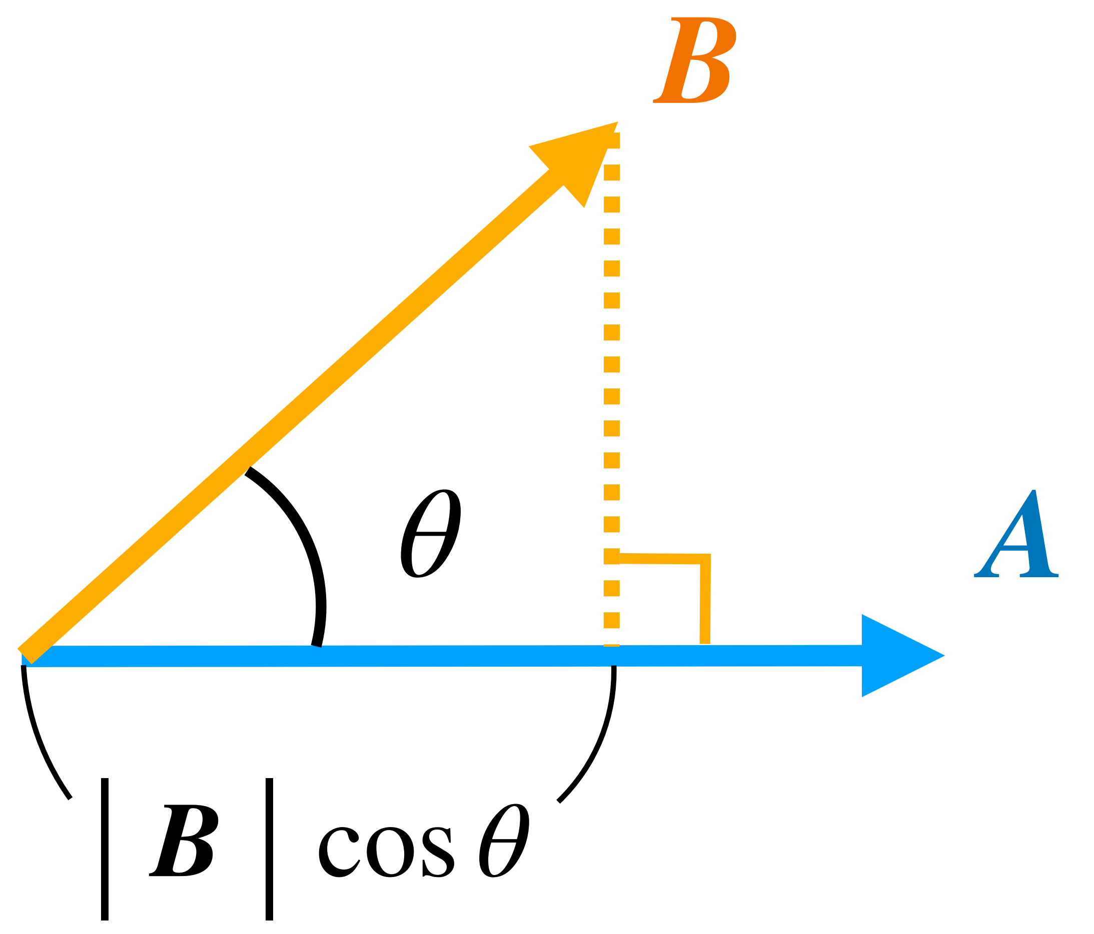
前回の復習（2）

ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角を θ とする（$0 \leq \theta \leq \pi$）。

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の 内積 ： $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$ （$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}, \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$ のとき）

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ のいずれかが $\boldsymbol{0}$ であるときは $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ と定める。

$|\boldsymbol{B}|\cos\theta$ を $\boldsymbol{B}$ の $\boldsymbol{A}$ 方向への符号付き正射影成分 という。



$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}, \boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{i} + B_y \boldsymbol{j} + B_z \boldsymbol{k}$ とすると

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}\sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2}}$$

前回の復習（3）

$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$ に対し、

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の 外積 とは

$$\boxed{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\boldsymbol{i} - \left(A_xB_z - A_zB_x\right)\boldsymbol{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\boldsymbol{k}}$$

$$= \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

（ 行列式の第１行に関する余因子展開 ）

本日の講義

外積の性質

外積の性質

すべてのベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ とスカラー c についてつぎが成り立つのであった。

（1）$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = - \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$

（2）$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$

（3）$\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\right) \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ ， $\boldsymbol{C} \times \left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\right) = \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}$

（4）$\left(c\boldsymbol{A}\right) \times \boldsymbol{B} = c\left(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\right)$ ， $\boldsymbol{A} \times (c\boldsymbol{B}) = c\left(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\right)$

行列式の性質を使ってこれを証明しよう。

行列式の性質を復習する。

行列式の性質（1）

n 次正方行列 A の行列式 $|A|$ について、$|{}^tA| = |A|$ が成り立つことより、

行（列）に関して成り立つ性質はすべて列（行）に関しても成り立つ。

また、n 次正方行列 A を列ベクトルを用いて $A = (a_1\, a_2\, \cdots\, a_n)$ と表すとき、

行列式 $|A|$ についても $|A| = |a_1\, a_2\, \cdots\, a_n|$ と表すことにする。

定理　2つの列（または行）を入れかえると、行列式は (-1) 倍になる。

$$\left| a_1 \cdots \underset{\substack{i\\ \text{列}}}{a_i} \cdots \underset{\substack{j\\ \text{列}}}{a_j} \cdots a_n \right| = - \left| a_1 \cdots \underset{\substack{i\\ \text{列}}}{a_j} \cdots \underset{\substack{j\\ \text{列}}}{a_i} \cdots a_n \right|$$

行列式の性質（2）

定理　2つの列（または行）が等しい行列の行列式は 0 。

定理　行列の、１つの列（または行）を k 倍した行列の行列式は、もとの行列の行列式の k 倍になる。

$$\left| \begin{array}{ccccc} a_1 & \cdots & (k a_i) & \cdots & a_n \end{array} \right| = k \left| \begin{array}{ccccc} a_1 & \cdots & a_i & \cdots & a_n \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & i\text{列} & & & & i\text{列} \end{array}$$

行列式の性質（３）

定理　ある行列の１つの列ベクトル a_i が２つの列ベクトルの和として

$$a_i = a_i' + a_i''$$

と表されるとき、つぎが成り立つ。（行についても同じ性質が成り立つ。）

$$\left| a_1 \cdots \underset{\substack{i\\ \text{列}}}{a_i} \cdots a_n \right| = \left| a_1 \cdots \underset{\substack{i\\ \text{列}}}{a_i' + a_i''} \cdots a_n \right|$$

$$= \left| a_1 \cdots \underset{\substack{i\\ \text{列}}}{a_i'} \cdots a_n \right| + \left| a_1 \cdots \underset{\substack{i\\ \text{列}}}{a_i''} \cdots a_n \right|$$

