先端応用化学特別講義Ⅰ

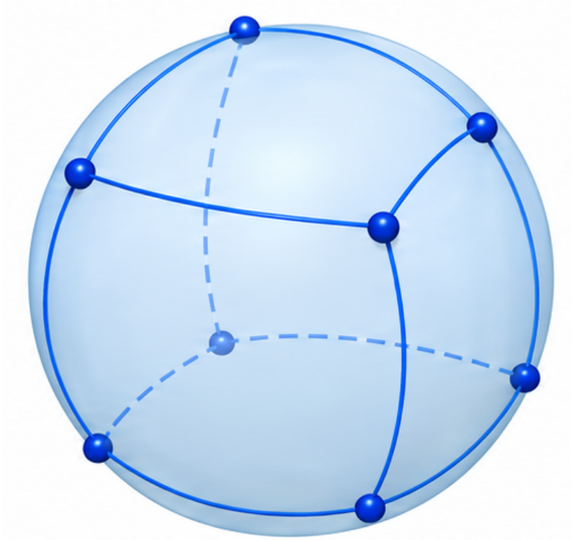
3回目講義

畠中　英里

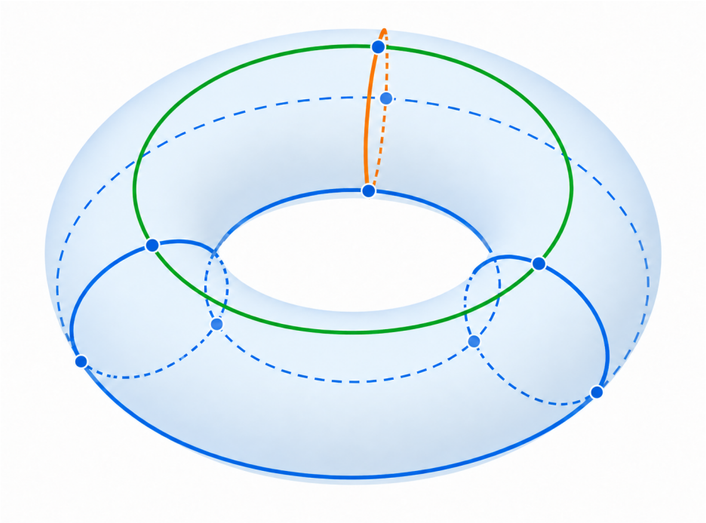
数えてわかる形の違い

頂点・辺・面を数えて形を調べる

曲面に線を引いて区切り、頂点・辺・面を数えます。



曲面を分割して数える



形の違いを証明する

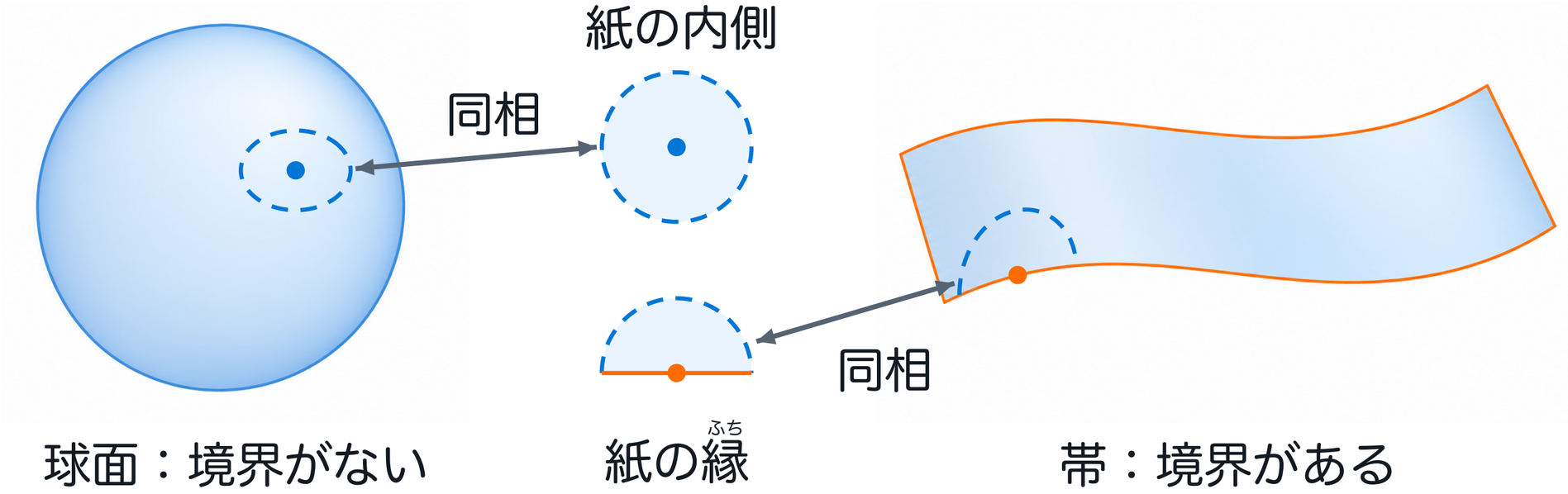


面の並びを調べる

数えた値を、形の違いの証明と面の並びの条件に使います。

曲面

