# ベクトル解析

## 1回目講義

畠中　英里

# 本日の講義の流れ

○ はじめに

・この授業で学ぶこと

・ベクトル解析はなんの役に立つの？

○ 本日の講義内容

・ベクトル、加法、スカラー倍

・内積

・外積

# はじめに

# この授業で学ぶこと

・ベクトルの表現と演算（ 加法、スカラー倍、内積、外積 ）

・ベクトル場（ 流体の速度場、電場など ）

・ベクトルの微分（ スカラー場の勾配、ベクトル場の発散、回転 ）

・ベクトルの積分（ 線積分、面積分、体積分 ）

・主要定理（ グリーンの定理、ガウスの発散定理、ストークスの定理 ）

## 目標

○ ベクトル場の 発散・回転 を計算できる。

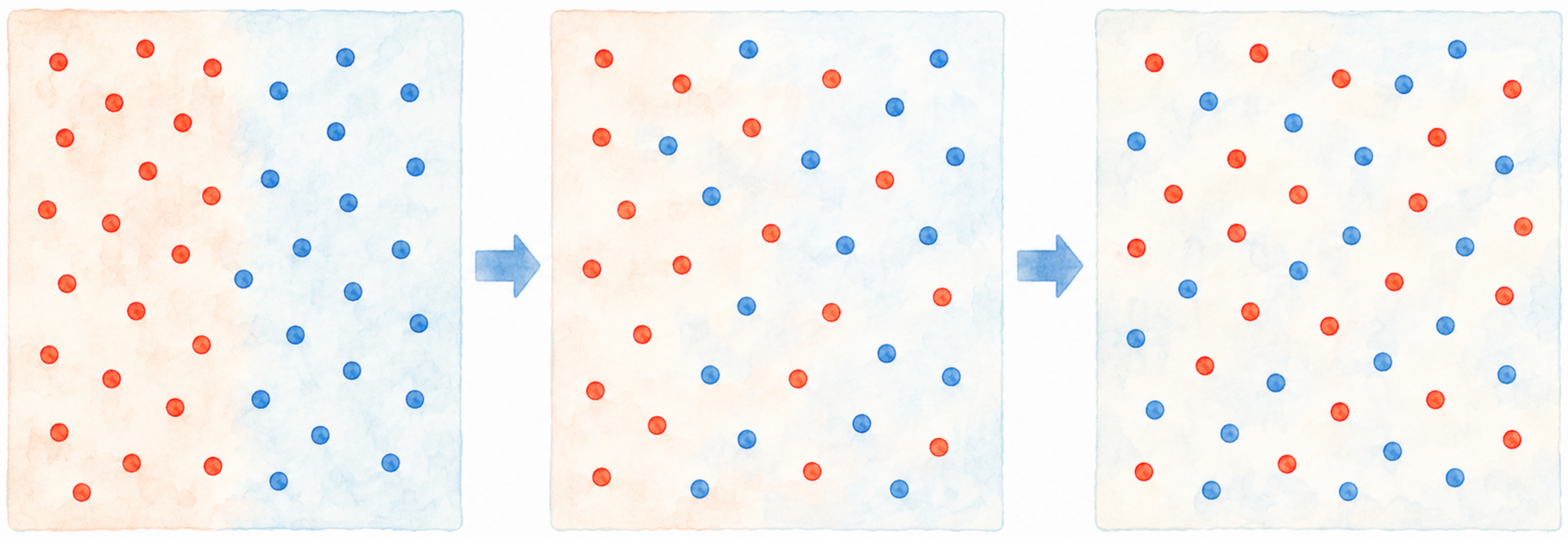
○ ガウスの発散定理・ストークスの定理を使って積分を簡約できる。

# ベクトル解析はなんの役に立つの？

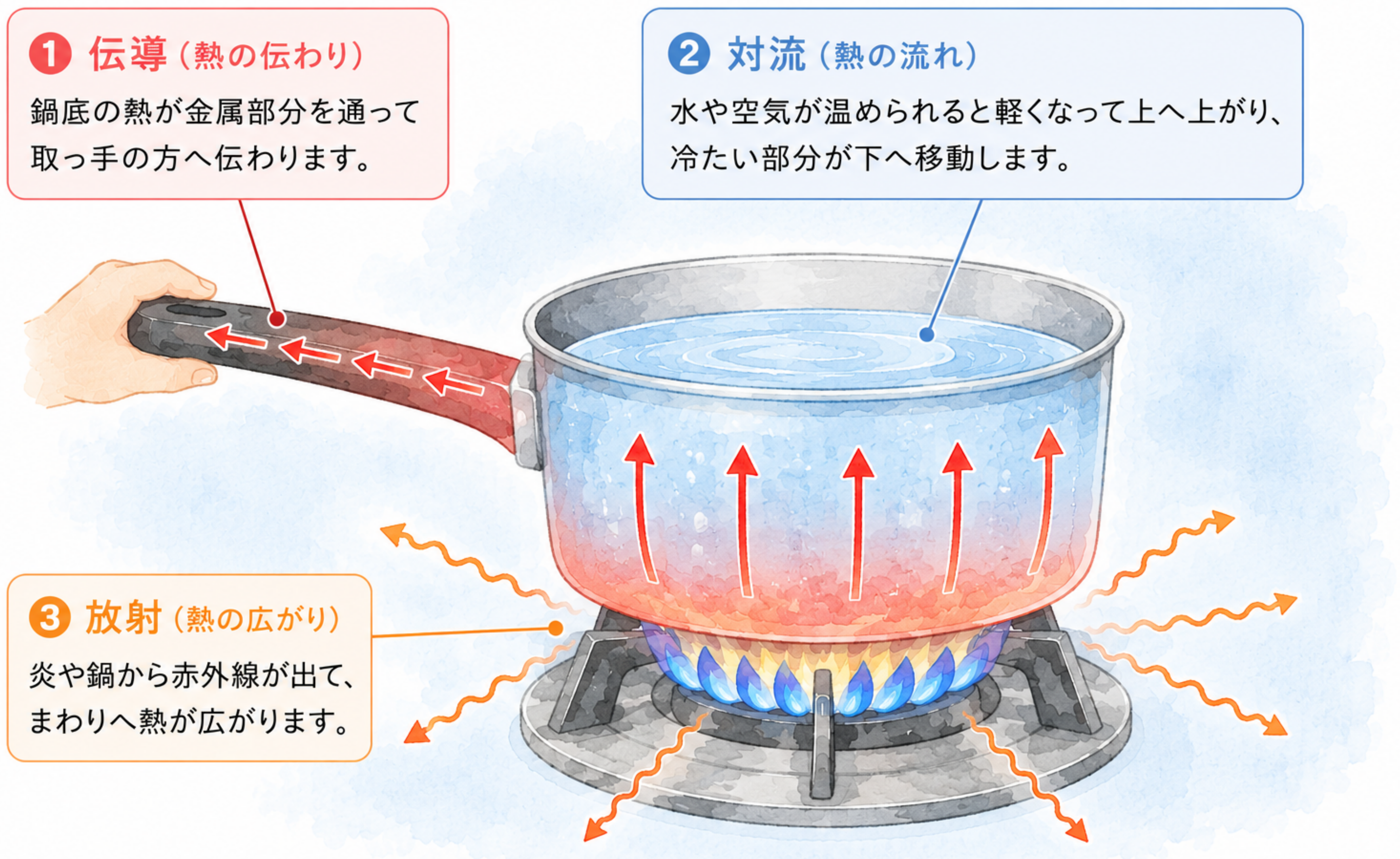
物質やエネルギーの流れを数式で理解するのに役立っています。

拡散・熱伝導・電場・流体の速度分布など、

