先端応用化学特別講義Ⅰ

4回目講義

畠中　英里

貼り合わせて作る曲面

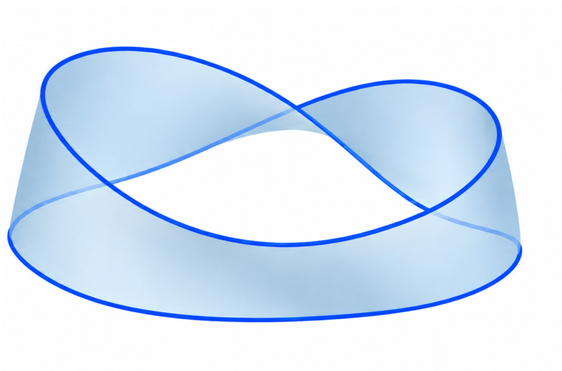
曲面を作って比べる

紙や帯の境界を貼り合わせて、さまざまな曲面を作ります。
できあがった曲面の性質を比べ、形の違いを調べます。

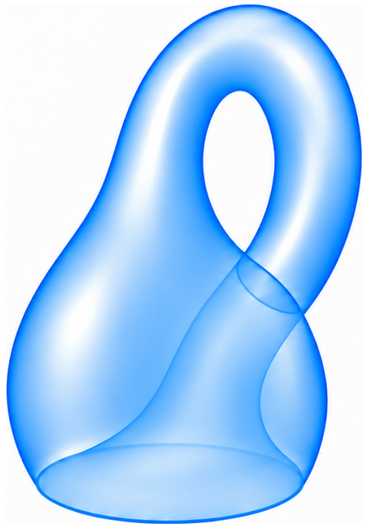
紙の帯を輪にする



帯の性質を比べる



境界のない曲面を作る

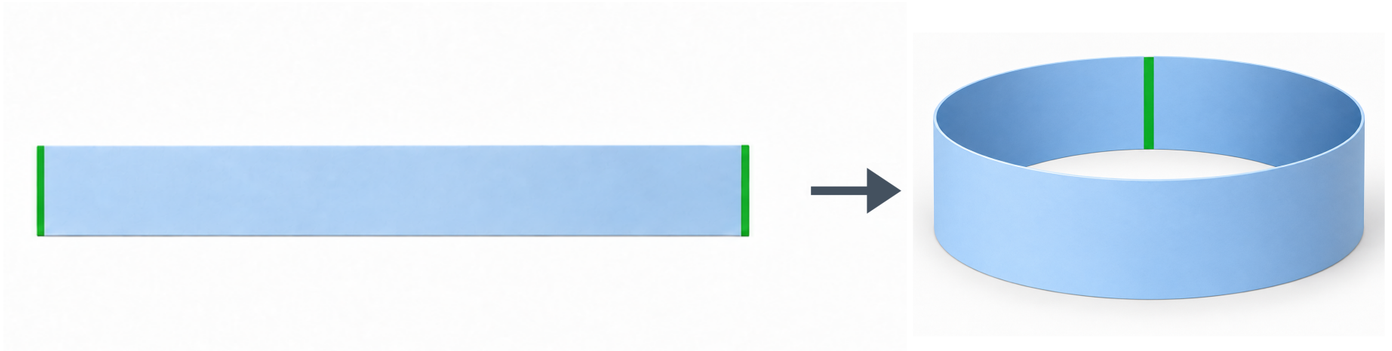


境界の貼り方を変えると、曲面の性質はどう変わるでしょうか。

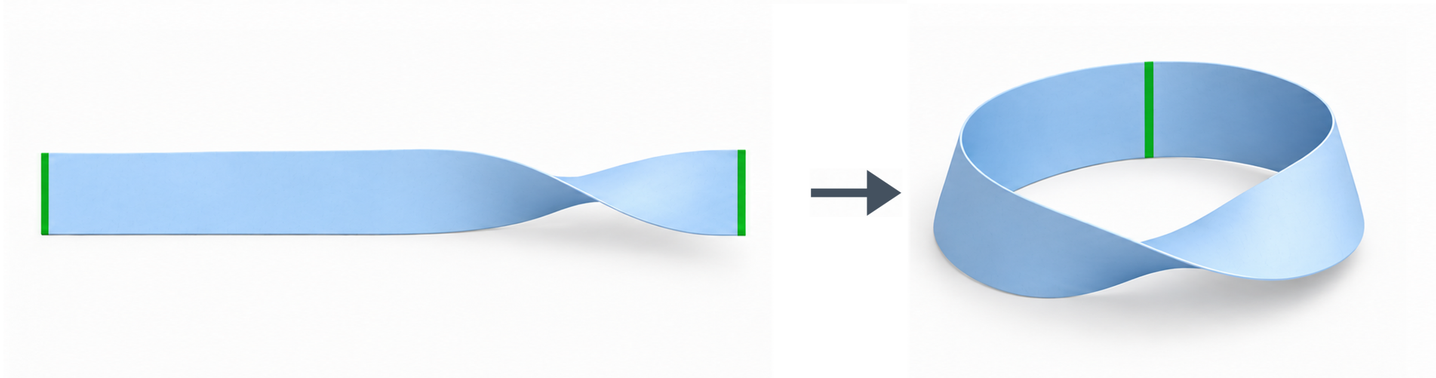
紙から二通りの帯を作る

細長い長方形の紙を用意し、向かい合う短い二辺を貼ります。

円筒



メビウスの帯



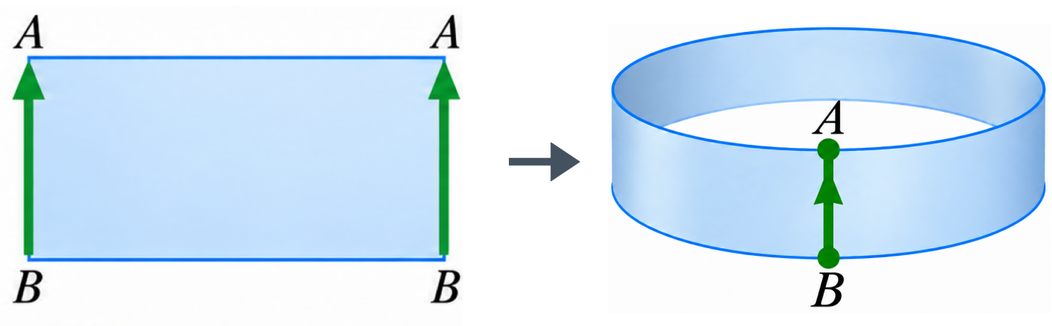
半回転（ 180 度）ひねって貼ると、メビウスの帯ができます。