外積の性質（1）の証明

外積を行列式を使って表せることから、外積の性質（1）～（4）が示される。

$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$ に対し、

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

（1）$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ の証明

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \quad \blacksquare$$

外積の性質（2）と（4）の証明

（2）$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ の証明

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \blacksquare$$

（4）$(c\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B} = c(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ の証明

$$(c\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ cA_x & cA_y & cA_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = c(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

$\boldsymbol{A}\times(c\boldsymbol{B}) = c(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ についても同様。$\blacksquare$

外積の性質（3）の証明

（3）$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ の証明

$\boldsymbol{C}=C_x\boldsymbol{i}+C_y\boldsymbol{j}+C_z\boldsymbol{k}$ とする。

$$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x+B_x & A_y+B_y & A_z+B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$$

$\boldsymbol{C}\times\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)=\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}$ についても同様。∎

外積の幾何学的意味を考察する

ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ は、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の成分によって定義された。

$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{i} + B_y \boldsymbol{j} + B_z \boldsymbol{k}$ とするとき、

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right) \boldsymbol{i} - \left(A_x B_z - A_z B_x\right) \boldsymbol{j} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right) \boldsymbol{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ が、どのような「向き」と「大きさ」を持つベクトルなのかを見よう。

外積と垂直なベクトル

まずは、つぎの等式が成り立つ。

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A} = 0 \ , \ (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

（証明）$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{i} + B_y \boldsymbol{j} + B_z \boldsymbol{k}$ とするとき、

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{A} = \left\{ \left(A_y B_z - A_z B_y \right) \boldsymbol{i} - \left(A_x B_z - A_z B_x \right) \boldsymbol{j} + \left(A_x B_y - A_y B_x \right) \boldsymbol{k} \right\} \cdot \left(A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k} \right)$$

$$= \left(A_y B_z - A_z B_y \right) A_x - \left(A_x B_z - A_z B_x \right) A_y + \left(A_x B_y - A_y B_x \right) A_z$$

$= 0$（展開してたしかめよ）$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{B} = 0$ についても同様。∎

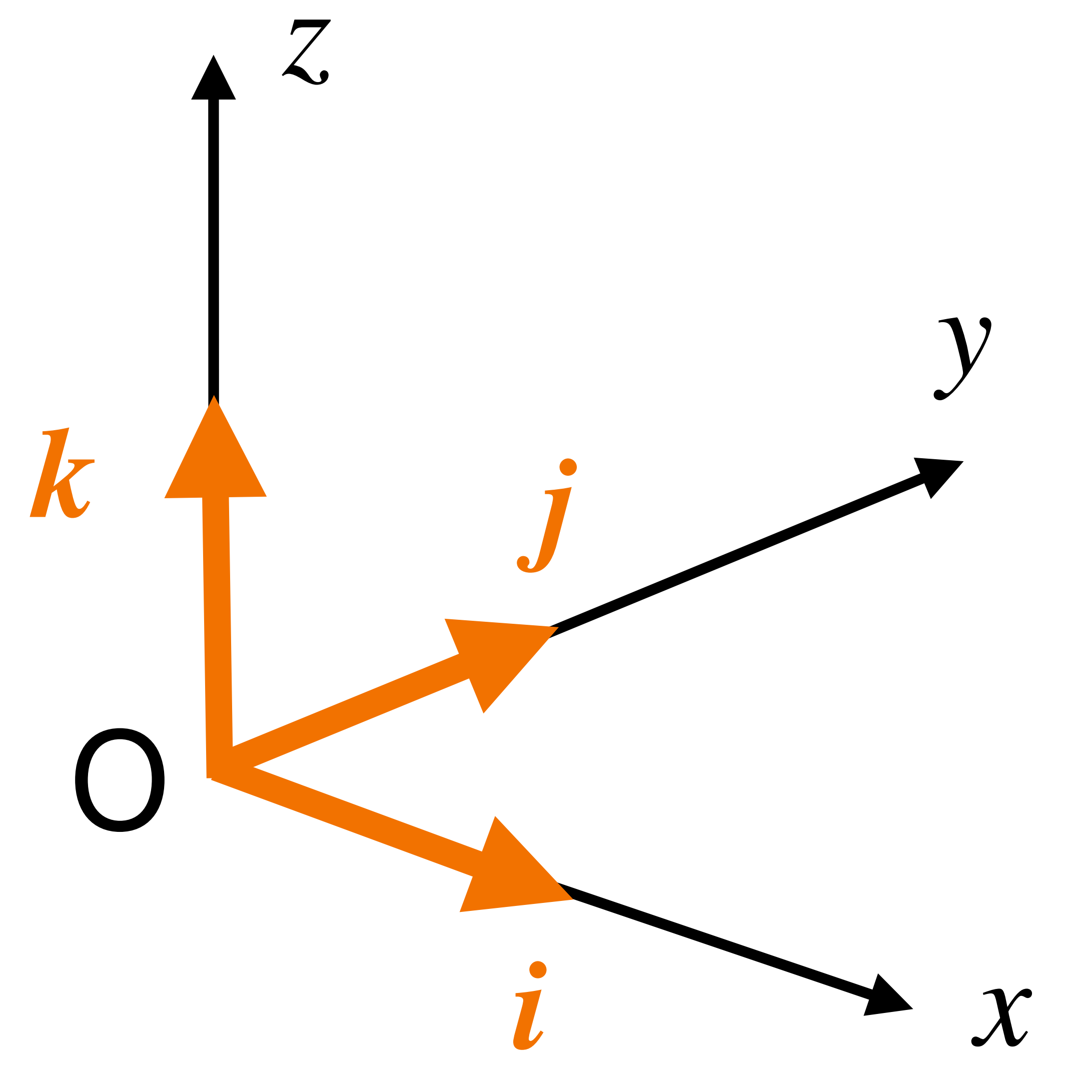
ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ は、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の両方に垂直なベクトルである。

基本ベクトルの外積

x 軸、y 軸、z 軸は 右手系 をなすように配置されているとする。

基本ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ はそれぞれつぎのベクトルであった。

$$\boldsymbol{i} = (1, 0, 0) \ , \ \boldsymbol{j} = (0, 1, 0) \ , \ \boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$$



このとき、つぎが成り立つ。（たしかめよ。）

$$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \ , \ \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \ , \ \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$$