化学や物理の中で起こる 空間的な変化 を表す数学の基礎的な分野です。



気体の拡散




熱移動

# 本日の講義

ベクトルと内積・外積

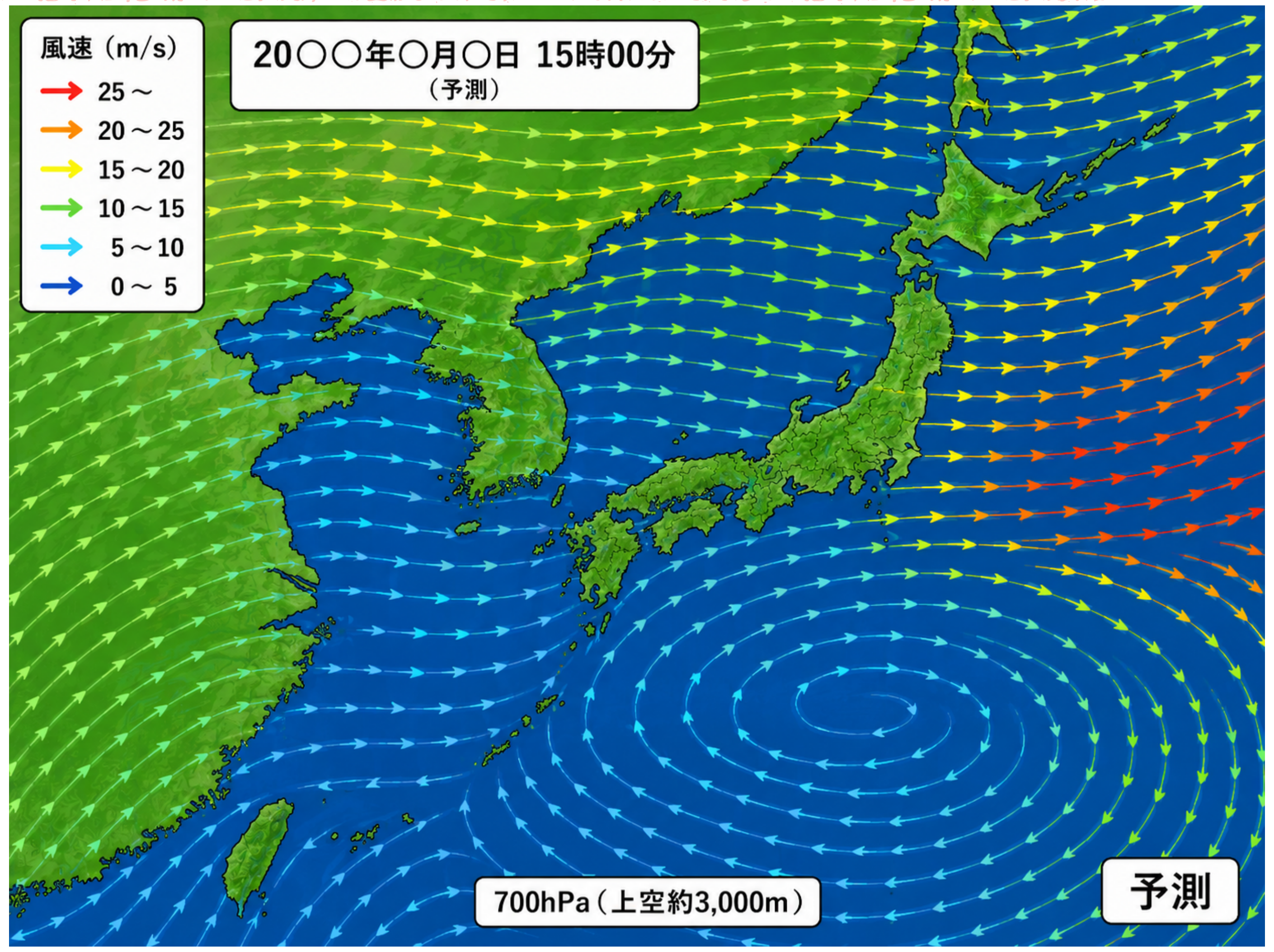
# ベクトルとスカラー

ベクトル（vector）とは、向きと大きさを持つ量。

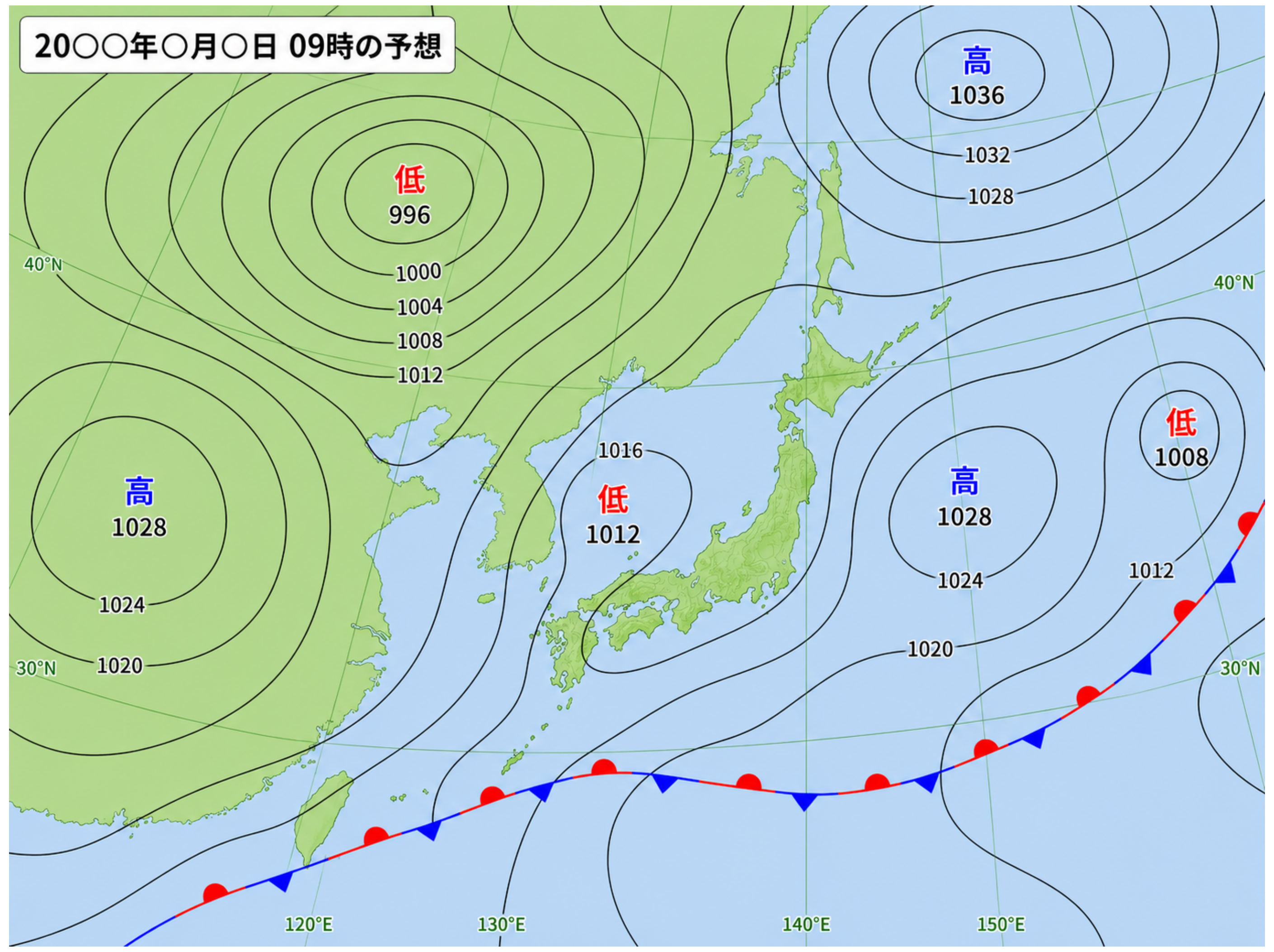
例：力、速度、電場、磁場、風（空気の流れ）

スカラー（scalar）とは、大きさ（数値）だけを持つ量。

例：温度、質量、密度、圧力



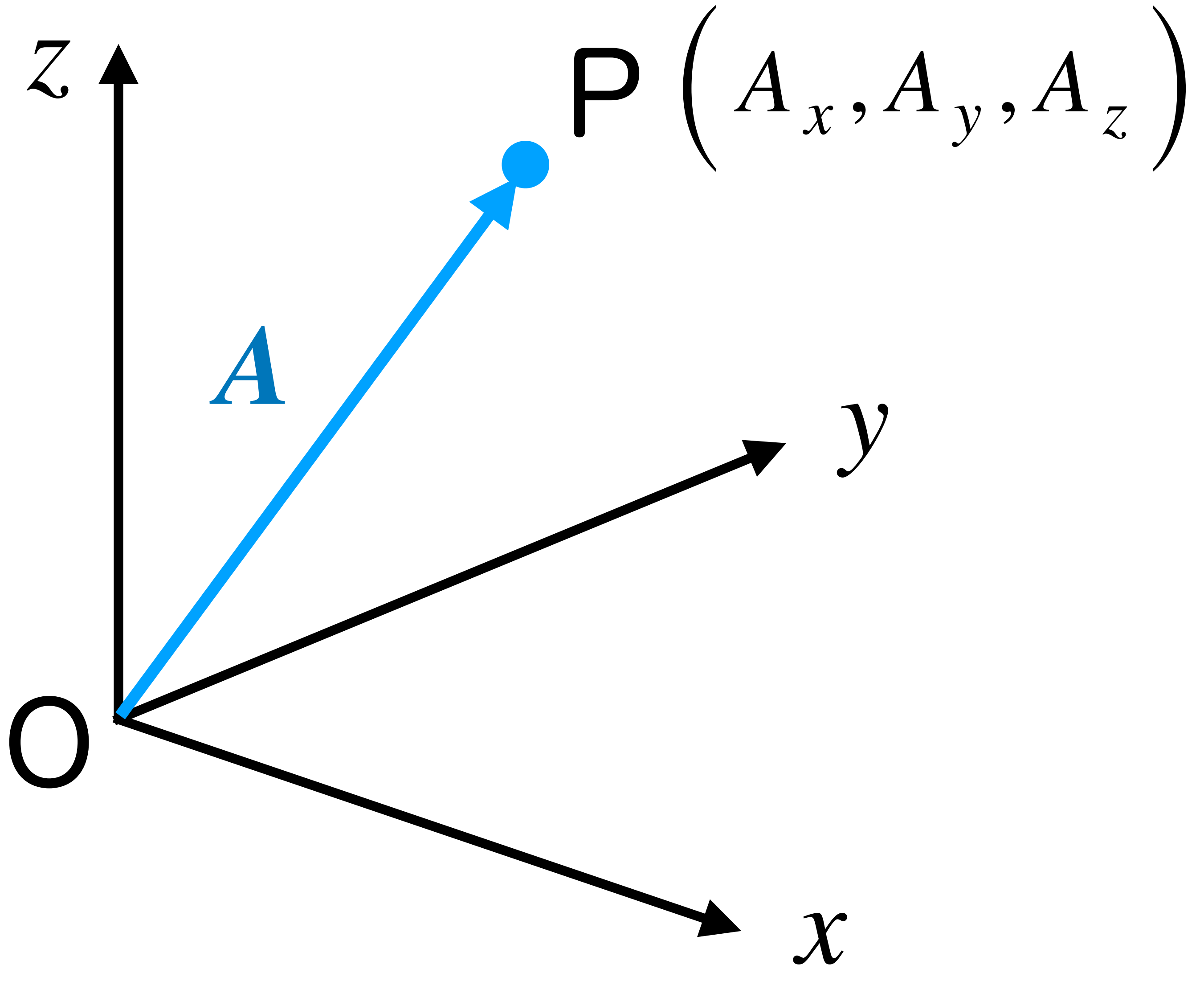

風予測図（自作の模式図）




気圧配置図（自作の模式図）

# ベクトルの表し方

直交座標系 O-$xyz$ を考える。




原点 O を始点、点 P を終点とするベクトルを

$$\boldsymbol{A} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

と書く。

