先端応用化学特別講義Ⅰ

5回目講義

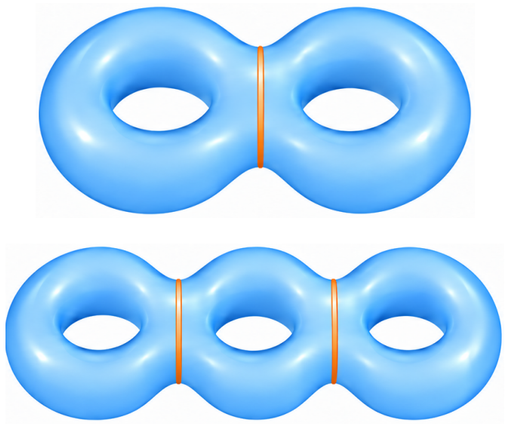
畠中　英里

閉曲面を分類する

閉曲面の種類をどう決めるか

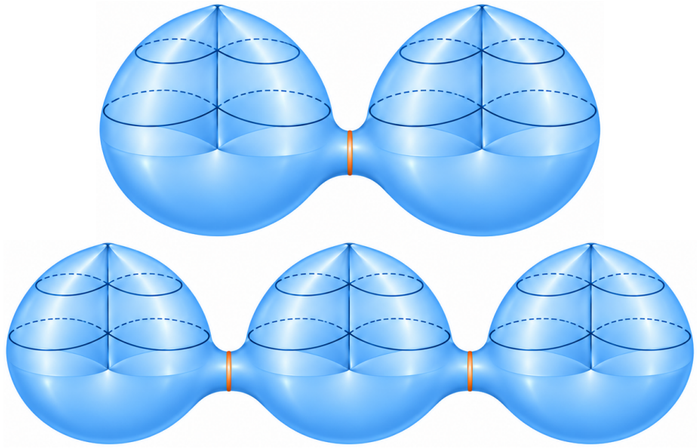
曲面をつないで、さまざまな閉曲面を作れることを見ます。
向き付け可能性とオイラー標数を使い、これらの曲面を分類します。

トーラスをつないで作る



向き付け可能

射影平面をつないで作る



向き付け不可能

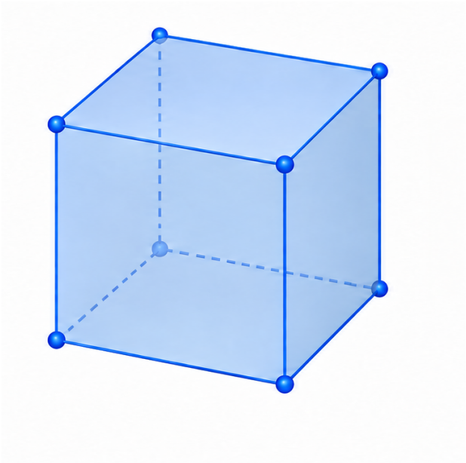
種類を決める手がかり

向き付け可能性
オイラー標数
↓
閉曲面の分類

連結な閉曲面の種類は、
向き付け可能性とオイラー標数で決めることができます。

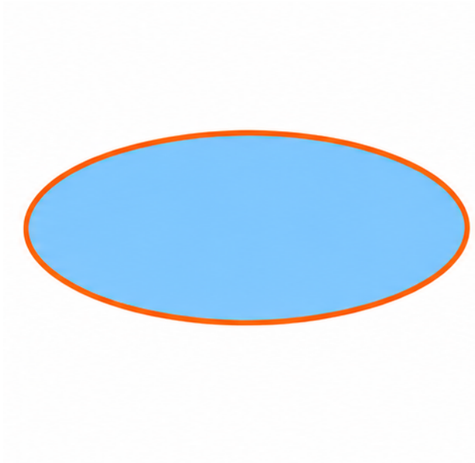
この回で扱う曲面

円板と同じ形の面を、有限枚、辺で貼って作れる曲面を扱います。
このうち境界のない曲面を「閉曲面」と呼びます。
今日は、全体がひと続きの「連結な閉曲面」を分類します。



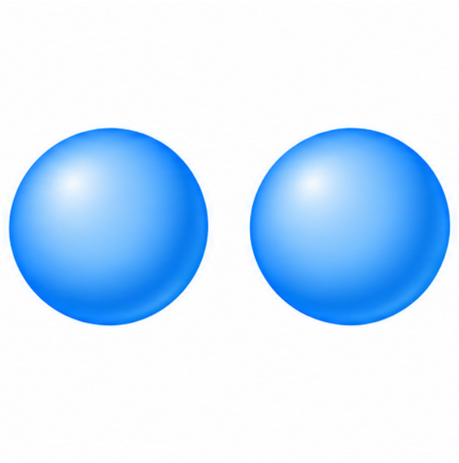
立方体の表面

連結な閉曲面



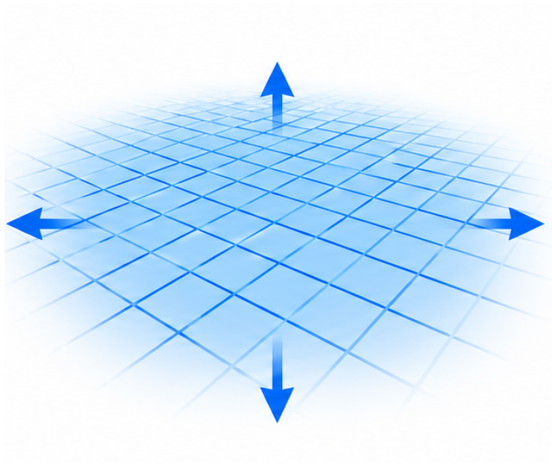
円板

閉曲面ではない



二つの球面

連結ではない



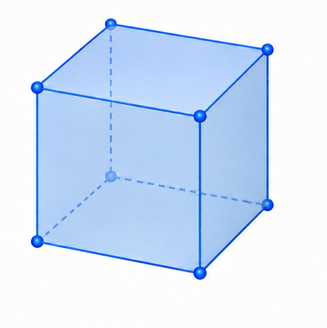
無限の平面

閉曲面ではない

面を除いたときのオイラー標数

オイラー標数は $\chi = V - E + F$ 。頂点数–辺数＋面数で求めます。
同相（トポロジーの意味で同じ形）なら値が一致する不変量です。
分割がある曲面から面の内部を除くと、オイラー標数はどう変わるでしょうか。
面の周りの頂点と辺は残します。境界がある曲面でも同じように考えます。