貼り合わせを矢印で表す

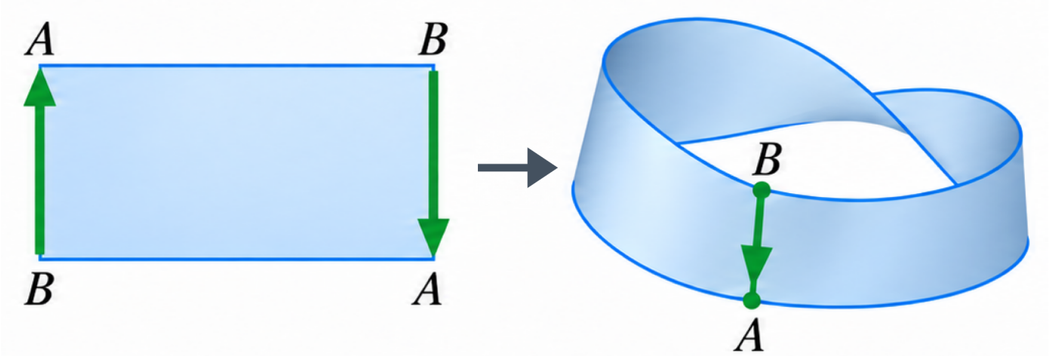
緑色の二辺を、矢印が同じ向きに重なるように貼ります。

点 A どうし、点 B どうしと、その間の点を対応させます。

円筒



メビウスの帯



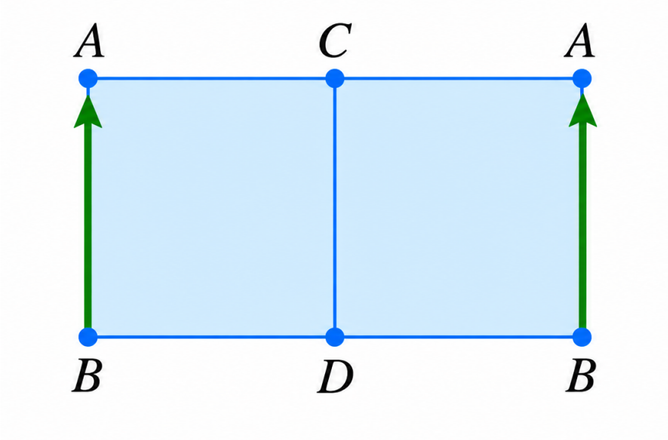
矢印は、二辺のどの点とどの点を合わせるかを表します。

円筒とメビウスの帯のオイラー標数

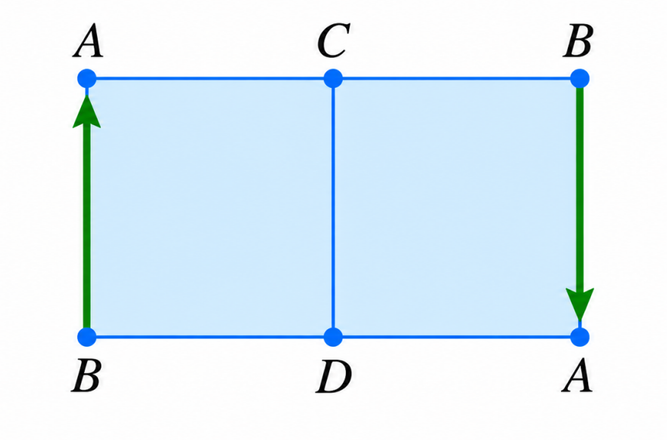
オイラー標数 ＝ 頂点の個数 − 辺の本数 ＋ 面の枚数

貼り合わせを表す図を二つの長方形に分け、頂点・辺・面を数えます。
貼った後に同じになる頂点や辺は、一つとして数えます。

円筒



メビウスの帯



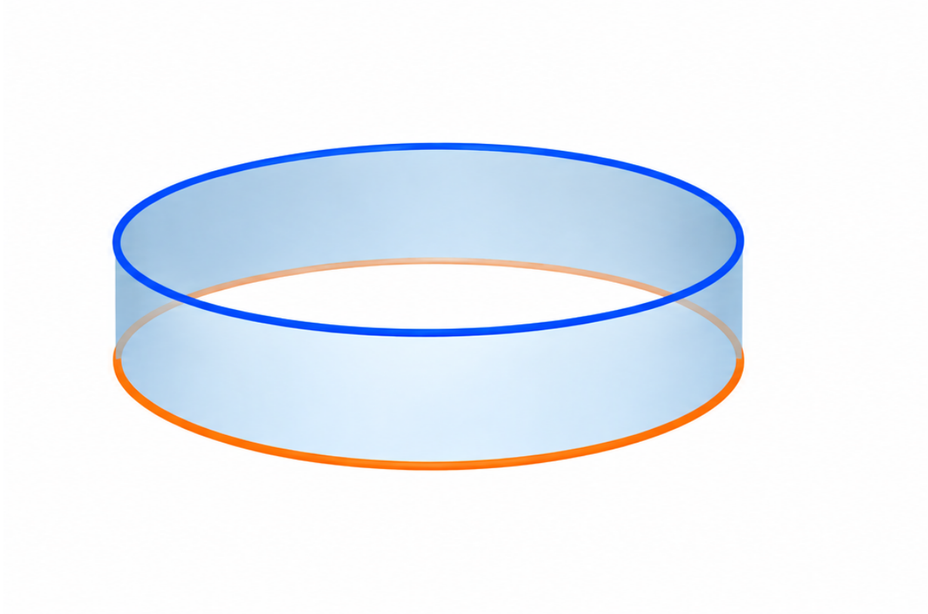
どちらも $V = 4, E = 6, F = 2, \chi = 4 - 6 + 2 = 0$