点 P の座標が $(A_x, A_y, A_z)$ であるとき、 これを $\boldsymbol{A}$ の 成分（ 成分表示 ）という。

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

$A_x$ , $A_y$ , $A_z$ をそれぞれ $\boldsymbol{A}$ の $x$ 成分、$y$ 成分、$z$ 成分 という。

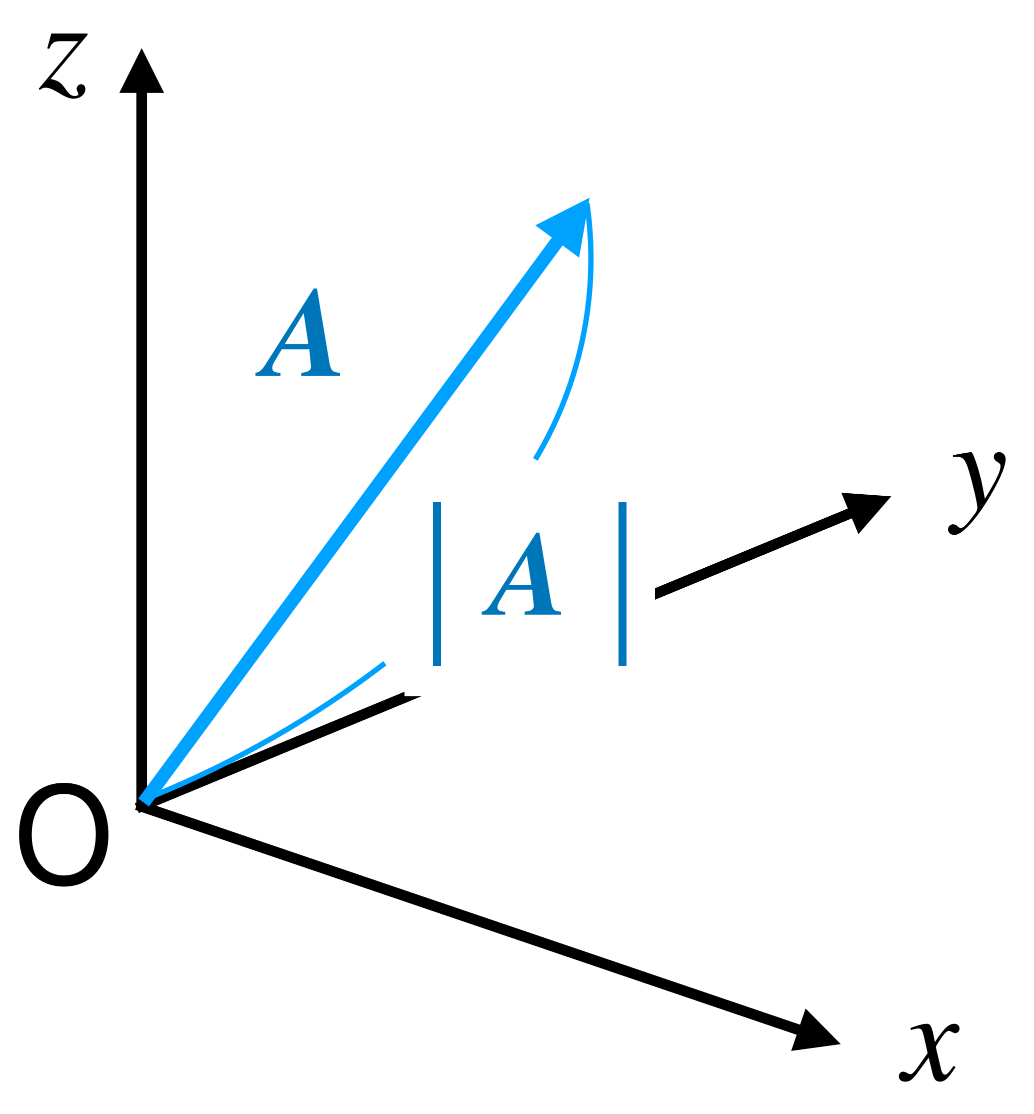
この授業ではベクトルをアルファベットの太字（ $\boldsymbol{A}$ ）で表す。

# ベクトルの大きさ（長さ）

ベクトル $\boldsymbol{A}$ について、$\boldsymbol{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right)$ のとき

$$\left|\boldsymbol{A}\right| = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}$$

をベクトル $\boldsymbol{A}$ の 大きさ という。