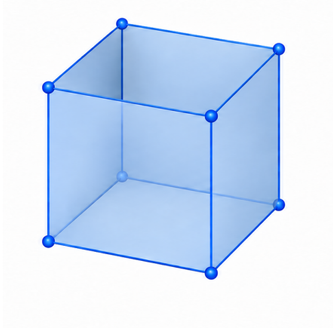
面を取り除く前



$\chi = 8 - 12 + 6 = 2$

→

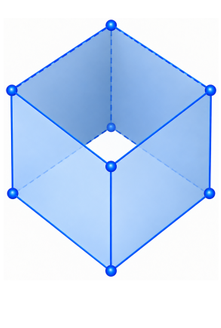
上の面の内部を除く



$\chi = 8 - 12 + 5 = 1$

→

底の面の内部も除く



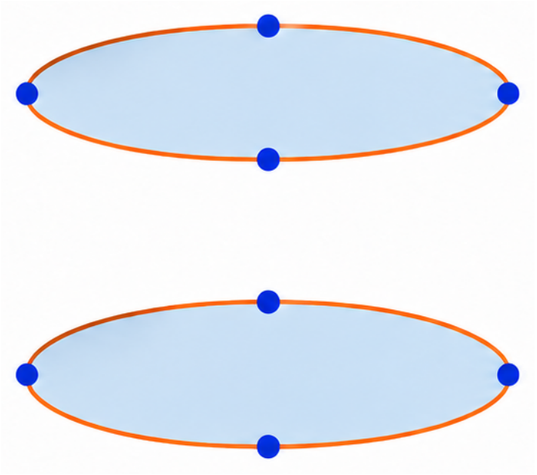
$\chi = 8 - 12 + 4 = 0$

面の内部を一枚除くごとに、オイラー標数は 1 減ります。

二枚の円板から球面を作る

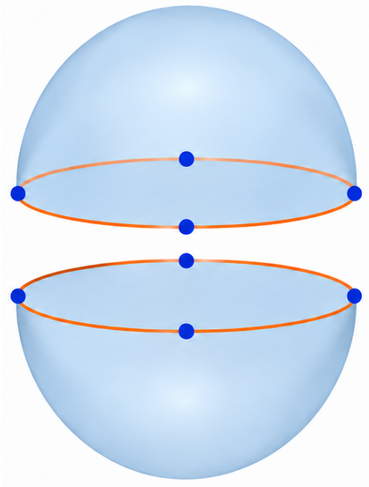
面を除く場合に続き、今度は境界を貼ったときのオイラー標数の変化を調べます。
まず、二枚の円板の境界どうしを一周貼り合わせ、球面を作ります。

円板を二枚用意する

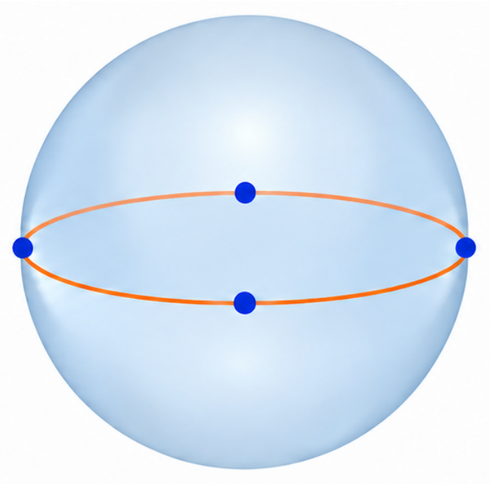


各円板：$\chi = 4 - 4 + 1 = 1$

上と下のふたに曲げる



境界全体を貼る



$\chi = 4 - 4 + 2 = 2$

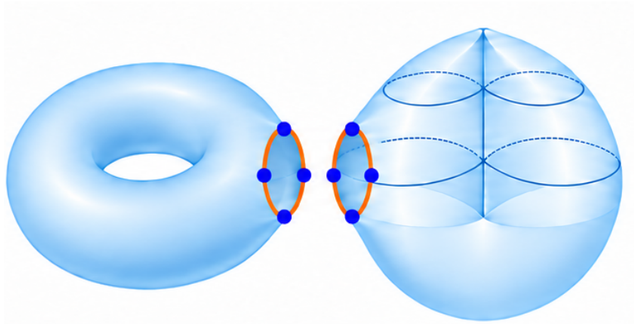
2 枚の円板それぞれのオイラー標数を足すと、球面の値と一致します。

境界を貼った曲面のオイラー標数

今度は、境界のある二つの曲面を貼り合わせるときのオイラー標数を調べます。

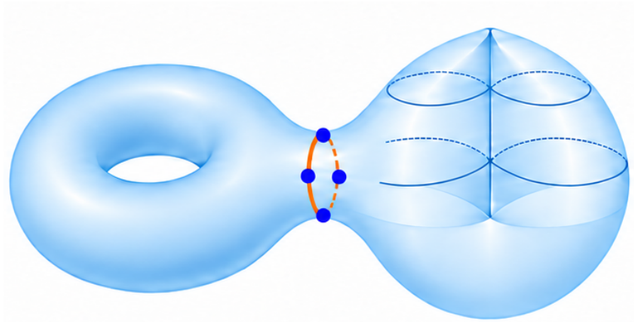
一般に、境界のある曲面 A, B の境界を一つずつ選び、
その境界全体を貼り合わせて、曲面 C を作ります。