どちらもオイラー標数は 0 なので、これだけでは区別できません。

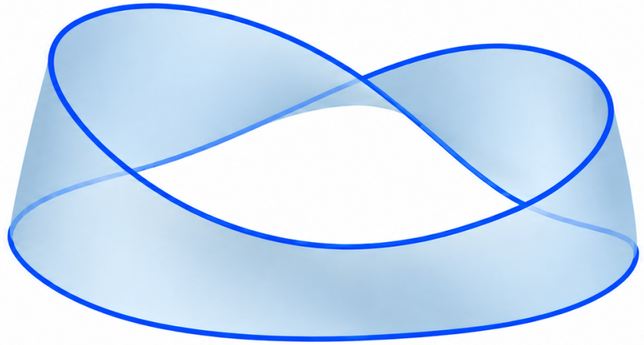
境界をたどって比べる

曲面のふちをたどり、何本の輪に分かれているかを調べます。

円筒：境界は 2 本



メビウスの帯：境界は 1 本

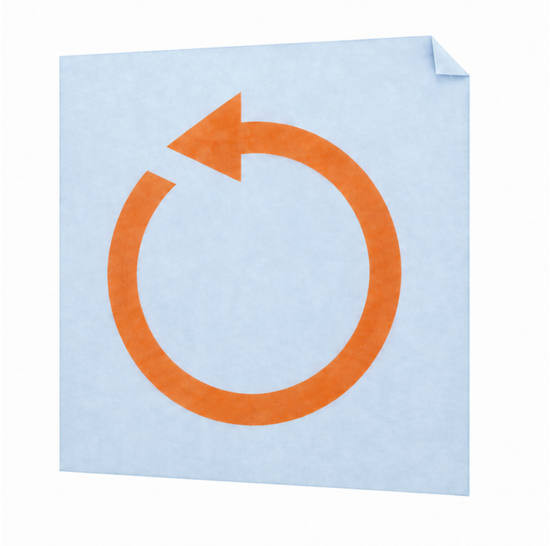


境界の本数は、同相な曲面では変わらない位相不変量です。
本数が異なるので、円筒とメビウスの帯は同相ではありません。

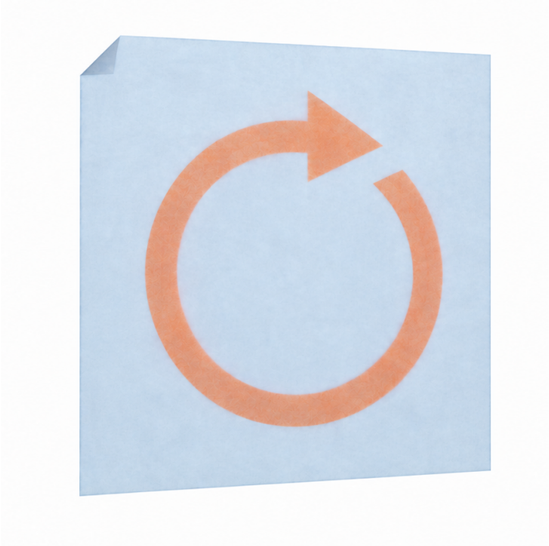
表裏と曲面の向き

紙に描いた丸い矢印は、裏から見ると回る向きが逆になります。
この回る向きを使って、曲面のその場所での「向き」を表します。

表から見る



裏から透かして見る

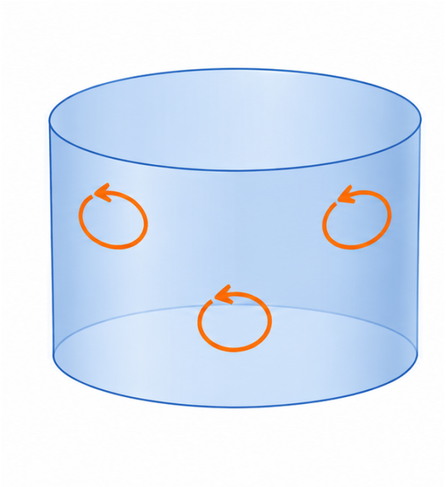


表裏の区別を、曲面全体で保てるでしょうか。

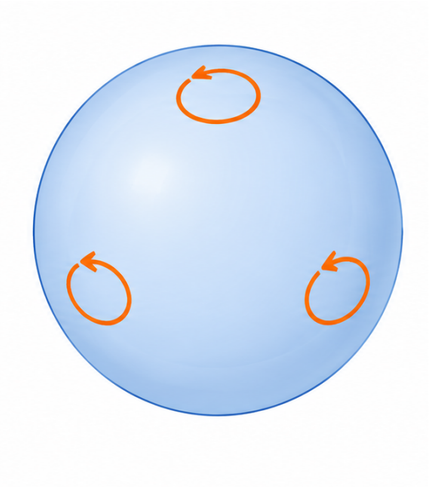
向き付け可能な曲面

丸い矢印を面に沿って動かし、元の場所に戻します。
どの経路でも回る向きが逆にならない性質を、向き付け可能といいます。

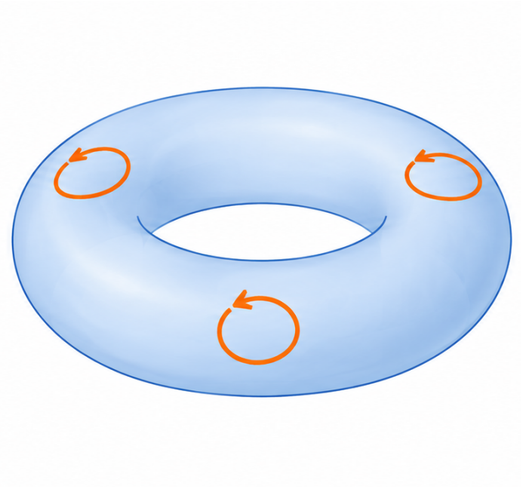
円筒



球面



トーラス（浮き輪の表面）



円筒・球面・トーラスは、表と裏を全体で区別できる、
向き付け可能な曲面です。

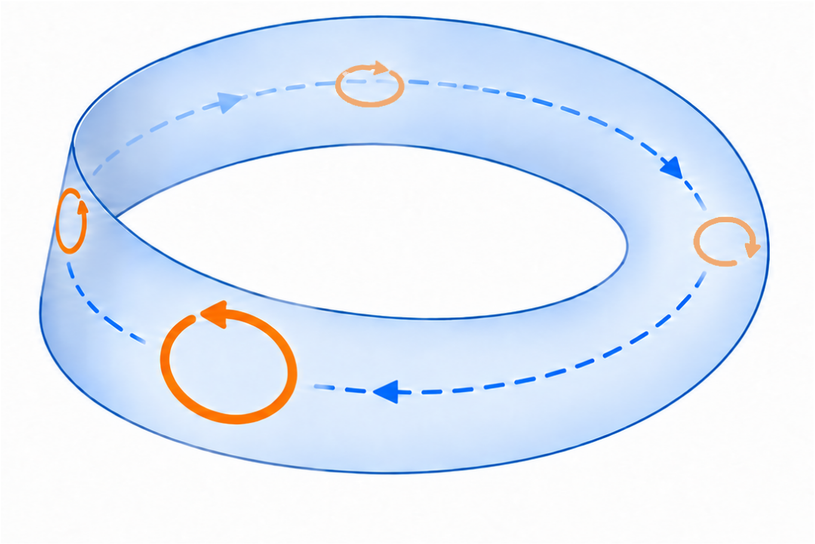
メビウスの帯は向き付け不可能

丸い矢印を、青い線に沿って面から離さず一周させます。

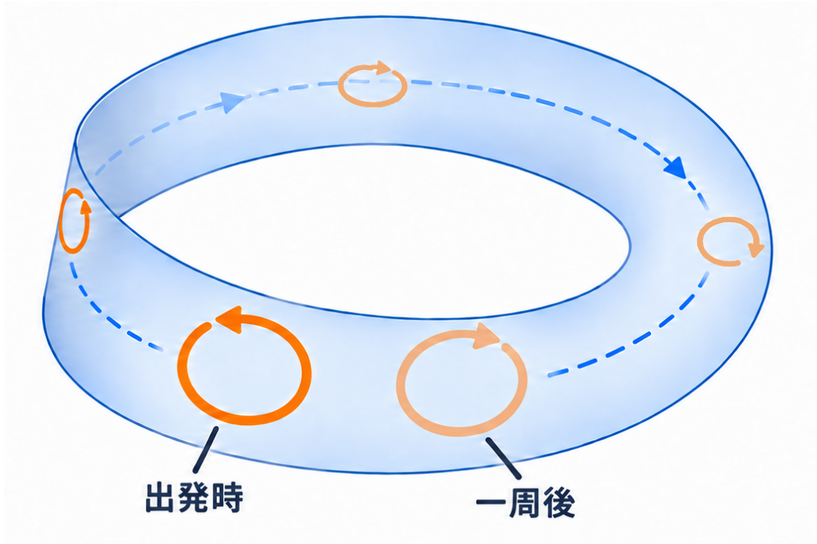
一周後は元の場所の裏側にあります。手前から透かして比べます。

右図の二つの印は、同じ場所で比べるために少しずらして描いています。

出発して奥側へ進む



一周して元の場所へ戻る

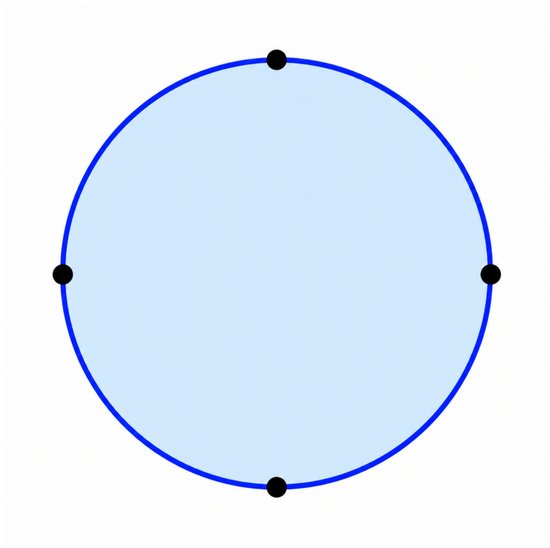


同じ側から見ると、出発時と一周後では回る向きが逆になります。
全体で向きをそろえられないので、メビウスの帯は向き付け不可能です。

円板のオイラー標数