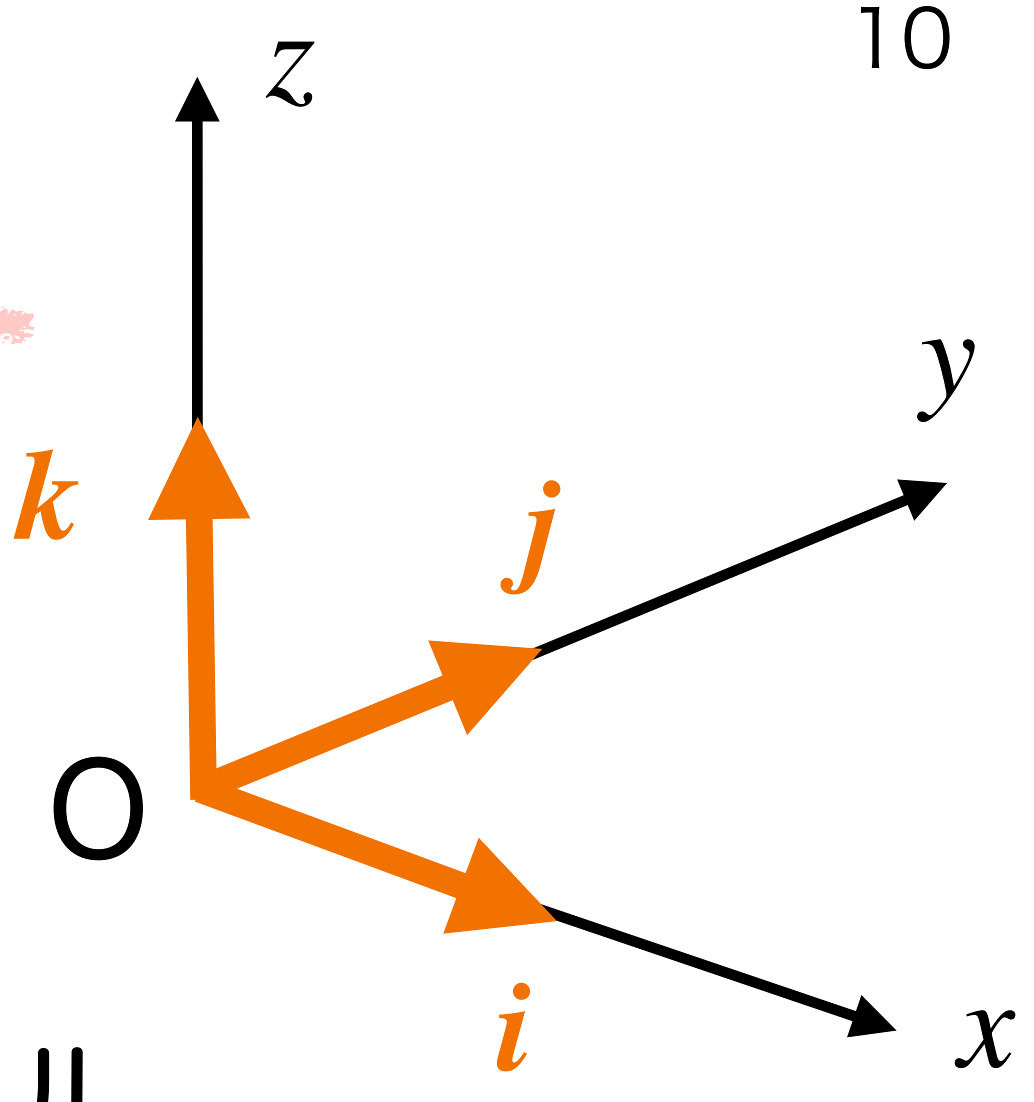



始点と終点が一致するベクトルを 零ベクトル とよび、$\boldsymbol{0}$ と書く。

$$\boldsymbol{0} = (0, 0, 0)$$

$$\left|\boldsymbol{0}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0$$

# 基本ベクトル




大きさが 1 のベクトルを 単位ベクトル という。

つぎの3つのベクトルを 基本ベクトル とよぶ。

$\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $x$ 軸の正の向きを向く長さ 1 のベクトル

$\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $y$ 軸の正の向きを向く長さ 1 のベクトル

$\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$, $z$ 軸の正の向きを向く長さ 1 のベクトル