境界のある曲面



A　　B

選んだ境界を貼った曲面



C

貼り合わせによる変化：境界の頂点は 8 個から 4 個、辺は 8 本から 4 本へ。
面の数は変わりません。

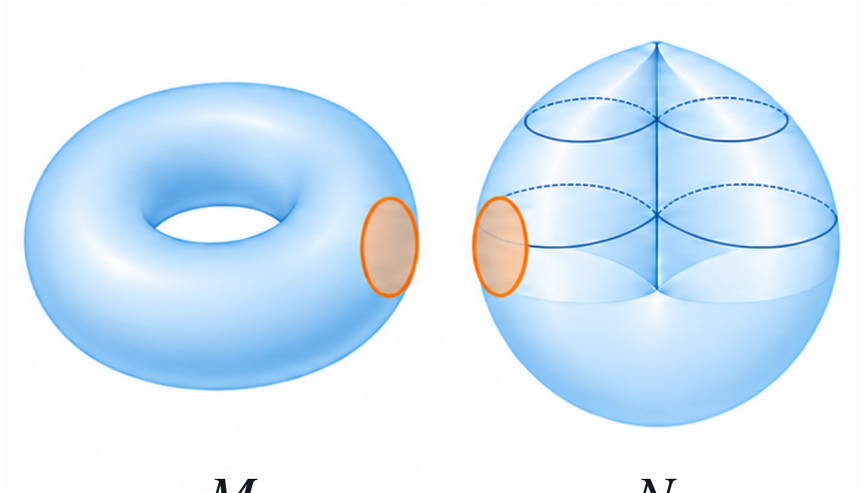
χ_A、χ_B、χ_Cは、A、B、Cそれぞれのオイラー標数です。

頂点と辺が同じ数だけ減るので、 $\chi_C = \chi_A + \chi_B - 4 + 4 = \chi_A + \chi_B$

二つの閉曲面をつなぐ準備

二つの閉曲面 M, N を一つにつなぐ「連結和」という操作を紹介します。
初めはどちらにも境界がないので、円板の内部を一つずつ取り除きます。

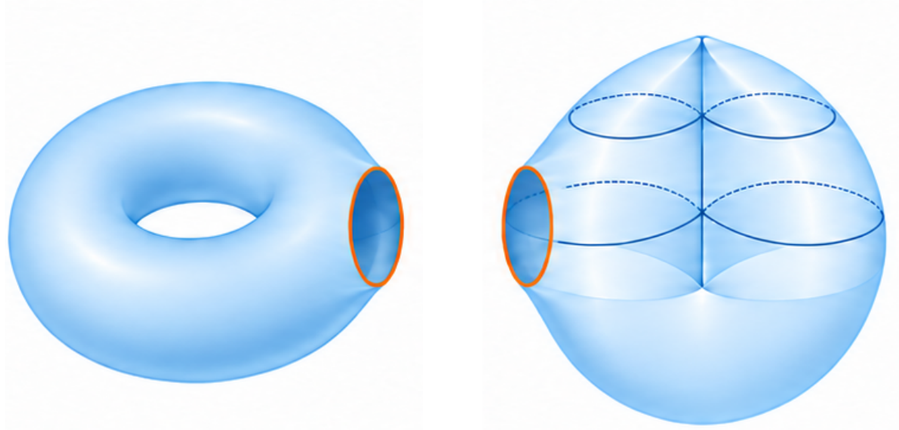
円板を一つずつ選ぶ



M
χ_M

N
χ_N

内部を一つずつ取り除く



M から円板の
内部を除いた曲面
$\chi_M - 1$

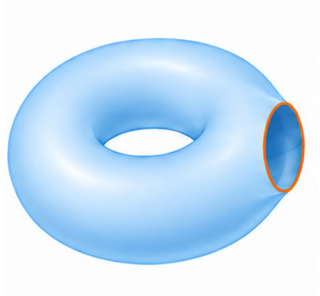
N から円板の
内部を除いた曲面
$\chi_N - 1$

一つずつできた境界の円周を、次に貼り合わせます。

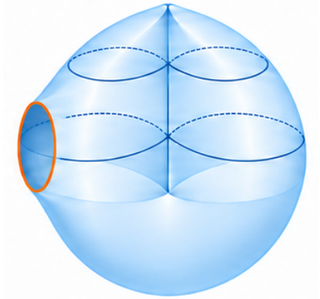
連結和とオイラー標数

用意した二つの境界を貼り合わせます。できる曲面を $M\#N$ と書きます。
境界を貼った曲面のオイラー標数は、貼る二つの境界付き曲面の値の和でした。

円板の内部を除いた後