円筒・メビウスの帯と比べるため、円板の性質も調べます。
円板に図のような分割を与え、頂点・辺・面を数えます。

円板に分割を与えて数える



境界を 4 本の辺に分けます。
内側は 1 枚の面として数えます。

頂点は 4 個、辺は 4 本、面は 1 枚です。

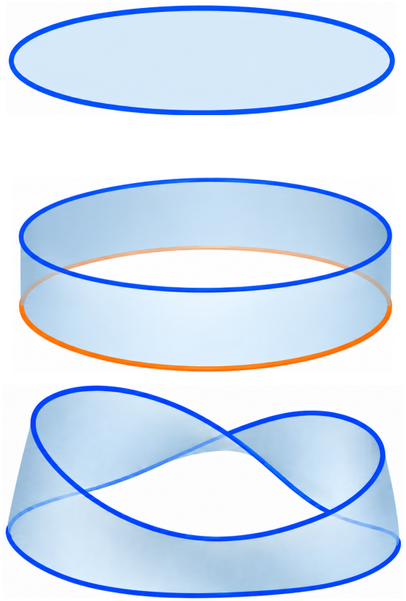
$$\chi = 4 - 4 + 1 = 1$$

円板は表と裏を区別できるので、向き付け可能です。
オイラー標数は 1 です。

境界のある三つの曲面の区別

円板・円筒・メビウスの帯の性質を並べて比べます。

曲面	オイラー標数	境界	向き付け
円板	1	1 本	可能
円筒	0	2 本	可能
メビウスの帯	0	1 本	不可能

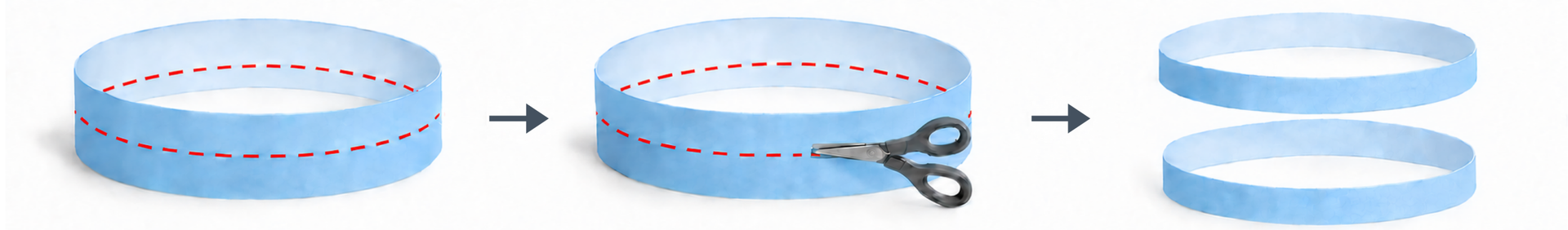


境界の本数や向き付け可能性は、同相な曲面では変わりません。
この違いにより、三つの曲面は互いに同相ではありません。

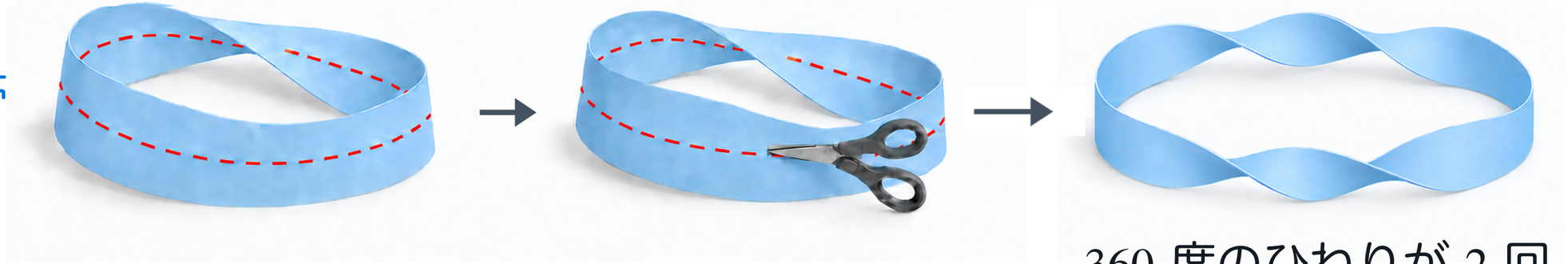
帯の中央を切る

貼り方の違いは、切った後のつながり方にも表れるでしょうか。
それぞれの帯を、赤い線に沿って中央で切ってみます。

円筒



メビウスの帯



360 度のひねりが 2 回

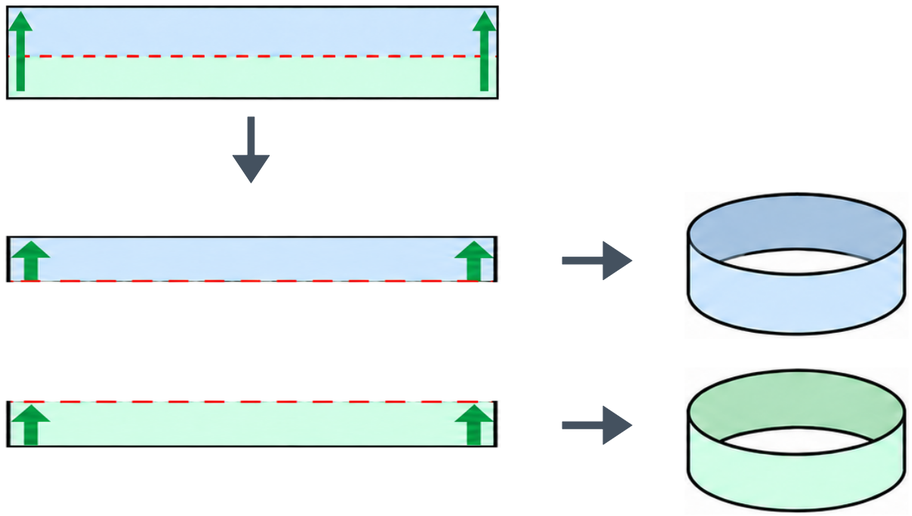
円筒は 2 本に分かれますが、メビウスの帯は 1 本のままです。

切った後のつながりを読む

前のページの結果を、長方形の貼り合わせで確かめます。

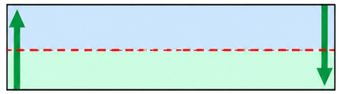
赤い線で分けた後も、緑の矢印の対応を保ちます。

円筒

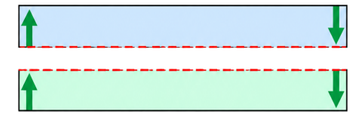


メビウスの帯

中央で切る



切ってできた 2 枚



緑の帯だけを裏返す



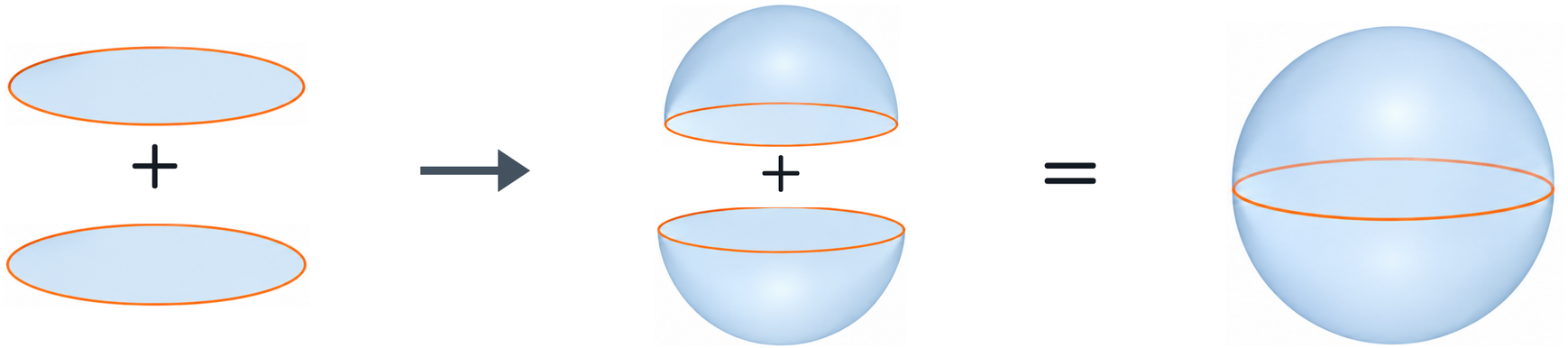
矢印をそろえてつなぐ



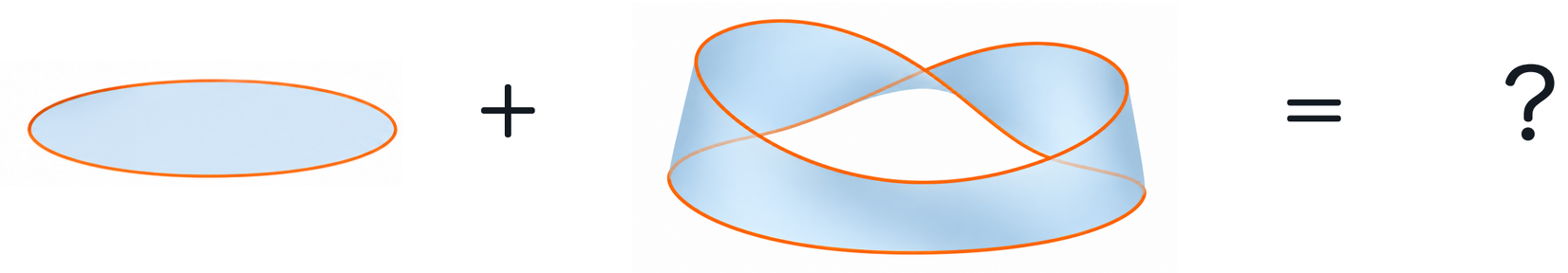
貼り合わせをたどると、円筒は別々の 2 本の帯になり、
メビウスの帯は 1 本につながることが分かります。