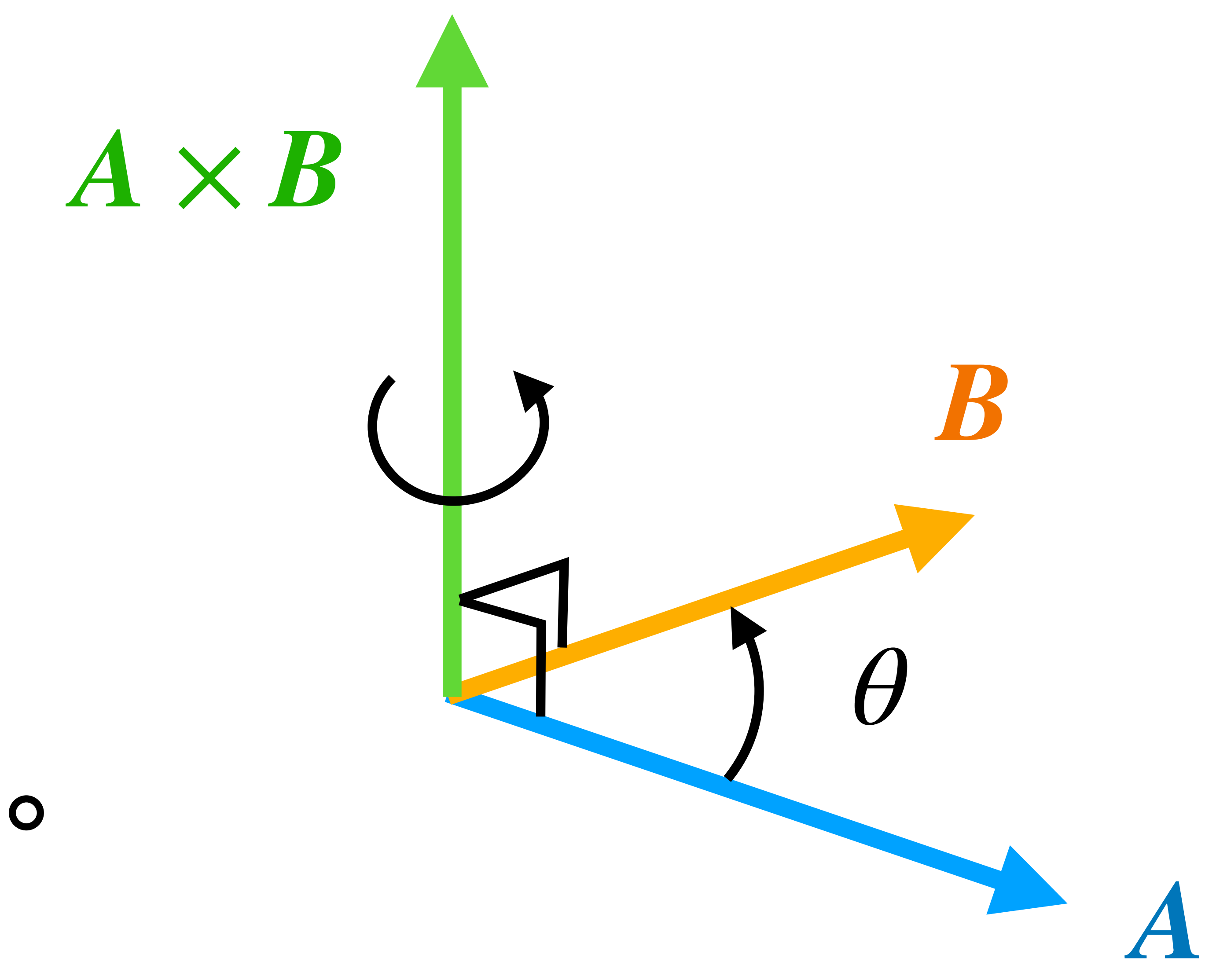
$\boldsymbol{i}$ を $\boldsymbol{j}$ に重ねるように 90° 回転すると、$\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}$ は右ねじの進む向き（ $\boldsymbol{k}$ ）を向く。

基本ベクトルの外積の向きは右手系に従う。

一般のベクトルの外積の向き

一般のベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ の外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の向きについても同様である。

任意のベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ は基本ベクトル $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ の１次結合で表されるから、
外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ も $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$ などの基本ベクトルの外積を基準にした
１次結合として与えられる。



したがって、$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ の向きは
$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{B}$ へ重ねるように、小さい方の角だけ回転したとき
$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の両方に垂直で、かつ、右ねじの進む向きを向く。

一般のベクトルの外積の向きも、右手系に従う。

例題

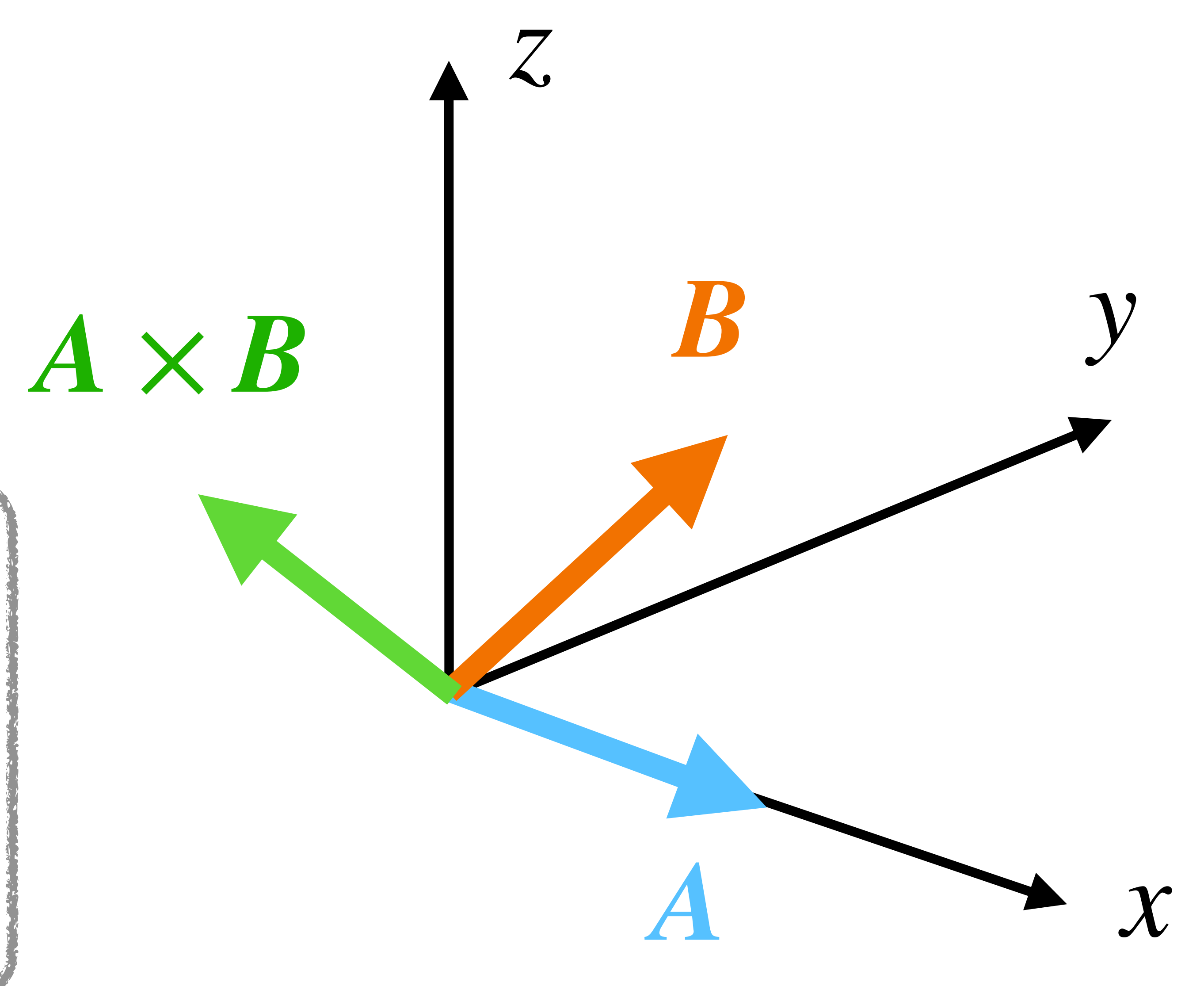
$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ として外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ を求めよ。