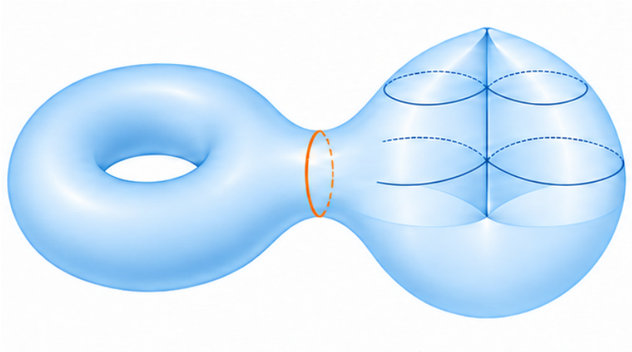


M から円板の
内部を除いた曲面
$\chi_M - 1$



N から円板の
内部を除いた曲面
$\chi_N - 1$

境界を貼った後



M と N の連結和 $M\#N$

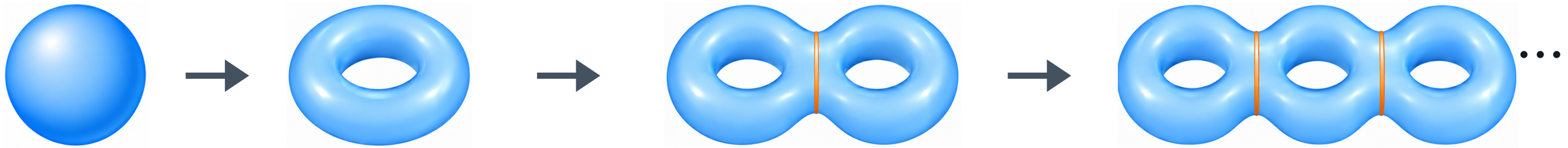
$$\chi_{M\#N} = (\chi_M - 1) + (\chi_N - 1) = \chi_M + \chi_N - 2$$

連結和のオイラー標数は、元の二つの
値の和から 2 を引くことで求まります。

トーラスの連結和

球面から始めて、トーラスを一つずつ連結和していきます。
球面とトーラスの連結和は、トーラスと同相です。
連結和をとるトーラスの個数を種数 g と呼び、球面は $g = 0$ とします。

球面　　トーラス　　取っ手 2 個　　取っ手 3 個

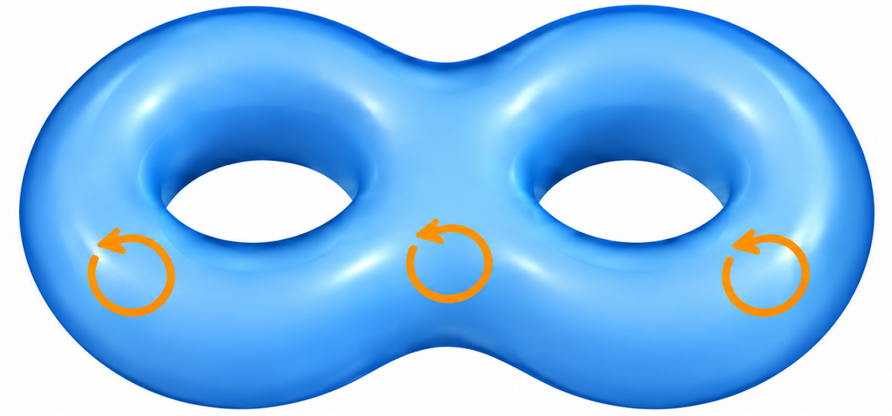


$g = 0$　　$g = 1$　　$g = 2$　　$g = 3$

トーラスとの連結和は、何回でも続けられます。

つないだ曲面の向きをそろえる

第4回では、丸い矢印を面に沿って動かし、回る向きが逆にならないか調べました。
トーラスの連結和は、厚みのある物の表面として作り、物の外側を基準にできます。
丸い矢印を、その場所のすぐ外側から見て反時計回りに描きます。
表面に沿って動かして元の場所に戻しても、外側から見た回る向きは逆になりません。