境界で貼り合わせる

二枚の円板をお椀のように曲げ、境界の円周どうしを貼ります。



メビウスの帯の境界も一本の輪なので、円板と貼れそうです。

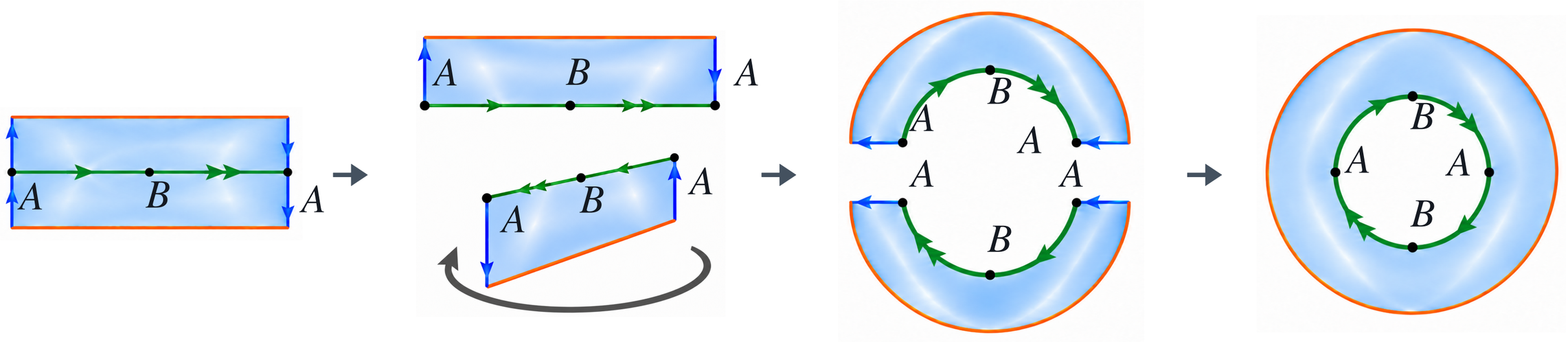


円板とメビウスの帯の境界を貼ると、何ができるでしょうか。

メビウスの帯の変形１

円板に貼るため、メビウスの帯の境界を丸い輪に整えます。
貼り目を開いて、長方形に戻した状態から始めます。

① 中央で切る　② 下半分を裏返す　③ 半円状に曲げる　④ 青い辺を貼る

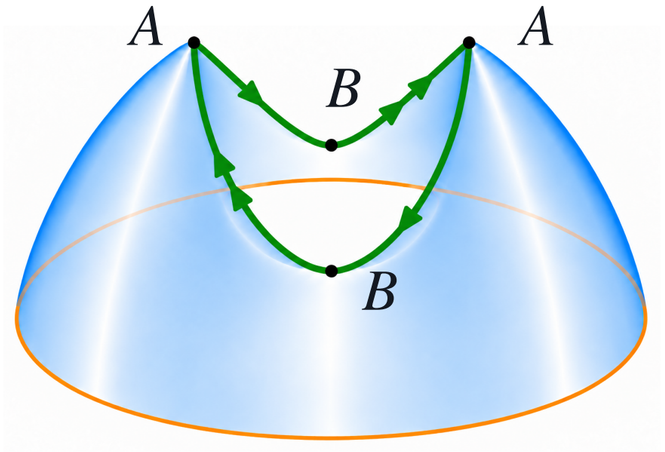


もとの一本の境界を、平らな輪に整えました。
次に、面を曲げて緑の切り口を貼り合わせます。

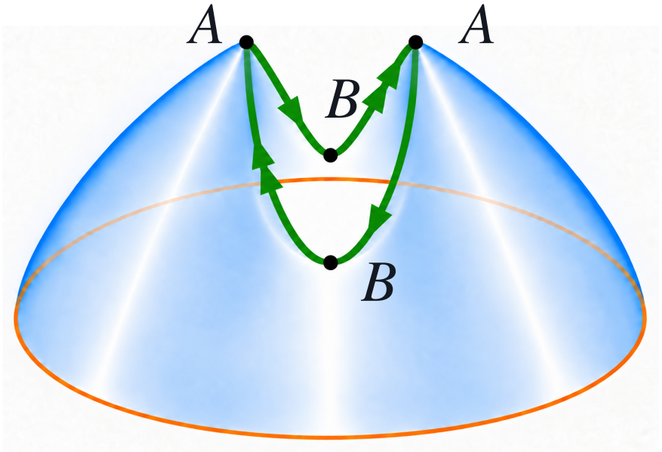
メビウスの帯の変形２

一重の矢印どうし、二重の矢印どうしをそろえて貼り合わせます。
点 A どうし、点 B どうしも合わせます。

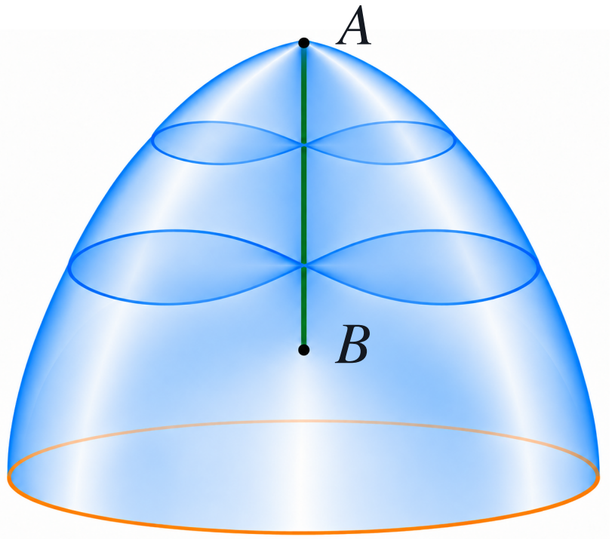
⑤ 内側を持ち上げる



⑥ 切り口を近づける



⑦ 切り口を貼り合わせる

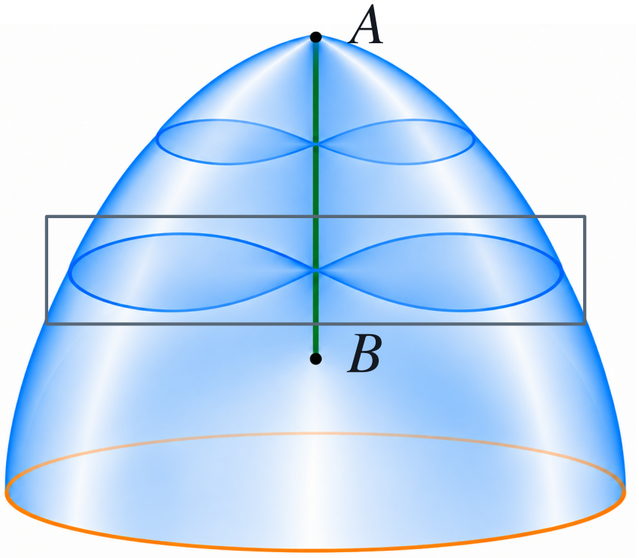


元の対応で切り口を貼ったので、メビウスの帯と同じ曲面です。
この形をクロスキャップとも呼びます。

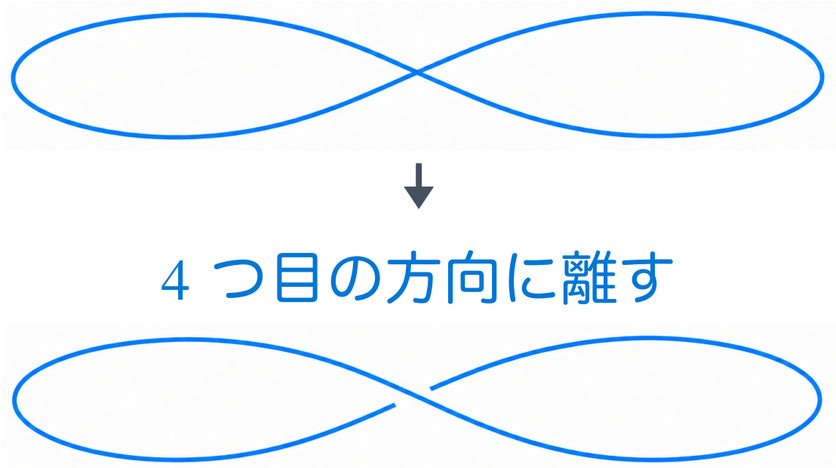
クロスキャップ

中央上部では、一つの曲面が自分自身と交差して見えます。
左の曲面を、枠で示した高さで水平に切ると、切り口が八の字になります。

前のページの曲面



水平に切った切り口

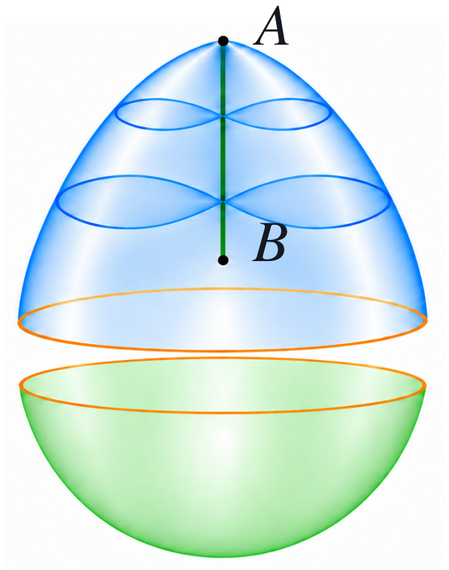


右下の交差の上下は、 4 つ目の方向の位置の違いです。
4 次元では、図で重なる箇所を別の位置に置けます。

射影平面

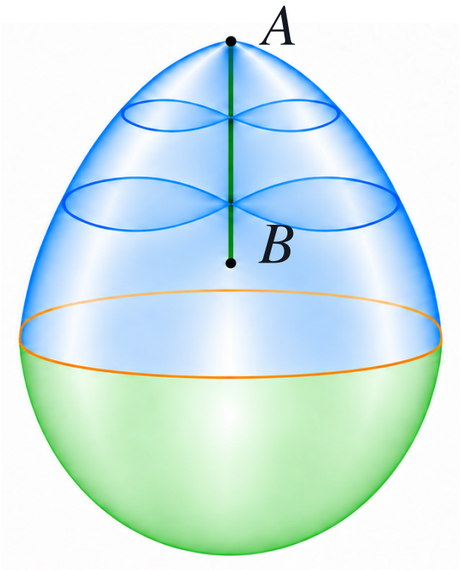
クロスキャップの境界と円板の境界を貼り合わせます。
こうしてできる閉曲面を、射影平面と呼びます。

境界を合わせる





射影平面

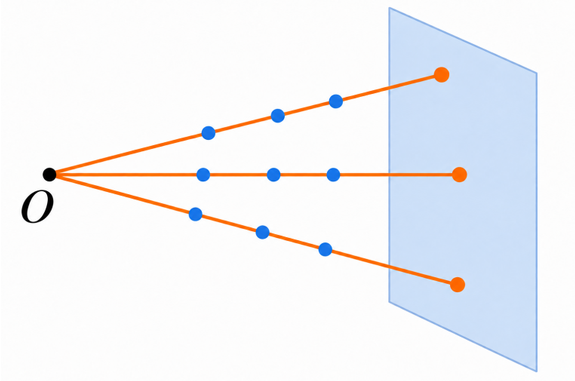


メビウスの帯を含むので、曲面全体でも表裏を区別できません。
射影平面は向き付け不可能な閉曲面です。

射影平面という名前

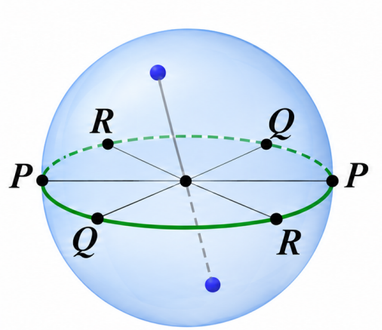
3 次元空間の原点を通る直線を、すべて集めて考えます。
直線一本一本をそれぞれ一点とする曲面が、射影平面です。