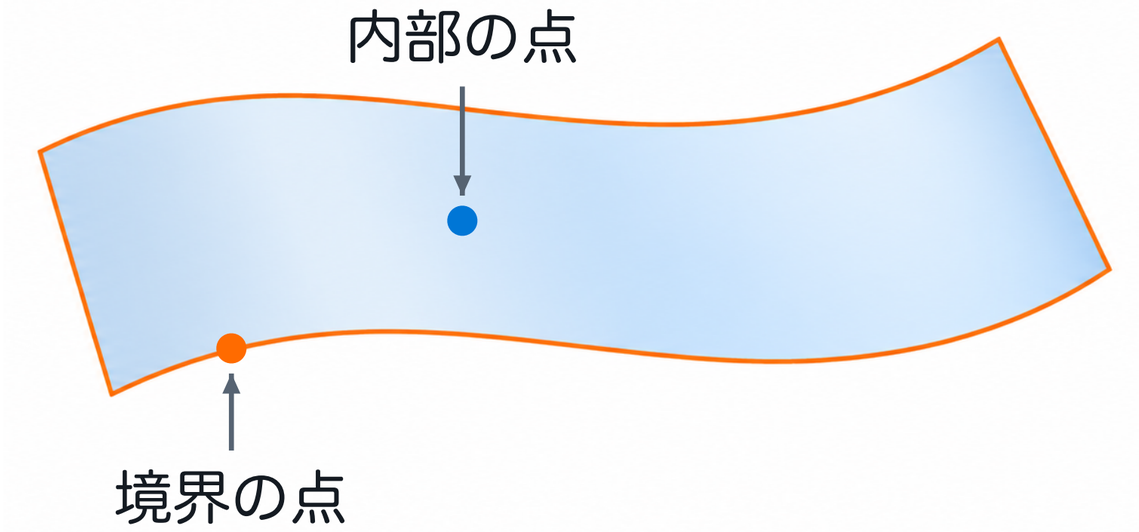
第1回で考えた「トポロジーの意味で同じ形」を、ここでは同相という言葉で表します。
各点の近くが、紙の内側または縁(ふち)の近くと同相である
2 次元の図形を、曲面と呼びます。



曲面の定義では、各点の近くがどのような形かに注目します。

曲面の境界

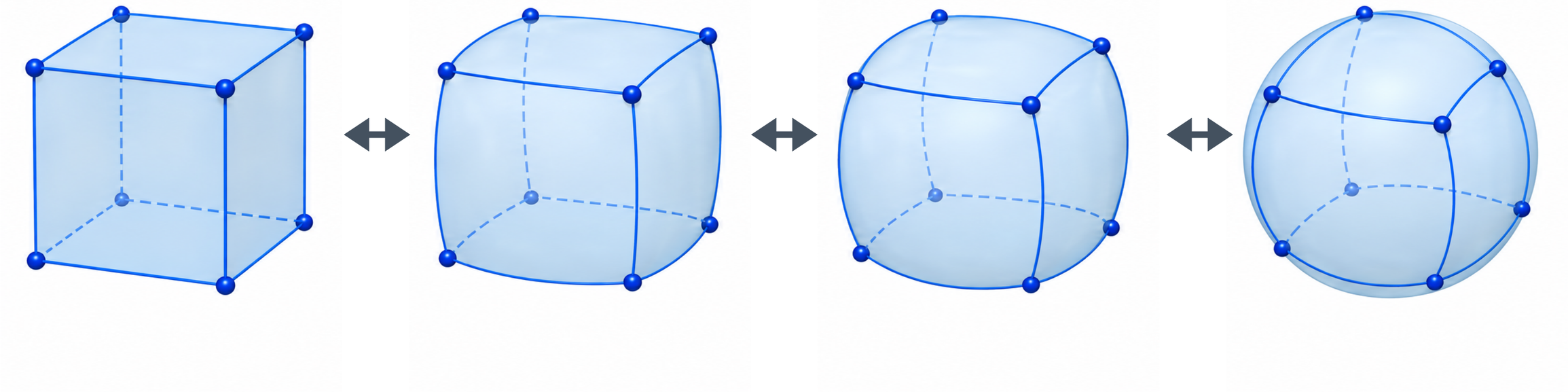
紙の内側に対応する点を、内部の点と呼びます。
紙の縁に対応する点を、境界の点と呼びます。
帯の境界は、オレンジ色の縁全体です。