（ 解 ） 外積の成分表示から計算してみよう。

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\boldsymbol{i} - \left(A_x B_z - A_z B_x\right)\boldsymbol{j} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\boldsymbol{k}$$

$$= (0 \cdot 1 - 0 \cdot 1)\boldsymbol{i} - (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1)\boldsymbol{j} + (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1)\boldsymbol{k}$$

$$= -\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$



$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積 $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ が、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ に垂直で

右手系に従う向きのベクトルであることが確かめられる。

平行なベクトルの外積

ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が平行なとき、

$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$ とすると、ある定数 a があって

$\boldsymbol{B} = a\boldsymbol{A}$ と表せるため

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \times \left(a\boldsymbol{A} \right) = a\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$$

となる。

（7ページの外積の性質（4）（2）を使った。）

平行なベクトルどうしの外積は $\boldsymbol{0}$

また、$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, あるいは $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ のときも $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ となる。（たしかめよ）

外積の大きさ

$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{i} + B_y \boldsymbol{j} + B_z \boldsymbol{k}$ とするとつぎが導かれる。

$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$ とし、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角を θ（$0 \leq \theta \leq \pi$）とする。

$$\left|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}\right| = \sqrt{\left(A_y B_z - A_z B_y\right)^2 + \left(A_x B_z - A_z B_x\right)^2 + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)\left(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right) - \left(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\right)^2}$$

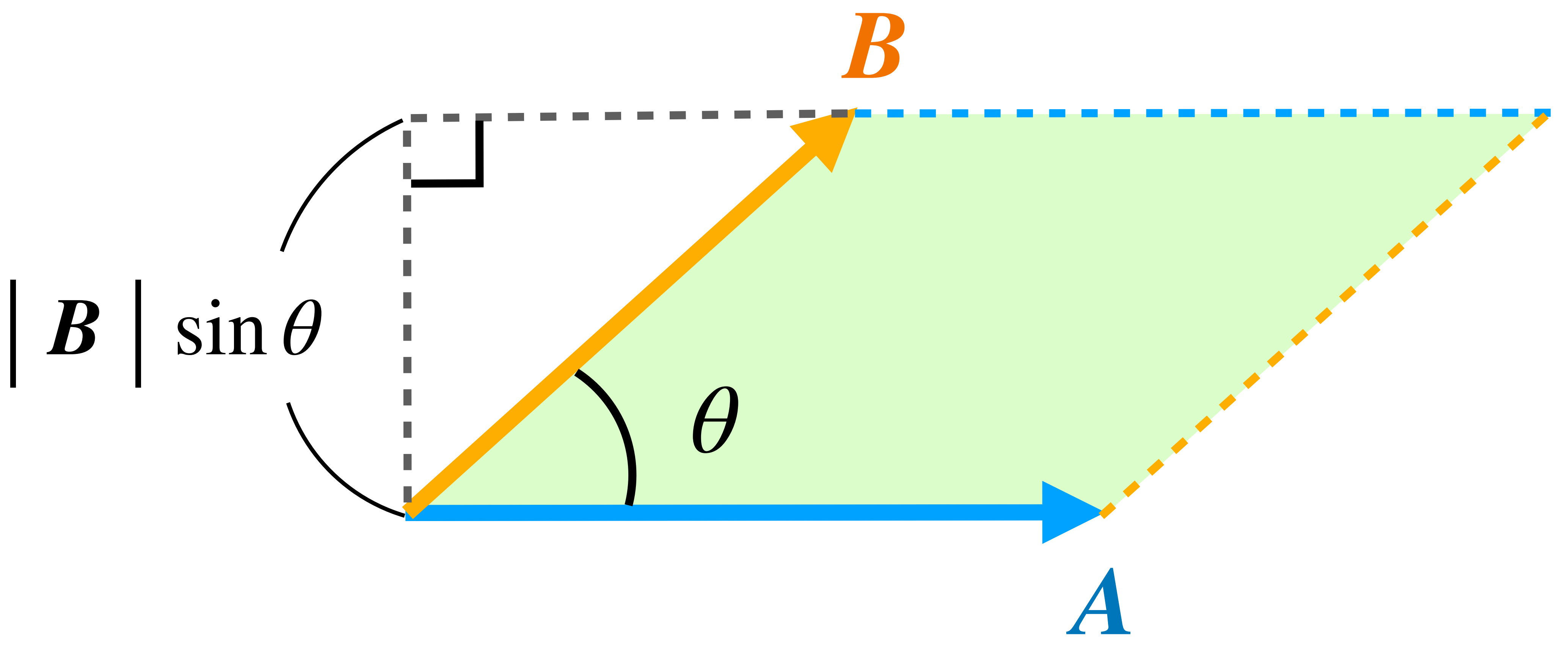
$$= \sqrt{\left|\boldsymbol{A}\right|^2 \left|\boldsymbol{B}\right|^2 - \left(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}\right)^2}$$