基本ベクトルは単位ベクトルである。

$$|\boldsymbol{i}| = |\boldsymbol{j}| = |\boldsymbol{k}| = 1$$

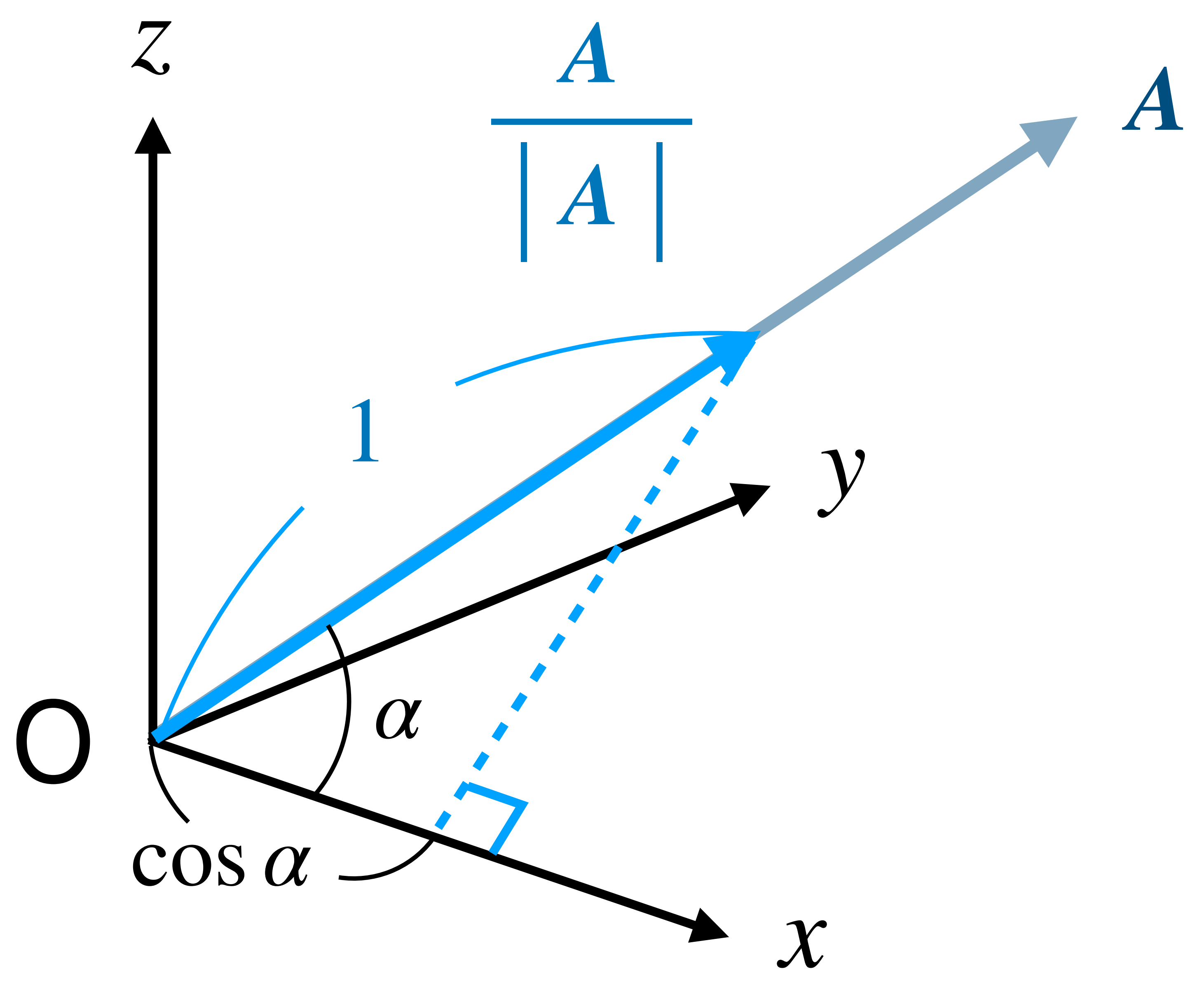
任意のベクトル $\boldsymbol{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right)$ は $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ と表せる。

# 正規化

$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、

$$\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$$

は、$\boldsymbol{A}$ と同じ向きの単位ベクトルである。




向きはそのままで、大きさを 1 にそろえる操作を 正規化 という。

$\boldsymbol{A}$ と $x$ 軸、$y$ 軸、$z$ 軸の正の向きとなす角をそれぞれ $\alpha$ , $\beta$ , $\gamma$ とおけば、

$\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$ の成分は $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ と表される。

$$\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \cos\alpha\, \boldsymbol{i} + \cos\beta\, \boldsymbol{j} + \cos\gamma\, \boldsymbol{k}$$

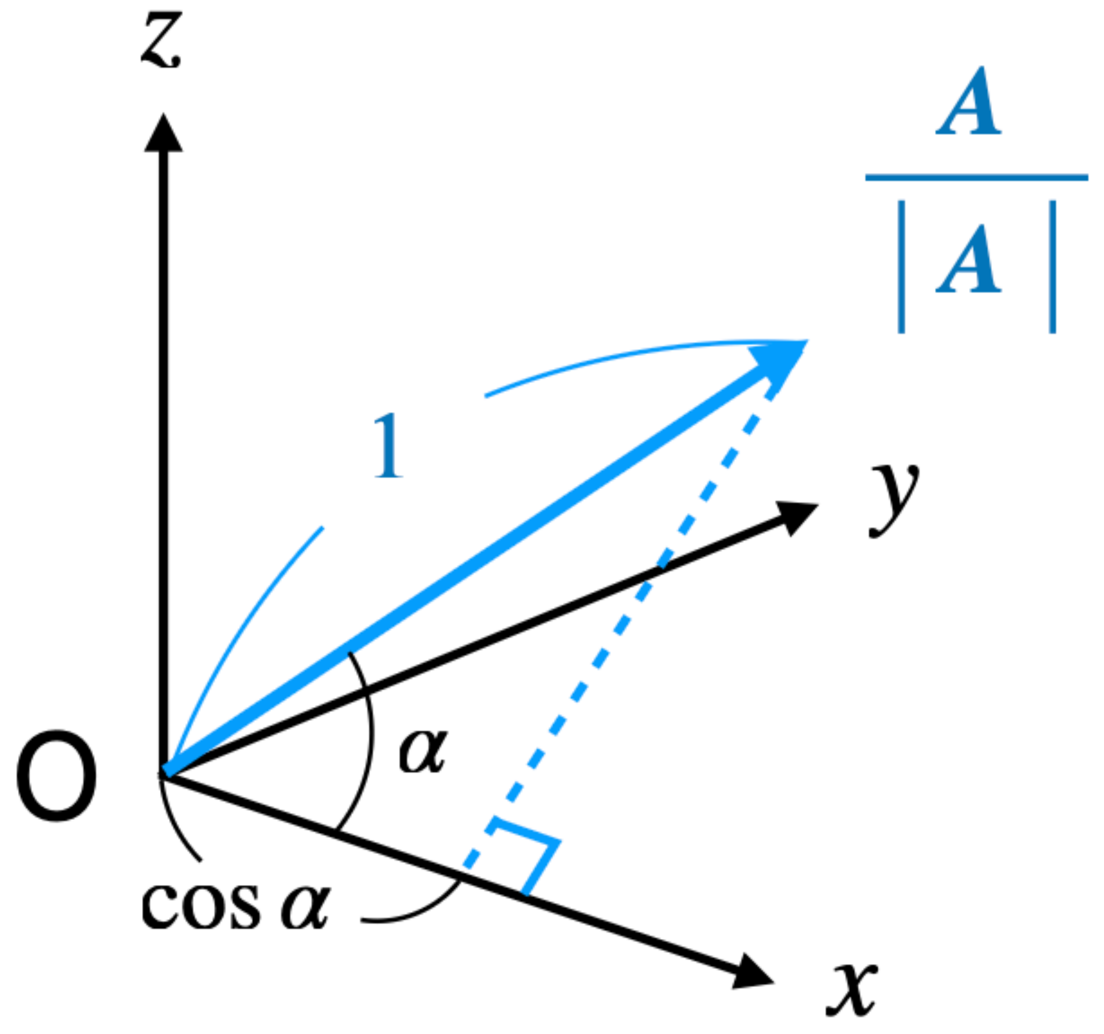
# 方向余弦

$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ とする。$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$ のとき、

$$\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\left(A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}\right) = \frac{A_x}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{i} + \frac{A_y}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{j} + \frac{A_z}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{k}$$