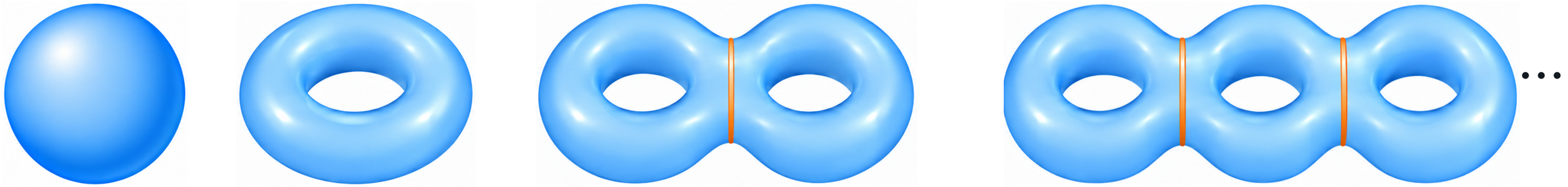
例：トーラス 2 個の連結和

トーラスをいくつ連結和しても、向き付け可能です。

向き付け可能な閉曲面の分類定理

連結で向き付け可能な閉曲面は、球面か、
トーラスをいくつか連結和した曲面と同相です。

球面　　連結和をとるトーラスの個数が種数 g



$g = 0$　　$g = 1$　　$g = 2$　　$g = 3$

連結で向き付け可能な閉曲面は、
種数が同じなら同相で、異なれば同相ではありません。

種数とオイラー標数の関係

種数 g の曲面のオイラー標数 χ を求めます。

球面から始め、トーラスを g 回連結和して、この曲面を作ります。

まず、その過程の 1 回分の操作に注目します。

連結和後のオイラー標数の値 $=$ 0 $+$ 連結和前のオイラー標数の値 -2

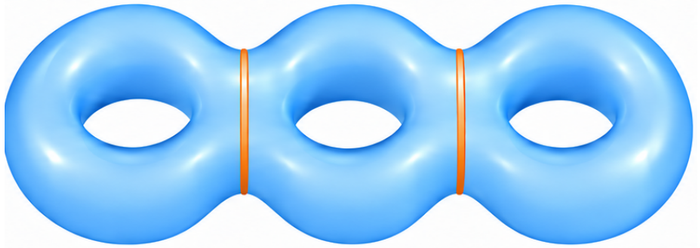
0：トーラスのオイラー標数

連結和前のオイラー標数の値：それまでに作った曲面

トーラスを一つ連結和するたびに、
オイラー標数は 2 減ります。

球面の値 2 から、 g 回で $2g$ 減るので、

$\chi = 2 - 2g$, $g = (2 - \chi)/2$



例：種数 $g = 3$

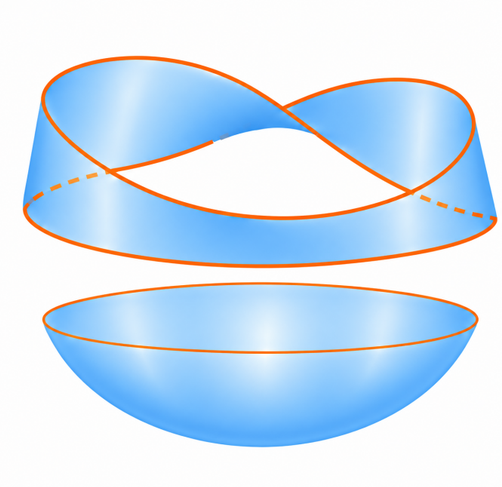
$\chi = 2 - 2 \cdot 3 = -4$

種数 g とオイラー標数 χ は、
一方が分かれば他方も求められます。

向き付け不可能な閉曲面

ここからは、向き付け不可能な閉曲面の分類を考えます。
第4回では、メビウスの帯と円板の境界全体を貼り合わせて、射影平面を作りました。

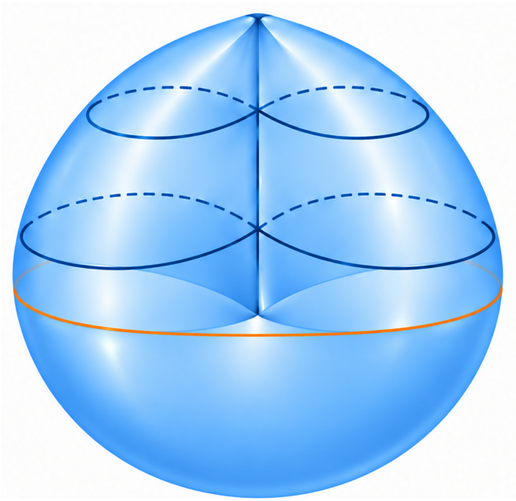
メビウスの帯と円板



帯は $\chi = 0$ 、円板は $\chi = 1$ 。



射影平面



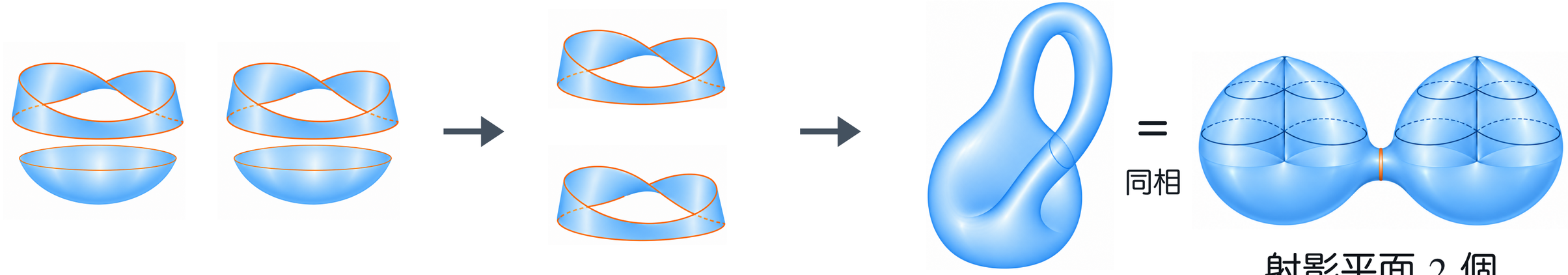
$\chi = 0 + 1 = 1$

射影平面のオイラー標数は $\chi = 1$ です。

射影平面 2 個の連結和

それぞれの射影平面から円板の内部を除くと、メビウスの帯が 2 本残ります。
第4回で見たように、 2 本のメビウスの帯の境界全体を貼り合わせると、
クラインのつぼになります。