名前につながる「射影」の例



同じ半直線上の点が、
平面上の同じ点に写ります。

直線を球面上の二点で表す



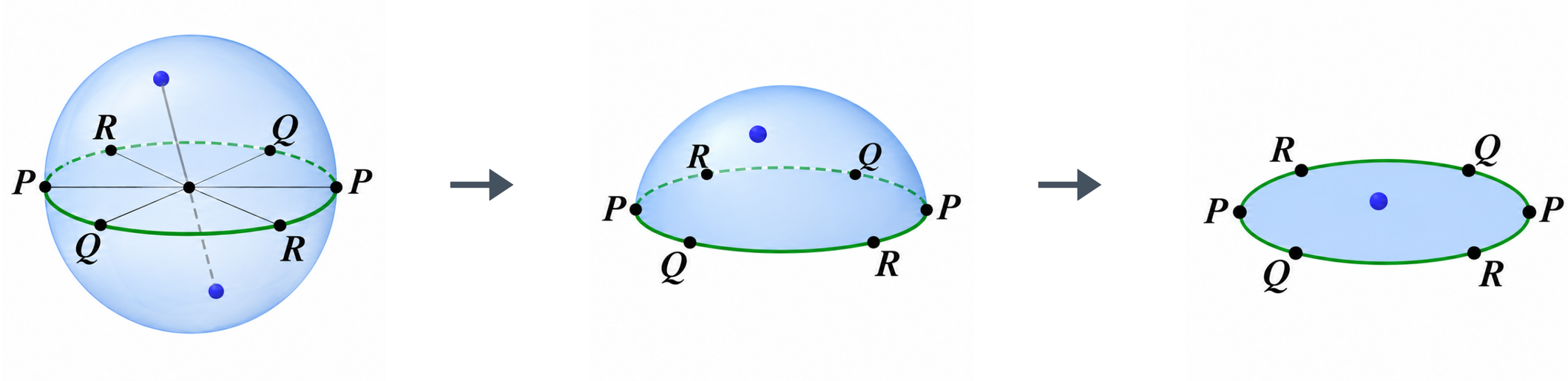
原点を中心とする球面と、
各直線は反対側の二点で交わります。
その二点の組が、射影平面の一点です。

したがって、球面上の反対側の二点どうしを同一視すると、
同じ射影平面を表せます。

射影平面を円板で表す

一本の直線に対応する球面上の反対点どうしを、同じ点とします。
上半球を代表に選ぶと、境界の反対点だけを同一視する表示になります。

球面の反対点を同一視する　　上半球を代表にする　　上半球を平らに広げる

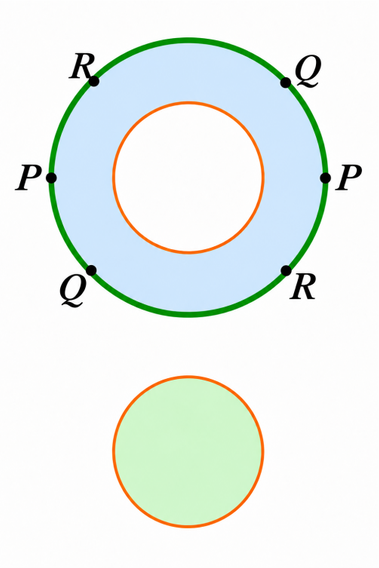


三つの図は、同じ射影平面を表しています。
円板の内側はそのままで、境界のすべての反対点を同一視します。

二つの作り方で同じ射影平面ができる

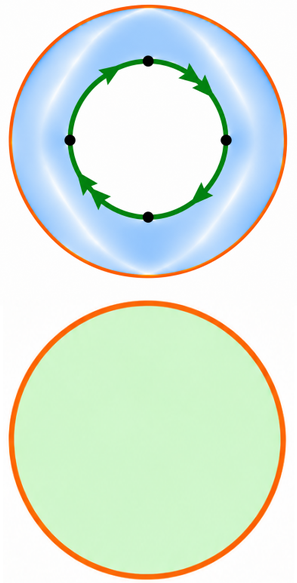
前のページの円板を、中央と外側の輪状の部分に分けます。
輪の内外を入れ替えると、16ページ④と同じ貼り方になります。

21ページの円板を分ける



円板を保存します。

16ページ④と同じ貼り方



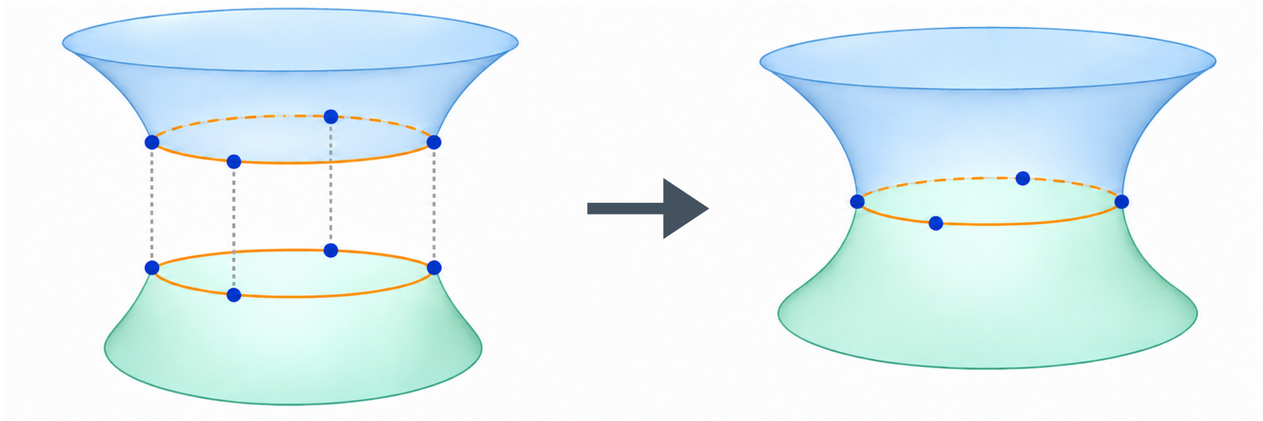
輪状の部分を貼るとメビウスの帯になり、円板も残っています。
その境界どうしを貼るので、最初に作った射影平面と同じです。

貼り合わせとオイラー標数

曲面 A ・ B から、円周状の境界を一本ずつ選びます。
その境界全体を貼り合わせてできる曲面を C とします。

曲面 A

曲面 B



曲面 C

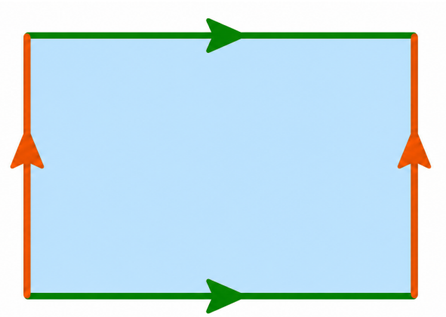
χ_A 、 χ_B 、 χ_C はそれぞれ曲面 A 、 B 、 C のオイラー標数です。
頂点は 8 個から 4 個、辺は 8 本から 4 本へ減り、面の数は変わりません。

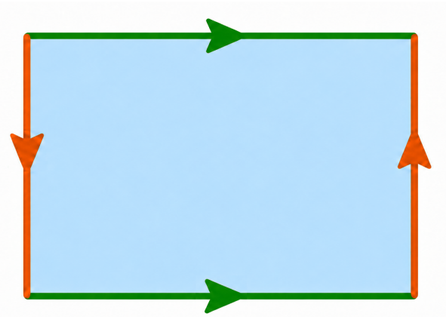
$$\chi_C = \chi_A + \chi_B - 4 + 4 = \chi_A + \chi_B$$

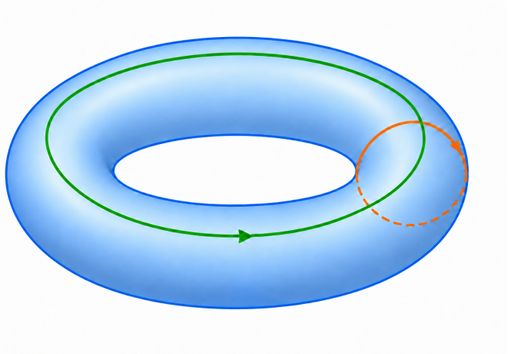
メビウスの帯は 0 、円板は 1 なので、
射影平面のオイラー標数は $0 + 1 = 1$ です。