となることから、前ページの成分表示と比較してつぎを得る。

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|\boldsymbol{A}|}, \quad \cos\beta = \frac{A_y}{|\boldsymbol{A}|}, \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{|\boldsymbol{A}|}$$




この $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ を $\boldsymbol{A}$ の 方向余弦 という。

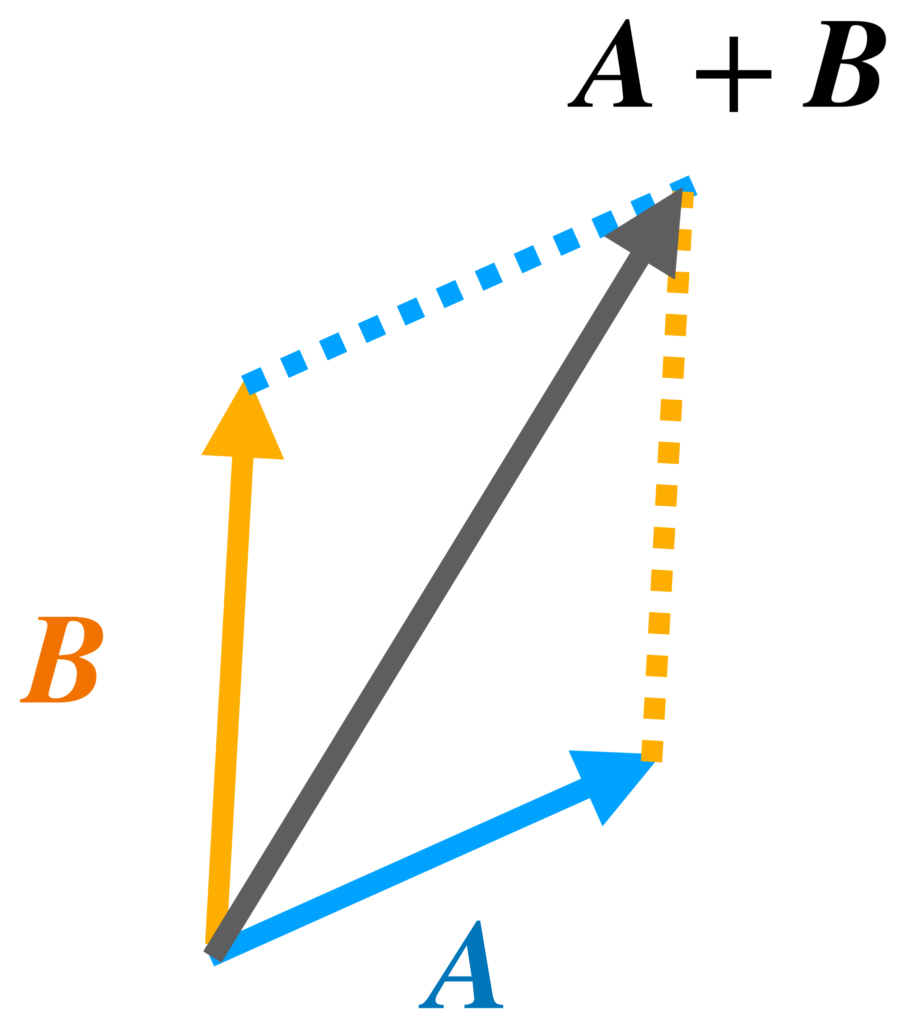
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ が常に成り立つ。← たしかめよ。

# ベクトルの加法とスカラー倍

２つのベクトル $\boldsymbol{A}$ , $\boldsymbol{B}$ について、それぞれ

$$\boldsymbol{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right), \boldsymbol{B} = \left(B_x, B_y, B_z\right)$$

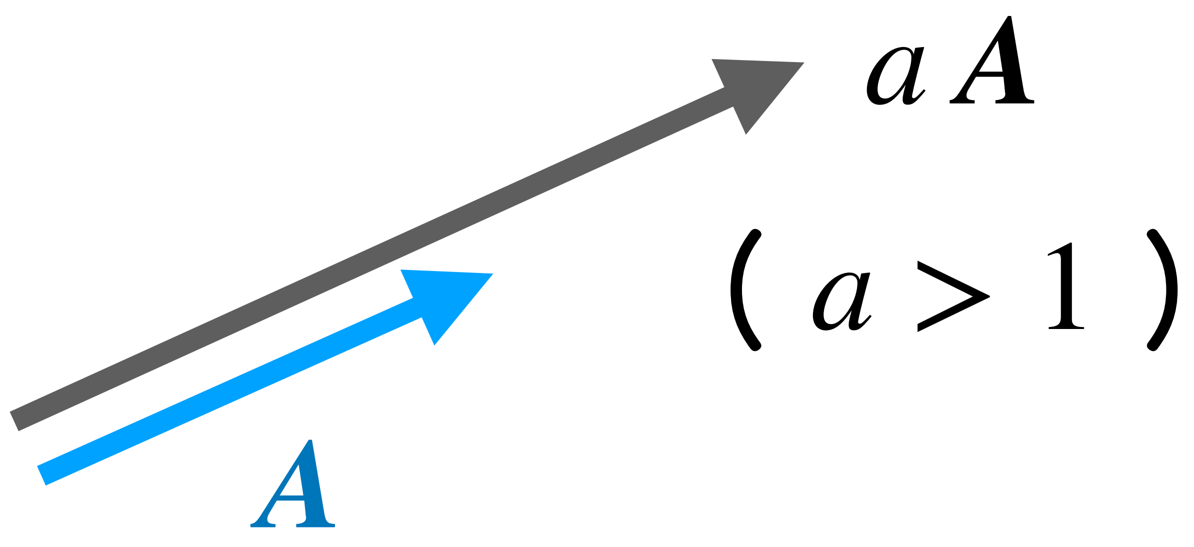
であるとき、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の和をつぎで定める。

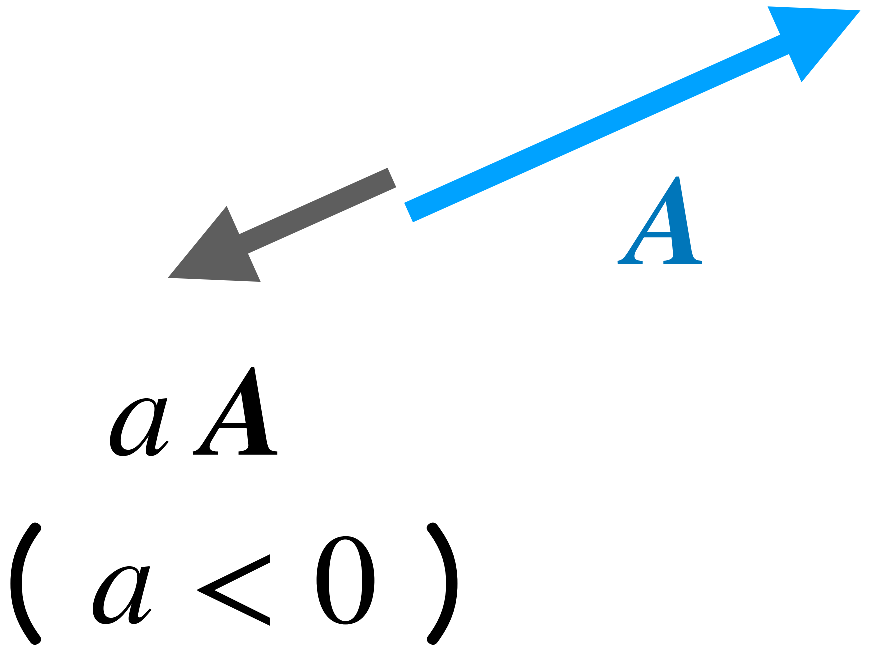



$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \left(A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z\right)$$