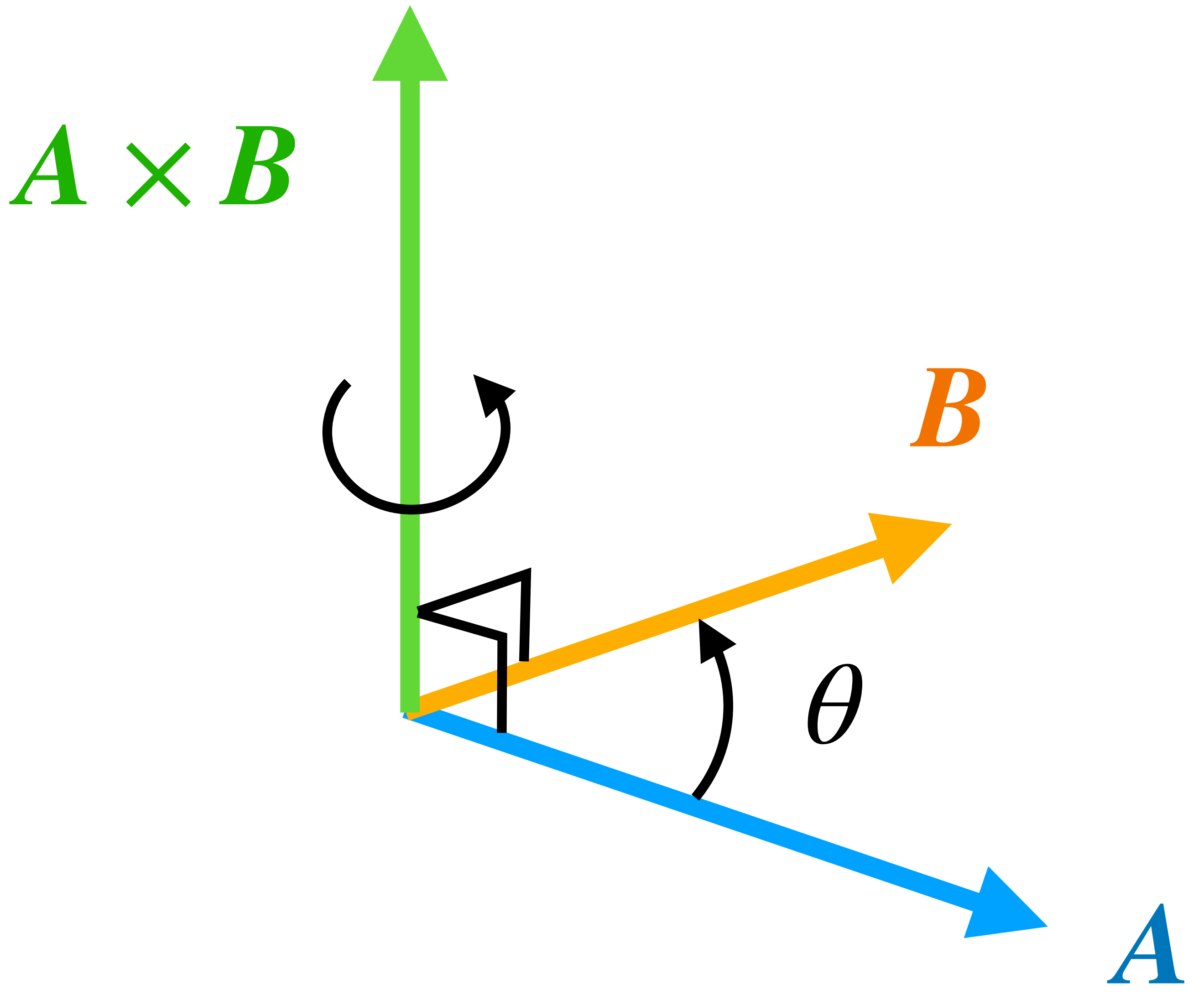
$$= \sqrt{\left|\boldsymbol{A}\right|^2 \left|\boldsymbol{B}\right|^2 \left(1 - \cos^2\theta\right)} = \sqrt{\left|\boldsymbol{A}\right|^2 \left|\boldsymbol{B}\right|^2 \sin^2\theta} = \left|\boldsymbol{A}\right| \left|\boldsymbol{B}\right| \sin\theta$$

平行四辺形の面積

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta \quad (0 < \theta < \pi)$$

これは、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が張る平行四辺形の面積に等しい。





$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の外積 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ は、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ に垂直で右手系に従う向きのベクトルであり、その大きさは $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ で張られる平行四辺形の面積に等しい。

スカラー三重積

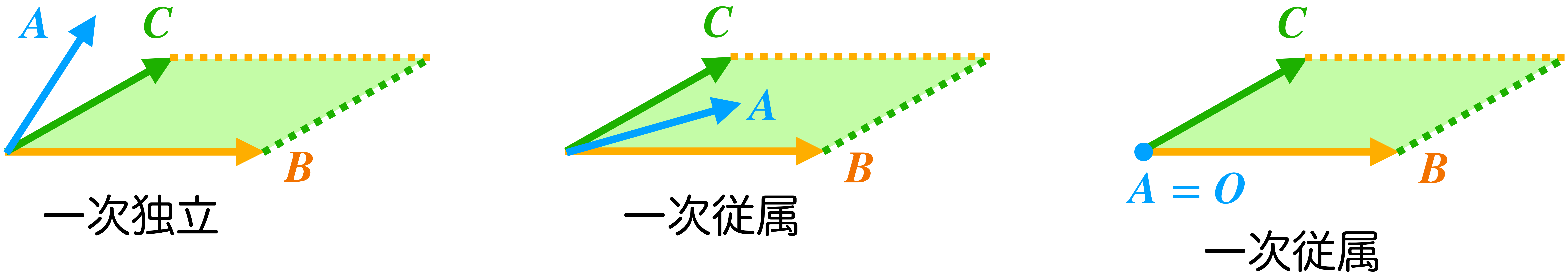
ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ に対し、$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ を スカラー三重積 という。

スカラー三重積は実数値であることに注意。

３つのベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ を同一の始点から描いたとき、

ひとつの平面上に乗らないとき、$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ は 一次独立 であるという。