射影平面を 2 個用意する　　円板の内部を除く　　帯の境界を貼る



円板と帯で表したもの　　残る二本のメビウスの帯　　クラインのつぼ　　射影平面 2 個の連結和

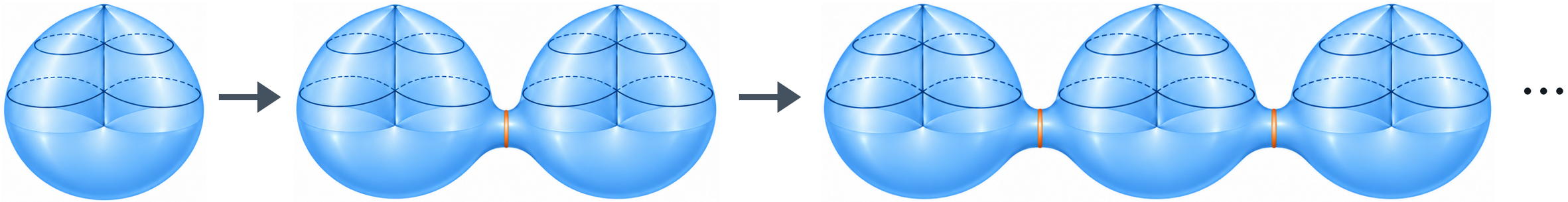
射影平面 2 個の連結和は、クラインのつぼと同相です。

射影平面の連結和

射影平面を一つずつ連結和していきます。

連結和をとる射影平面の個数を k とします。

射影平面　　射影平面 2 個の連結和　　射影平面 3 個の連結和



クラインのつぼと同相

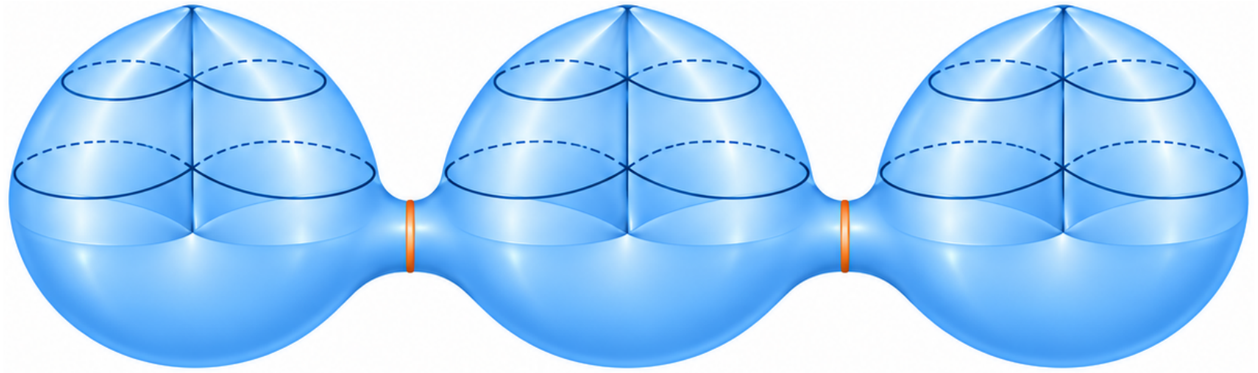
$k = 1$　　$k = 2$　　$k = 3$

射影平面との連結和も、何回でも続けられます。

連結和と向き付け不可能性

前のページで作った曲面は、いずれもクロスキャップ部分を含みます。
連結和は円板部分で行うので、クロスキャップ部分は残っています。
この部分はメビウスの帯と同じ曲面なので、向き付け不可能です。
その部分の向きをそろえられないので、曲面全体の向きもそろえられません。

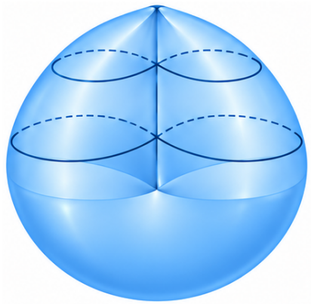
各曲面の上側：クロスキャップ部分（メビウスの帯と同じ曲面）



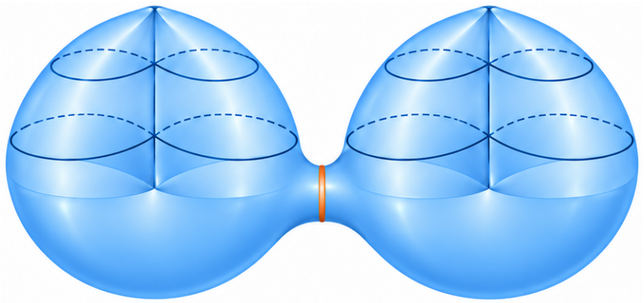
射影平面を何個連結和しても、向き付け不可能です。

向き付け不可能な閉曲面の分類定理

連結で向き付け不可能な閉曲面は、
射影平面をいくつか連結和した曲面と同相です。

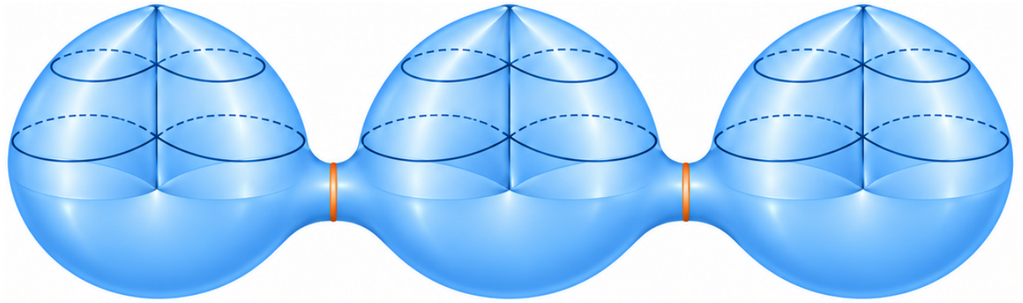


1 個



クラインのつぼと同相

2 個



3 個

…

連結で向き付け不可能な閉曲面は、
射影平面の個数が同じなら同相で、異なれば同相ではありません。

射影平面の個数とオイラー標数

射影平面 k 個の連結和のオイラー標数 χ を求めます。

射影平面 1 個から始め、残りの $k-1$ 個を順に連結和します。

まず、その過程の 1 回分の操作に注目します。

連結和後のオイラー標数の値 $=$ 1 $+$ 連結和前のオイラー標数の値 -2

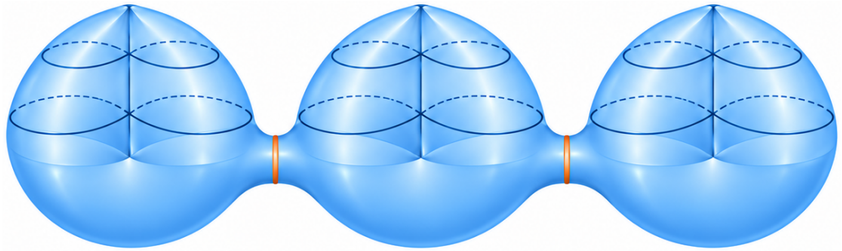
1：射影平面のオイラー標数

-2：それまでに作った曲面

射影平面を一つ連結和するたびに、
オイラー標数は 1 減ります。

最初の 1 個に、残りの $k-1$ 個を加えると、

$\chi = 1-(k-1) = 2-k$, $k = 2-\chi$



例： $k = 3$

$\chi = 2-3 = -1$

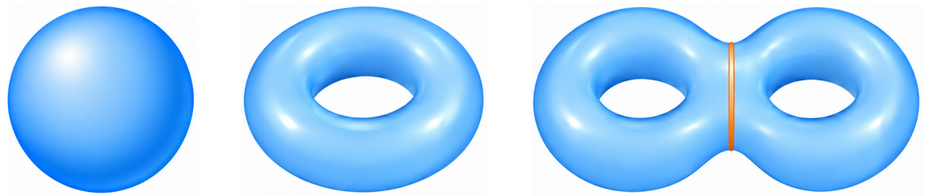
連結和をとる射影平面の個数 k とオイラー標数 χ は、
一方が分かれば他方も求められます。