また、$a$ をスカラー（ 実数 ）としてスカラー倍をつぎで定める

$$a\boldsymbol{A} = \left(aA_x, aA_y, aA_z\right)$$



# 内積

２つのベクトル $\boldsymbol{A}$ , $\boldsymbol{B}$ について、$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ , $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$ とする。

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のつくる角の大きさを $\theta$ とする（$0 \leq \theta \leq \pi$）。

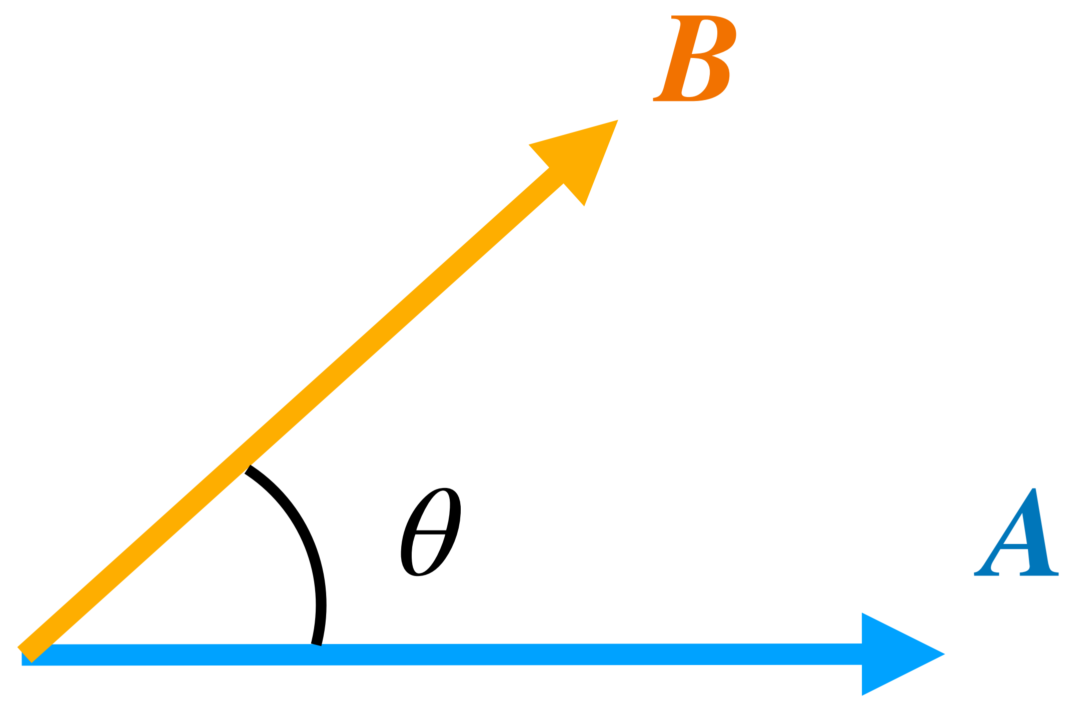
つぎで定まる数を $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の 内積、または スカラー積 という。

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta$$

$0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} > 0$ , $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ のとき $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} < 0$ ,

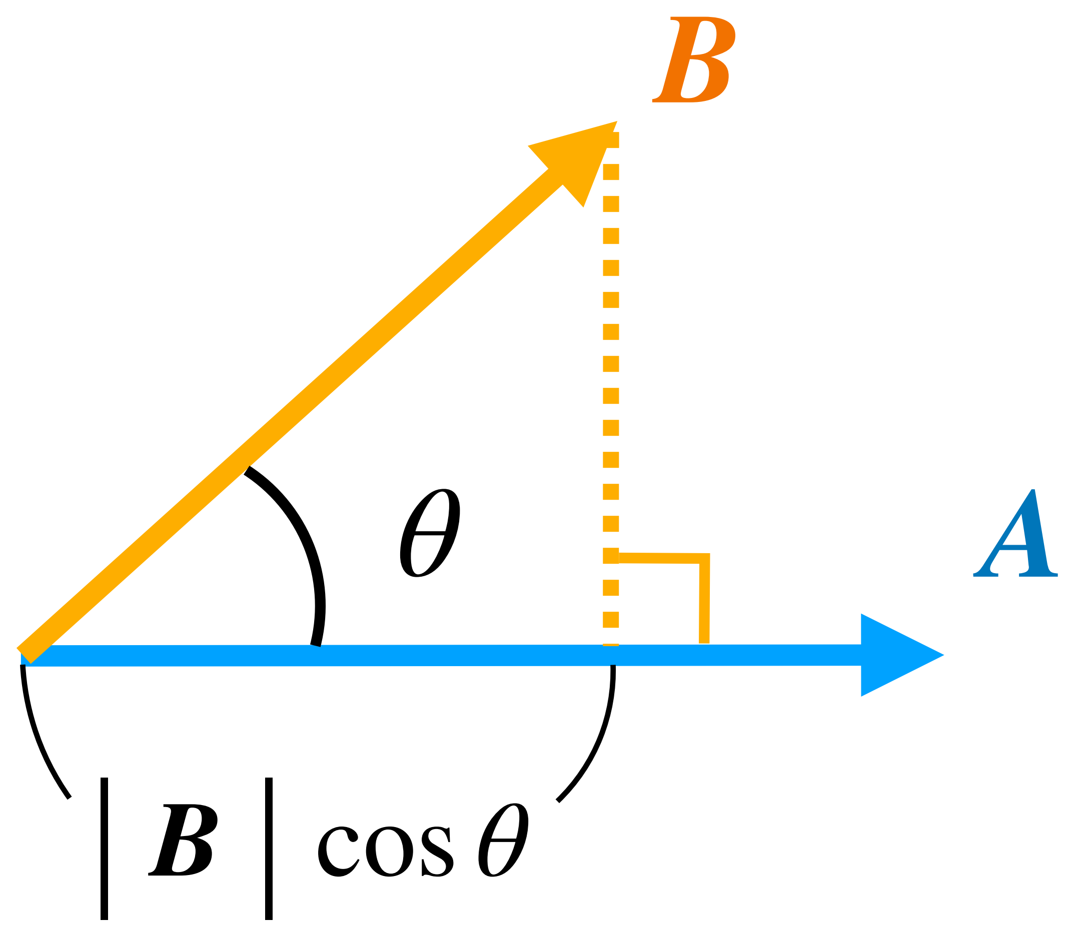
$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ である。

$\boldsymbol{A}$ , $\boldsymbol{B}$ のいずれかが $\boldsymbol{0}$ であるとき、$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ と定める。