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ が一次独立でないとき、一次従属 であるという。



（ 線形代数学で学んだ一次独立の定義と同値である。証明は省略する。）

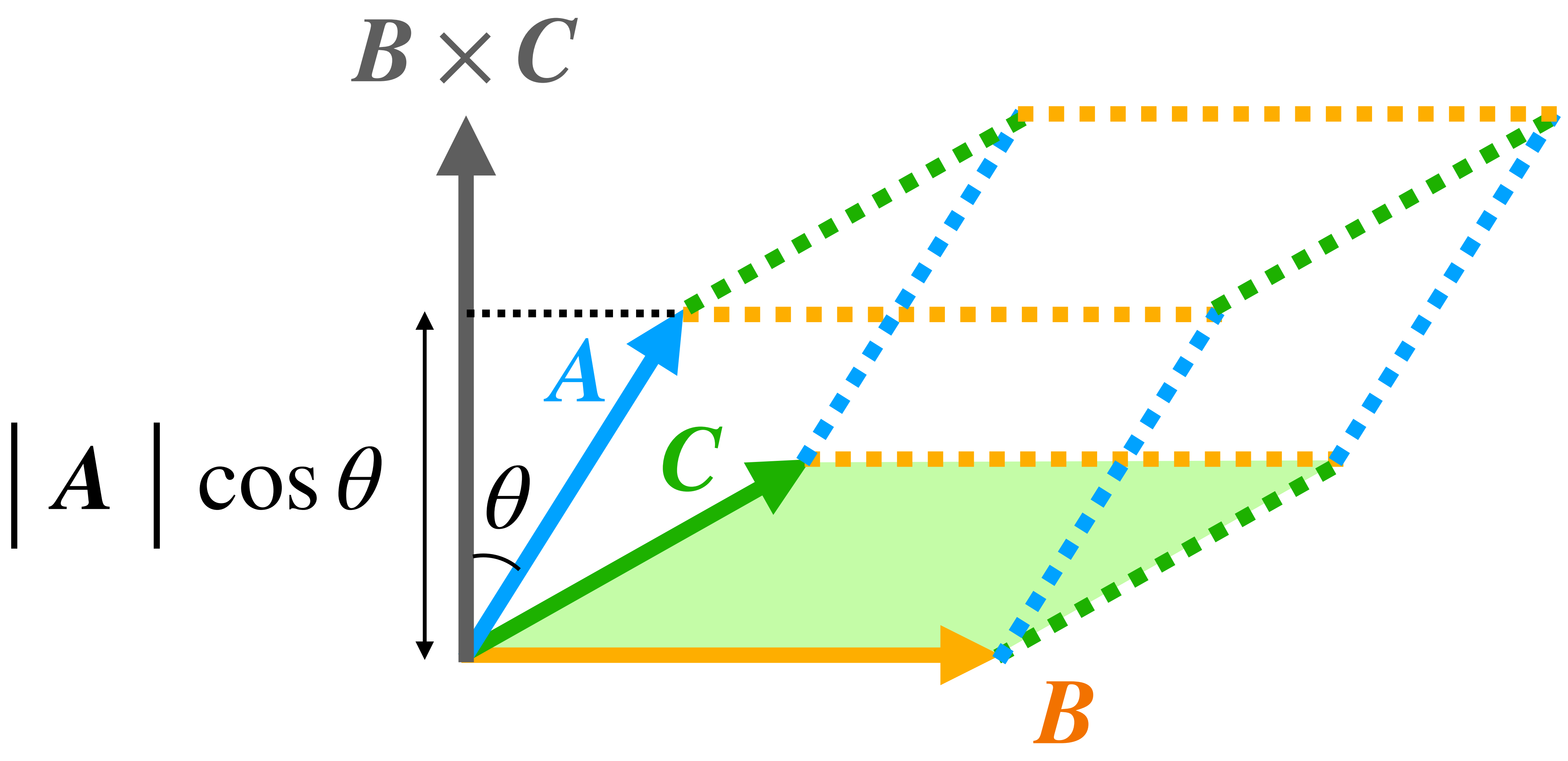
平行六面体の体積

ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ が一次独立であるとする。

$\left|\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}\right|$ は、$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ で張られる平行四辺形の面積に等しいのであった。

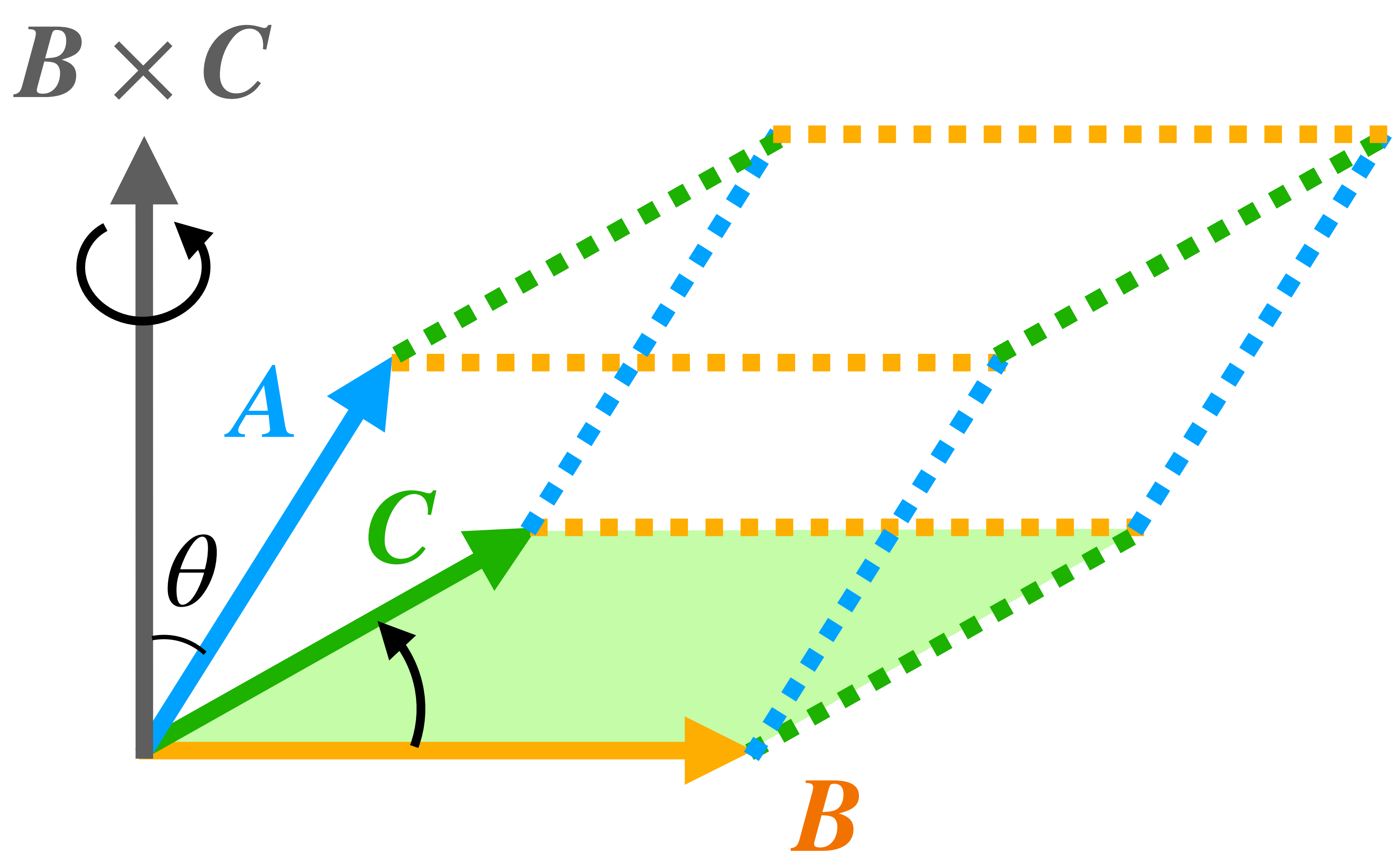
これより、$\left|\boldsymbol{A} \cdot \left(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}\right)\right| = \left|\boldsymbol{A}\right| \left|\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}\right| \left|\cos\theta\right|$ の値は