トーラスの貼り方を変える

長方形の向かい合う辺を貼ると、トーラスができます。
オレンジ色の左辺だけ、矢印を逆にするとどうなるでしょうか。







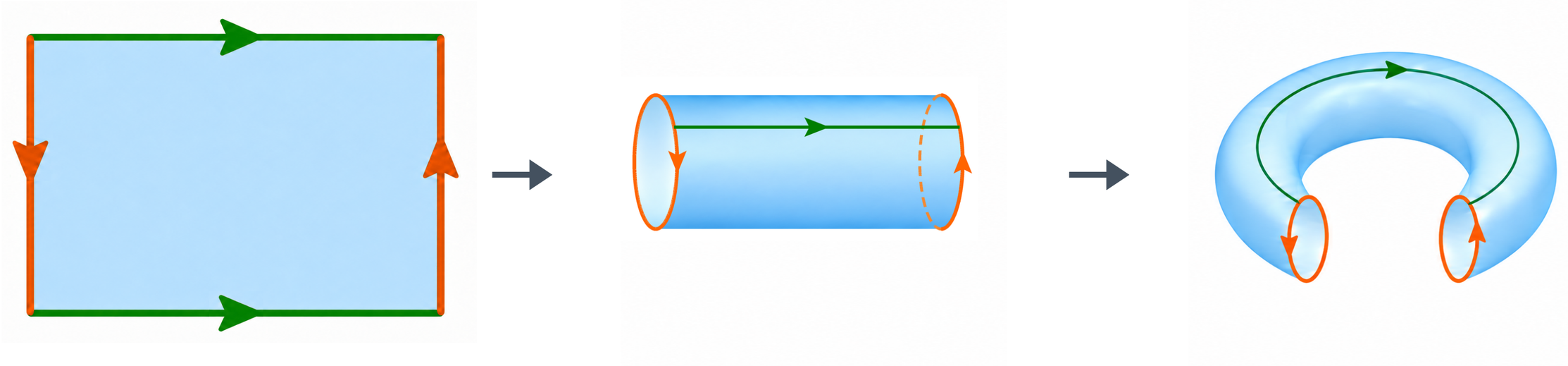
トーラス

?

どんな閉曲面ができ、オイラー標数や向き付けはどうなるでしょうか。

円筒から閉曲面を作る1

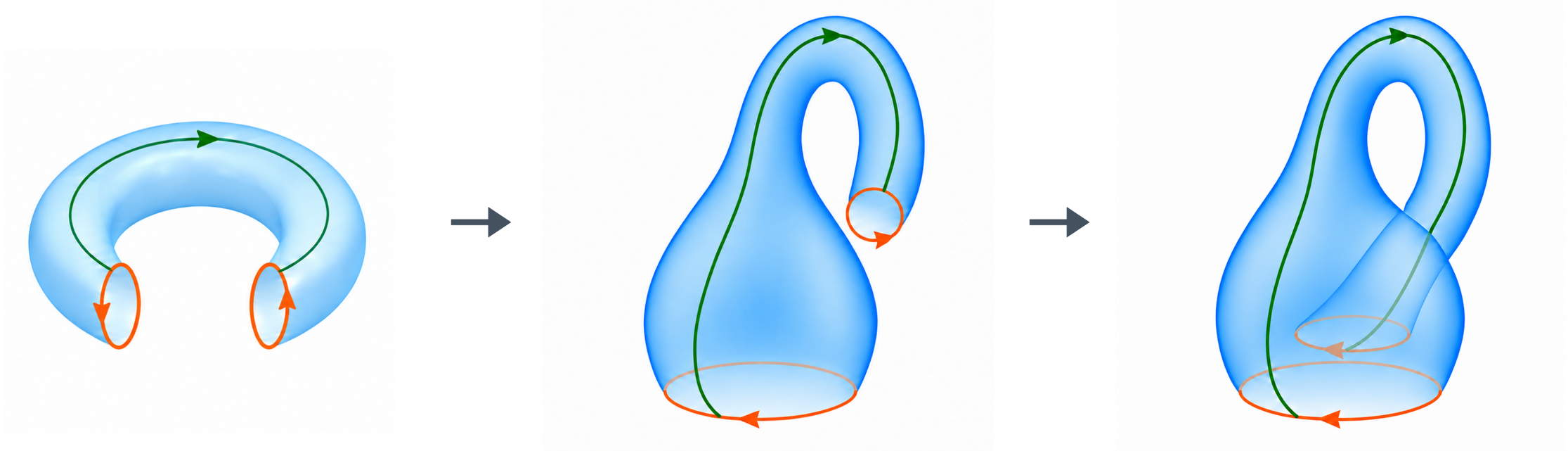
先に緑色の二辺を貼り合わせて、円筒を作ります。
残った二つの円周を、オレンジ色の矢印に合わせて貼ります。



残った円周の点の対応が、トーラスの場合と逆になります。

円筒から閉曲面を作る2

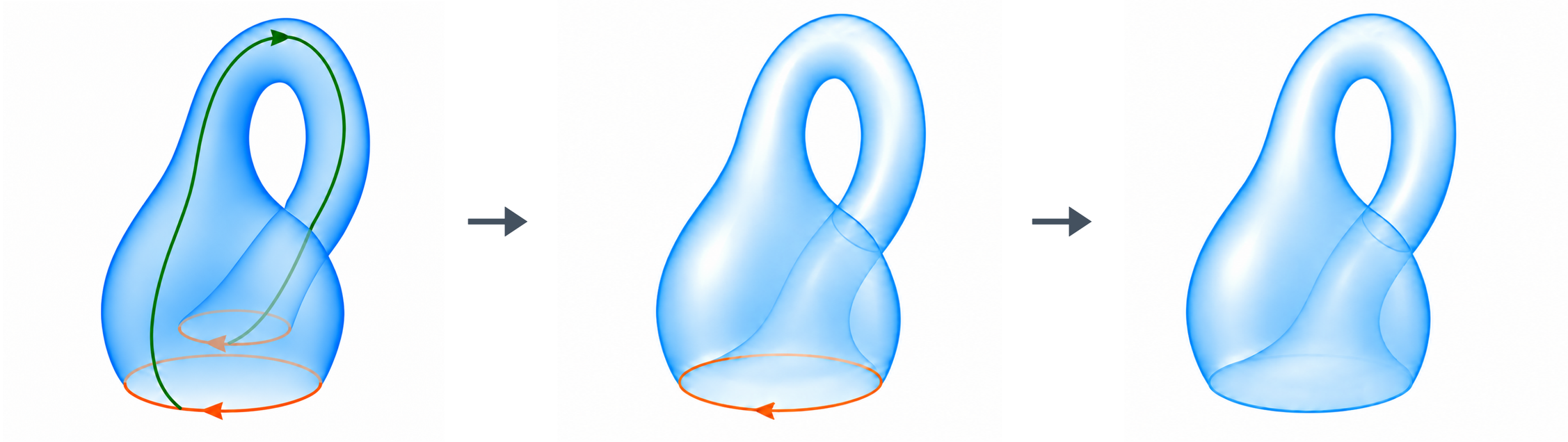
まだ貼り合わせていない二つの円周を、矢印の向きがそろうように近づけます。
この三次元の図では、細い筒がふくらんだ部分の面を通り抜け、内側へ入ります。