閉曲面の分類定理

連結な閉曲面は、向き付け可能か不可能かで、次のように分類できます。

向き付け可能

トーラスの連結和

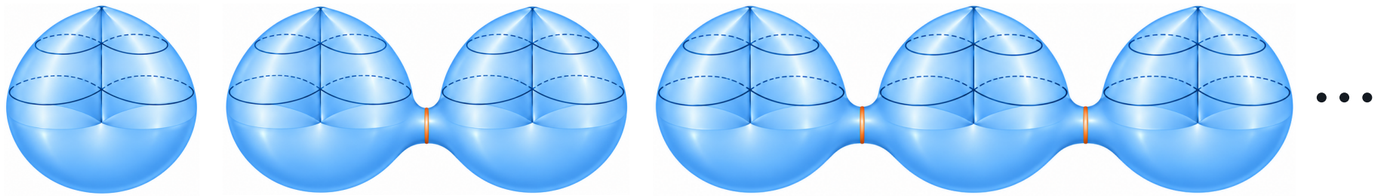


$g = 0$　　$g = 1$　　$g = 2$

$$\chi = 2 - 2g(g = 0, 1, 2, \ldots)$$

向き付け不可能

射影平面の連結和



$k = 1$　　$k = 2$　　$k = 3$

$$\chi = 2 - k(k = 1, 2, 3, \ldots)$$

すべての連結な閉曲面が、この二通りの作り方で尽くされます。

閉曲面を分類する手順

連結な閉曲面について、向き付け可能性とオイラー標数 χ を使います。

向き付け可能か

可能

球面（ $g = 0$ ）、または
トーラス g 個の連結和
$(g = 1, 2, \ldots)$

$$\chi = 2 - 2g$$

不可能

射影平面 k 個の連結和
$(k = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\chi = 2 - k$$

例題

次の各条件を満たす連結な閉曲面の種類を答えなさい。
答えは「球面」「トーラス○個の連結和」「射影平面○個の連結和」、
または「存在しない」とし、存在しない場合は理由も述べなさい。

A　向き付け可能
$\chi = -4$

B　向き付け不可能
$\chi = -4$

C　向き付け可能
$\chi = 1$

D　向き付け可能
$\chi = 2$

向き付け可能性に対応する関係式を使って、曲面の種類を考えます。

例題の答え

向き付け可能性に対応する関係式に、オイラー標数を代入します。

A　向き付け可能

$2-2g=-4 \Rightarrow g=3$

トーラス 3 個の連結和

B　向き付け不可能

$2-k=-4 \Rightarrow k=6$

射影平面 6 個の連結和

C　向き付け可能

$\chi=2-2g$ は偶数なので、

1 にはなりません。存在しません。

D　向き付け可能

$2-2g=2 \Rightarrow g=0$

球面

オイラー標数が同じでも、向き付け可能性によって種類が変わります。

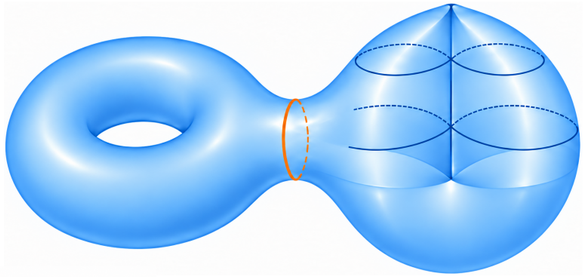
$T\#P$ と $P\#P\#P$ は同相

トーラスを T 、射影平面を P とします。

射影平面の円板部分で連結和するので、
メビウスの帯の部分（クロスキャップ）は、どちらの曲面にも残っています。

① $T\#P$

$\chi = 0 + 1 - 2 = -1$

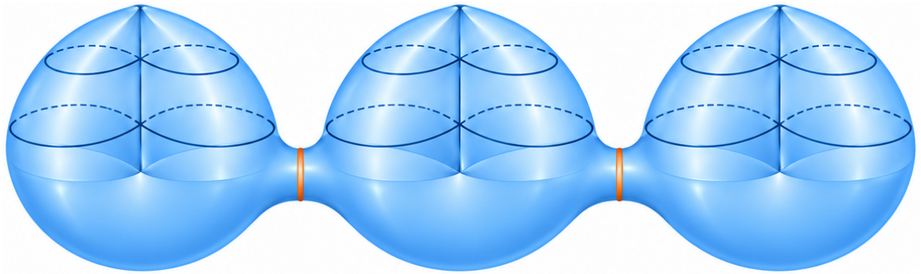


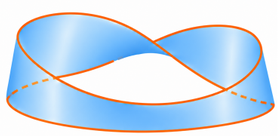
＝

同相

② $P\#P\#P$

$\chi = 1 + 1 + 1 - 2 \times 2 = -1$





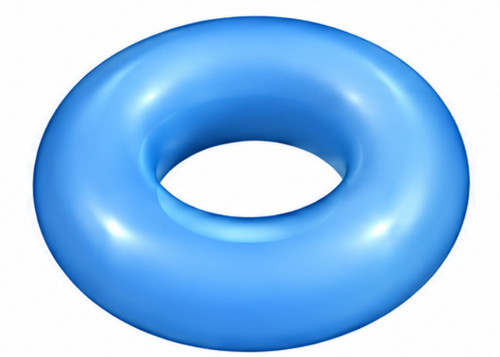
どちらも、向き付け不可能なメビウスの帯を含むので、
曲面全体も向き付け不可能です。