# 正射影と内積の成分表示

$|\boldsymbol{B}|\cos\theta$ を $\boldsymbol{B}$ の $\boldsymbol{A}$ 方向への 符号付き正射影成分 という。




$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|\,(\boldsymbol{B}\text{ の }\boldsymbol{A}\text{ 方向への符号付き正射影成分})$$
$$= |\boldsymbol{B}|\,(\boldsymbol{A}\text{ の }\boldsymbol{B}\text{ 方向への符号付き正射影成分})$$

$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ , $\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}$ とするとつぎが成り立つ。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad \cdots \text{①}$$

練習問題 1 で証明してみよう。余弦定理を使う。

① によって、内積に関する様々な性質が導かれる（次ページ）。

# 内積の性質（1）

すべてのベクトル $\boldsymbol{A}$ , $\boldsymbol{B}$ , $\boldsymbol{C}$ とスカラー $k$ についてつぎが成り立つ：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$

$$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$$

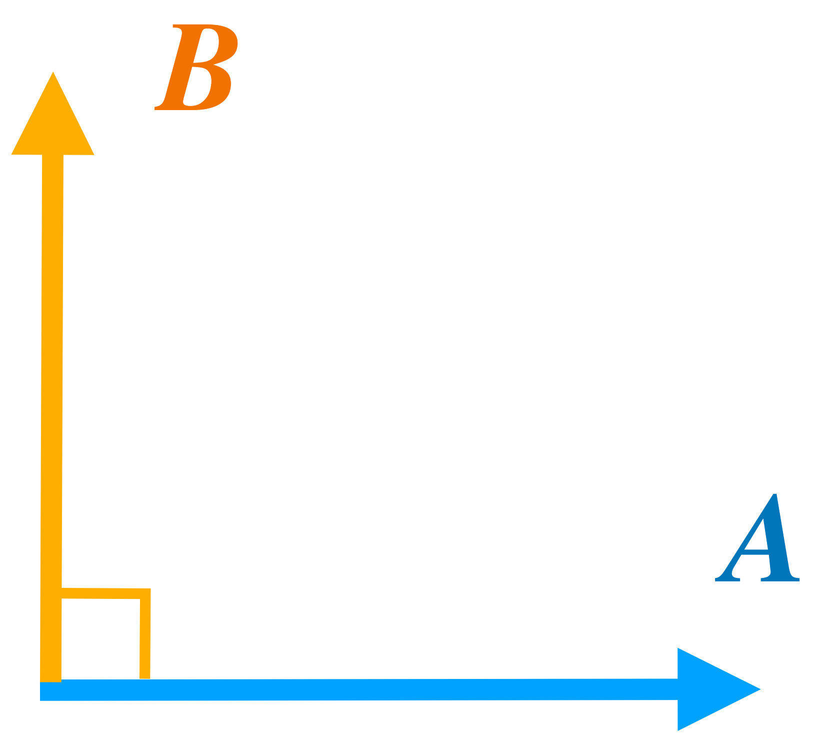
$$\left(k\boldsymbol{A}\right)\cdot\boldsymbol{B} = k\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right) = \boldsymbol{A}\cdot\left(k\boldsymbol{B}\right)$$

$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ , $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、つぎが成り立つ：

$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が直交する（$\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$ と書く）

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$$




$\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{B}$

# 内積の性質（2）

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|\cos 0 = |\boldsymbol{A}|^2$$

が成り立つことよりつぎを得る。

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$$

$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角を $\theta$ とすると

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}\sqrt{B_x{}^2 + B_y{}^2 + B_z{}^2}}$$

となり、成分のみで $\cos\theta$ を求めることができる。

さらにつぎが成り立つ： $A_x = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}$, $A_y = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}$, $A_z = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}$ $\leftarrow$ たしかめよ

# 外積

$\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$ , $\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{i} + B_y \boldsymbol{j} + B_z \boldsymbol{k}$ に対し、

つぎで定まるベクトルを $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の 外積、または ベクトル積 という。

$$\boxed{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right) \boldsymbol{i} - \left(A_x B_z - A_z B_x\right) \boldsymbol{j} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right) \boldsymbol{k}}$$

$$= \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

（ 行列式の第 1 行に関する余因子展開 ）

# 行列式の復習



$n$ 次正方行列を考える。つぎのように成分表示されているとする。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

つぎで定まる値を $A$ の 行列式（ determinant ）という。

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \qquad (\mathrm{sgn}(\sigma) \in \{\pm 1\})$$

行列式のことを $|A|$ や、$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ という記号でも表す。

注意：ベクトルの大きさも $|A|$ と書きます。文脈にあわせて区別してください。

# サラスの方法

$n = 2, 3$ のときの行列式の公式の覚え方

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}} - \underline{a_{12}a_{21}}$$

$-\qquad +$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \underline{a_{11}a_{22}a_{33}} + \underline{a_{13}a_{21}a_{32}} + \underline{a_{12}a_{23}a_{31}}$$

$$- \underline{a_{13}a_{22}a_{31}} - \underline{a_{12}a_{21}a_{33}} - \underline{a_{11}a_{23}a_{32}}$$

$-\quad +\quad -\quad +\quad -\quad +$

注意：サラスの方法は 3 次までの行列式で、4 次以上の行列式には使えません。

# 余因子

$A = \left(a_{ij}\right)$ ： $n$ 次正方行列

$A$ の $i$ 行と $j$ 列を取り除いてできる $(n-1)$ 次正方行列の行列式を

$(-1)^{i+j}$ 倍したものを $A$ の $(i, j)$ **余因子** といい、$\Delta_{ij}$（デルタ）と書くことにする。

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{array}{cc} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & i\ \text{行} \\ j\ \text{列} & \end{array}$$

取り除く

# 余因子展開

一般につぎが成り立つ。

定理　$A = \left(a_{ij}\right)$ ： $n$ 次正方行列

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ik} \quad (= a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in})$$

（ 第 $i$ 行に関する 余因子展開 ）

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\Delta_{kj} \quad (= a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj})$$

（ 第 $j$ 列に関する 余因子展開 ）

# 3次正方行列の余因子展開



3 次正方行列 $A$ の行列式 $|A|$ を第 1 行に関する余因子展開で求めよう。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}\Delta_{1k}$$

$$= a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$$

$$- a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

# 外積の性質

すべてのベクトル $\boldsymbol{A}$ , $\boldsymbol{B}$ , $\boldsymbol{C}$ とスカラー $c$ についてつぎが成り立つ：

（1） $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$

（2） $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = - \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$

（3） $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}$ ， $\boldsymbol{C} \times (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{B}$

（4） $(c\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{B} = c\,(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$ ， $\boldsymbol{A} \times (c\boldsymbol{B}) = c\,(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$

（注１）通常の数の演算とも、ベクトルの演算とも異なることに注意する。

（注２）結合法則は一般には成り立たない：$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$

# 自然言語処理技術における内積の応用

## ベクトルデータベース

単語や文章などの意味や文脈を反映するように学習された数値表現のデータベース。

テキストデータ等を数値の列にし、$n$ 次元のベクトル空間に埋め込む。

↓

数値化したデータの「向きの近さ」によって、意味的な類似を判断できる。

類似度は コサイン類似度 によって計算される：$\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}$

類似度を検索に利用すれば、意味的に近い言葉を検索結果として導ける。