交差して見える場所では、曲面の部分どうしを貼り合わせません。

クラインのつぼ

残った二つの円周を、一周すべてにわたって貼り合わせます。
内側の筒の先を広げ、外側の面へ滑らかにつなげます。

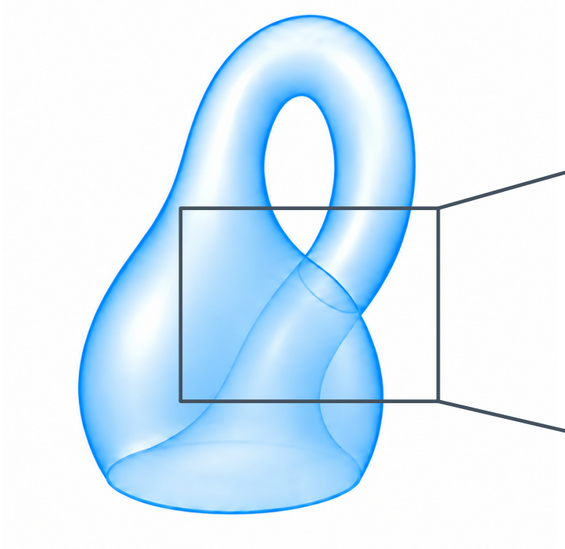


このようにしてできる閉曲面を、クラインのつぼといいます。

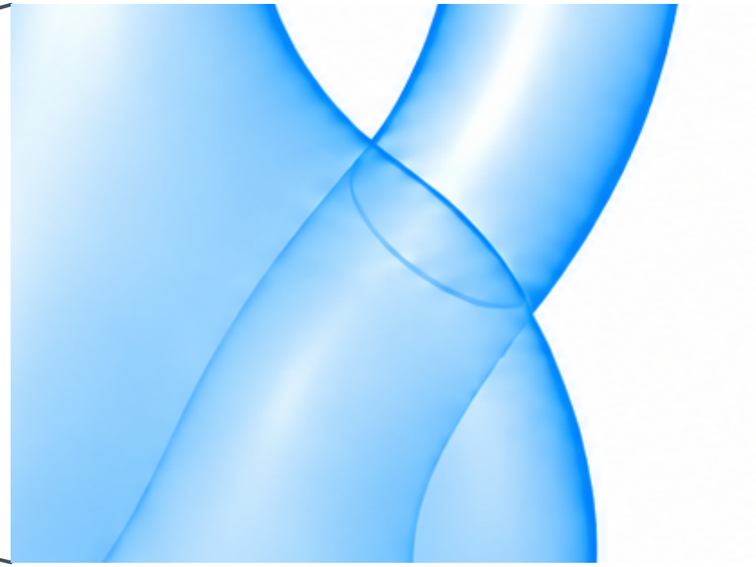
交差して見える理由

枠の中では、細い筒が大きくふくらんだ部分の面を通り抜けています。
筒はその面の内側へ続いています。交差する場所では貼り合わせません。

クラインのつぼ



筒が面を通り抜ける部分の拡大



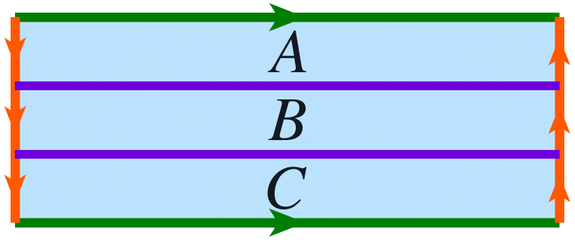
図で交差する筒と大きな面は、 4 つ目の方向の位置を違えて表せます。
クラインのつぼは、 4 次元では交差しない曲面として表せます。

クラインのつぼと二つのメビウスの帯

紫色の横線で、長方形を上から A ・ B ・ C の三つに分けます。

中央の B を取り分け、 C を上、 A を下に並べて緑色の辺を貼ります。

クラインのつぼの展開図

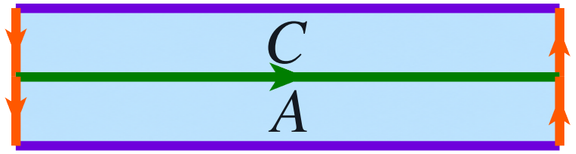


中央の B

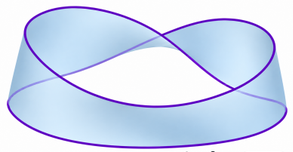


と

C と A をつなぐ

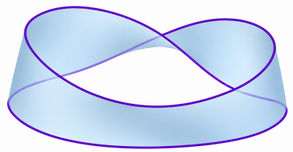


メビウスの帯



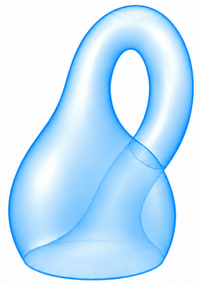
＋

メビウスの帯



境界で貼り合わせる

＝

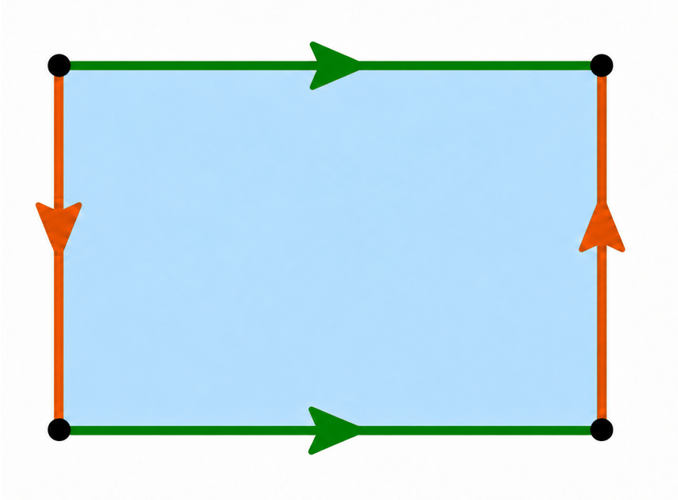


どちらも端を逆向きに貼るので、メビウスの帯になります。

この二つの境界を貼ると、クラインのつぼになります。

クラインのつぼの性質

長方形を一枚の面とする分割で、頂点・辺・面を数えます。
四つの角は同じ頂点に、同じ色の二辺は一本の辺になります。



貼ると四隅は同じ頂点になります。

頂点は 1 個、辺は 2 本、面は 1 枚です。

$$\chi = 1 - 2 + 1 = 0$$

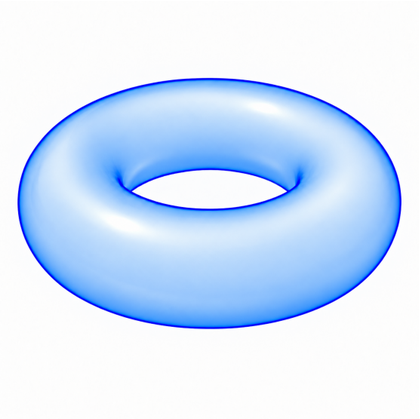
メビウスの帯を含むため、
曲面全体でも表裏を区別できません。

クラインのつぼは向き付け不可能な閉曲面で、
オイラー標数は 0 です。

トーラスとクラインのつぼ

どちらも境界がなく、オイラー標数は 0 です。
向き付け可能性の違いを使うと、二つを区別できます。

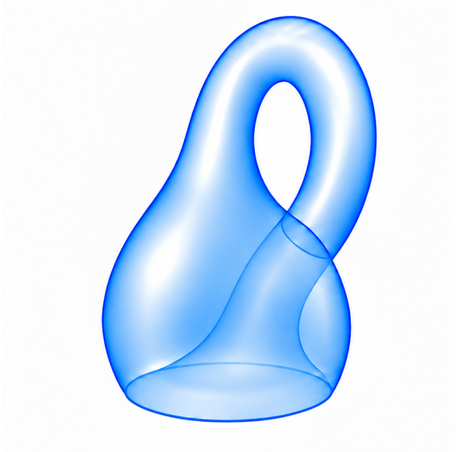
トーラス



$\chi = 0$
向き付け可能

$\neq$
同相ではない

クラインのつぼ



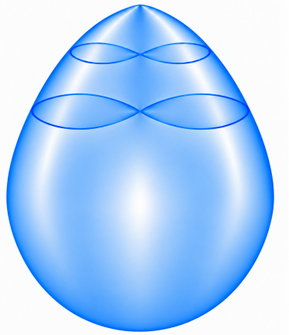
$\chi = 0$
向き付け不可能

向き付け可能性が異なるので、二つの曲面は同相ではありません。

射影平面とクラインのつぼ

どちらも向き付け不可能な閉曲面ですが、同じ形でしょうか。
すでに求めたオイラー標数を比べます。

射影平面





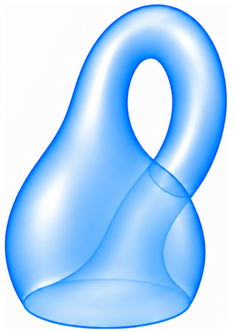
境界で貼り合わせる

$\chi = 1$

$\neq$

同相ではない

クラインのつぼ





境界で貼り合わせる

$\chi = 0$

オイラー標数が異なるので、二つの曲面は同相ではありません。

貼り合わせて分かったこと

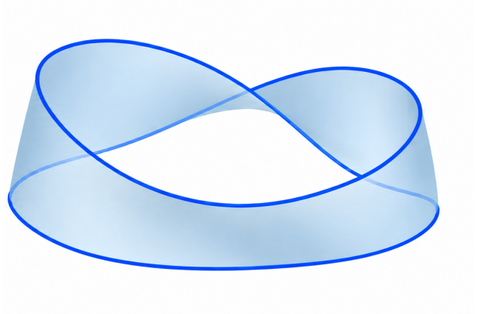
境界の貼り方を変えると、性質の異なる曲面ができました。

紙の帯を輪にする



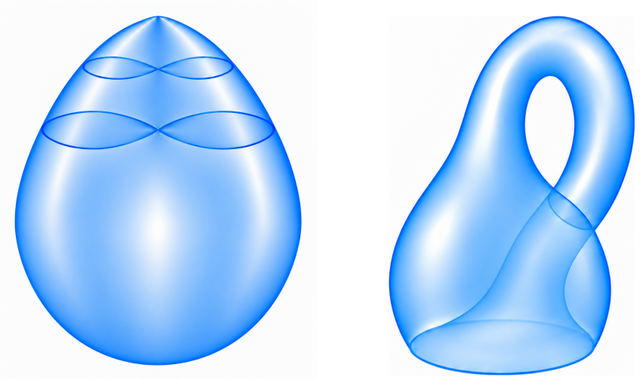
貼り方によって
円筒とメビウスの帯ができる

帯の性質を比べる



境界・向き・オイラー標数で
同じ形でないことを示せる

境界のない曲面を作る



円板と帯から射影平面
二つの帯からクラインのつぼ

境界の貼り合わせから曲面を作り、その性質を調べました。