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ を３辺とする平行六面体の体積に等しい（ θ は下図の角 ）。



スカラー三重積の符号

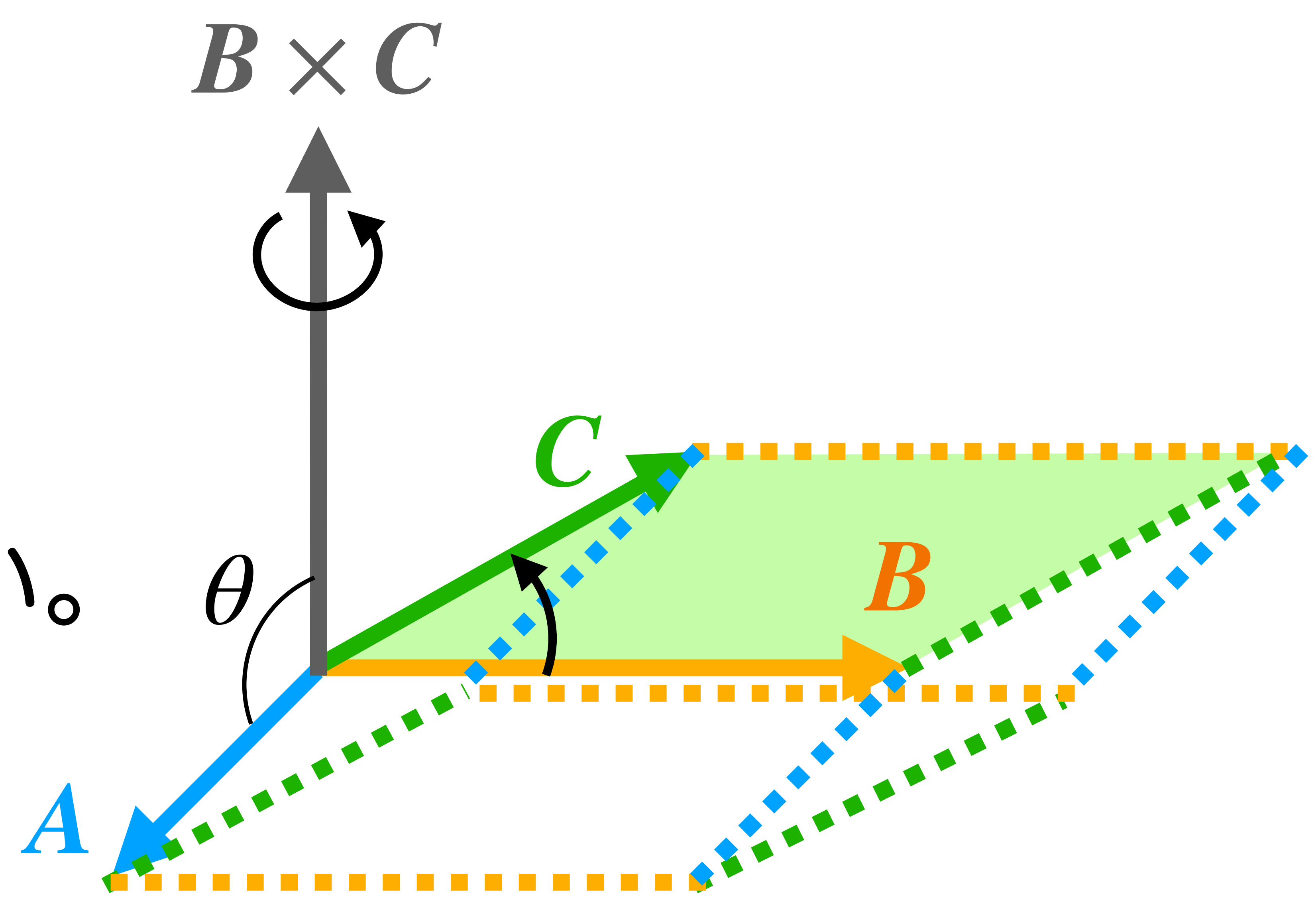
θ は図のとおり $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ のなす角とする。