両方とも向き付け不可能であり、オイラー標数も等しいので、
分類定理により、この二つの曲面は同相です。

連結でない閉曲面の場合

互いに接しない曲面では、頂点・辺・面の数をそれぞれ足せるので、
オイラー標数も、それぞれの値の和になります。
下の二つは、ともに向き付け可能ですが、連結な部分の個数が違います。

一つのトーラス



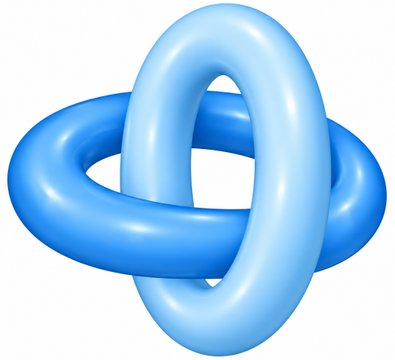
連結な部分が一つ

$\chi = 0$

$\neq$

同相ではない

絡み合う二つのトーラス



連結な部分が二つ

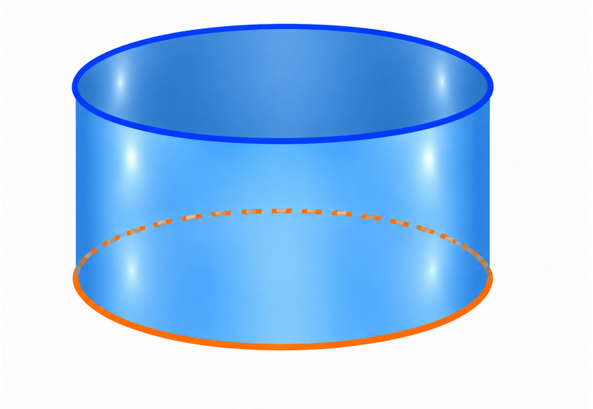
$\chi = 0 + 0 = 0$

連結でない閉曲面は、
連結な部分の個数と、それぞれの種類を調べます。

境界がある曲面の場合

円筒とトーラスは、どちらも向き付け可能で、オイラー標数は 0 です。
しかし、円筒には境界があり、トーラスにはありません。

円筒



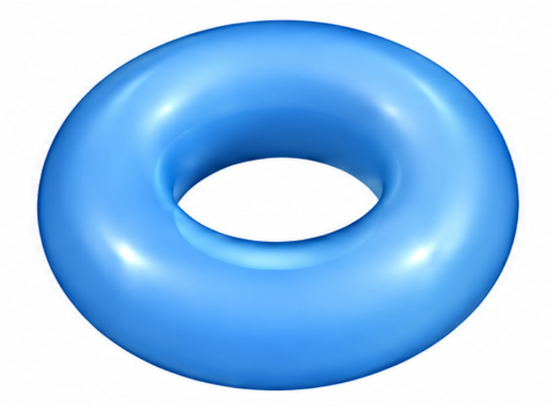
境界は 2 本

$\chi = 0$

$\neq$

同相ではない

トーラス



境界はない

$\chi = 0$

今日の分類定理は、境界のない曲面を対象にしています。

身近な物の表面を分類する

身近な物の表面にも、閉曲面の分類定理を使ってみましょう。

くぼみの内側や、穴の内壁も含む表面全体を考えます。

3つとも、表面全体で材料の内側と外側を区別できます。
そのため、いずれの表面も向き付け可能です。

消しゴム



球面と同相

$g = 0, \chi = 2$

マグカップ



トーラスと同相

$g = 1, \chi = 0$

二つ穴のボタン



トーラス 2 個の連結和

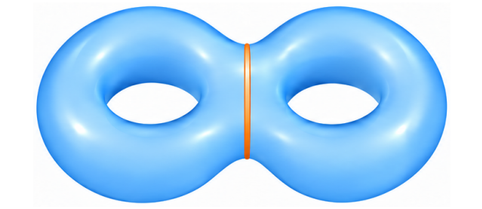
$g = 2, \chi = -2$

身近な物にも、今日学んだ分類が使えます。

閉曲面を分類する

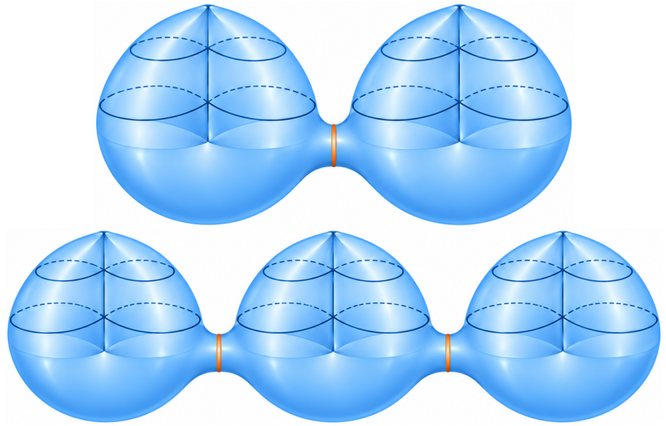
連結和をとってさまざまな閉曲面を作る方法と、
これらの曲面の種類の決め方を学びました。

トーラスの連結和



向き付け可能
$\chi = 2 - 2g$

射影平面の連結和



向き付け不可能
$\chi = 2 - k$

分類の手がかり

向き付け可能性
↓
トーラスか射影平面か

オイラー標数
↓
トーラスの個数 g
射影平面の個数 k

連結な閉曲面の種類は、向き付け可能性と
オイラー標数で決められることを学びました。