$0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき、スカラー三重積

$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ は平行六面体の体積に等しい。

このとき $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ は 右手系 である。



$\dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ のとき、スカラー三重積

$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ は平行六面体の体積の -1 倍に等しい。

このとき $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ は 左手系 である。

右手系・左手系の判定

まとめるとつぎのようになる：

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ が一次独立のとき、

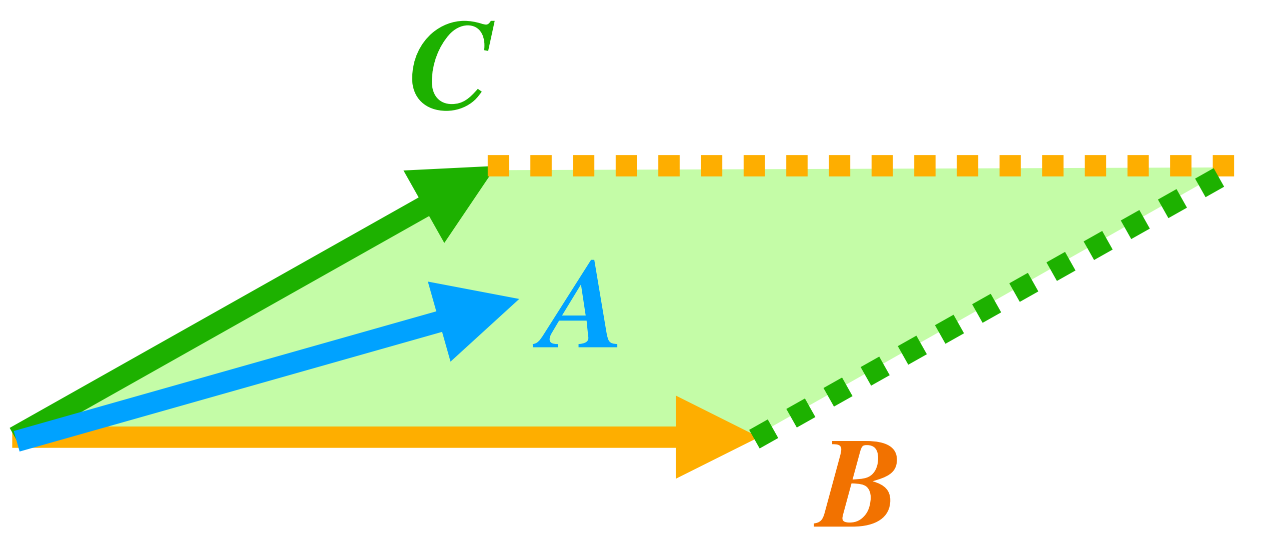
$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) \text{ が右手系} \iff \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) > 0$$

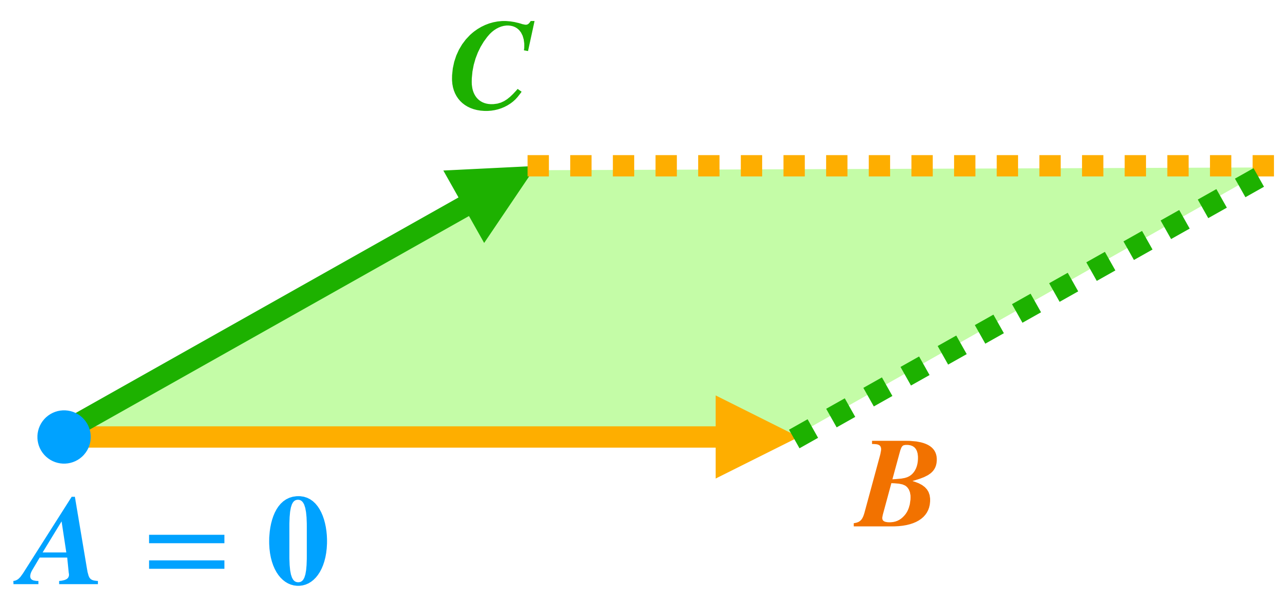
$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}) \text{ が左手系} \iff \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) < 0$$

さらにつぎが成り立つ：

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \text{ が一次従属} \iff \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = 0$$

（ いずれかのベクトルが $\mathbf{0}$ である場合も含む ）





スカラー三重積の成分による表示

$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{C} = C_x\boldsymbol{i} + C_y\boldsymbol{j} + C_z\boldsymbol{k}$

とすると

$$\boldsymbol{A}\cdot\left(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}\right) = \left(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}\right)\cdot\left\{\begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right\}$$

$$= A_x\begin{vmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{vmatrix} - A_y\begin{vmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{vmatrix} + A_z\begin{vmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$ （行列式の第１行に関する余因子展開）

スカラー三重積の性質

スカラー三重積が行列式で表せることから、つぎの等式が従う。

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$$

$$= -\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}) = -\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})$$

行の入れかえによる行列式の性質を使う。

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \cdots$$

ベクトル三重積

ベクトル $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ に対し、$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ を ベクトル三重積 という。

つぎの等式が成り立つ。

$$\boxed{\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}}$$

実際、$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ の成分を使うと、左辺の $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ についてまずは

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = \left(B_y C_z - B_z C_y\right)\boldsymbol{i} - \left(B_x C_z - B_z C_x\right)\boldsymbol{j} + \left(B_x C_y - B_y C_x\right)\boldsymbol{k}$$

となる。したがって $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ の x 成分はつぎのようになる。

ベクトル三重積の性質（1）

$$(\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\text{ の }x\text{ 成分}) = A_y\left(B_xC_y - B_yC_x\right) - A_z\left\{-\left(B_xC_z - B_zC_x\right)\right\}$$

$$= \left(A_yC_y + A_zC_z\right)B_x - \left(A_yB_y + A_zB_z\right)C_x$$

$$= \left(\underline{A_xC_x} + A_yC_y + A_zC_z\right)B_x - \left(\underline{A_xB_x} + A_yB_y + A_zB_z\right)C_x$$

$$= (\text{右辺 }(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\,\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C}\text{ の }x\text{ 成分})$$

となる。

y 成分、z 成分についても同様に確かめられ、等式が示される。（たしかめよ）

一般には $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ であることに注意！

ベクトル三重積の性質（2）

ベクトル三重積について、さらにつぎの等式が成り立つ。

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{0}$$

（証明）

$$\begin{aligned}（左辺）&= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} + (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{C} - (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{A} \\ &\quad + (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} \\ &= （右辺）\end{aligned}$$

内積の性質より $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$ であることを使った。∎