曲面の境界は、境界の点を集めたものです。

立方体の表面と球面

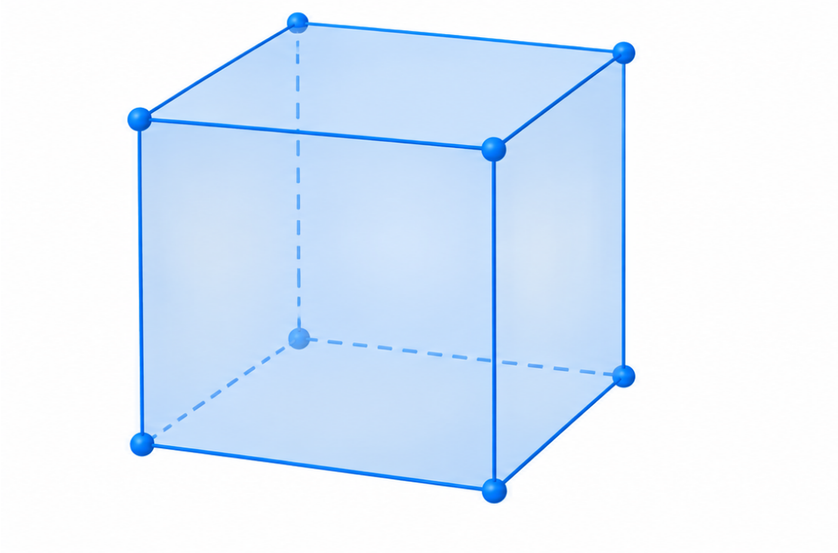
第1回と同じく、点を一対一に対応させて変形を逆に戻せるかを見ます。



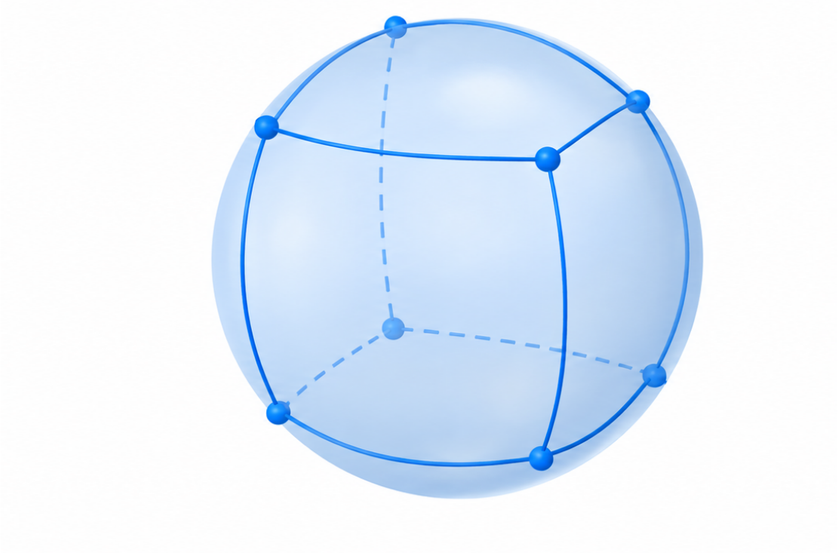
逆向きにも戻せる変形で、トポロジーの意味で同じ形と示せます。

曲面の分割

曲面上に頂点と辺を置き、辺で囲まれた部分を面とします。
このように頂点・辺・面で区切ることを、曲面の分割と呼びます。



立方体の分割

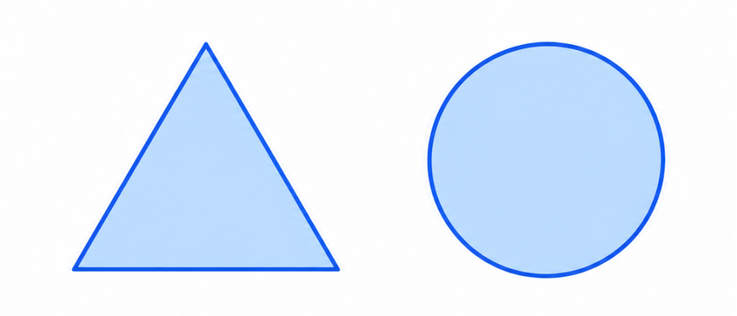


対応する球面の分割

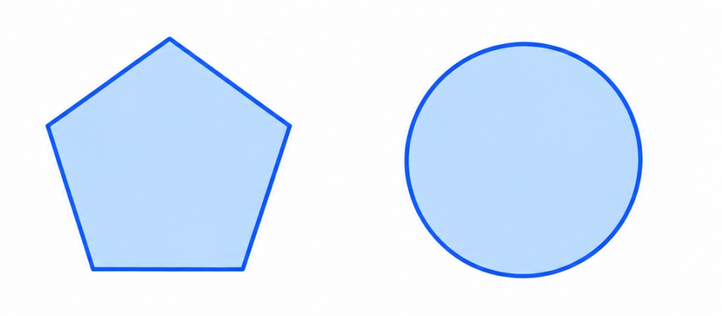
対応する分割では、頂点・辺・面の個数はそれぞれ同じです。

面として数える部分

円周とその内側を合わせた図形を、円板と呼びます。
分割の各面は、円板と同じ形にできる領域にします。



三角形も円板と同じ形



何角形でも構いません

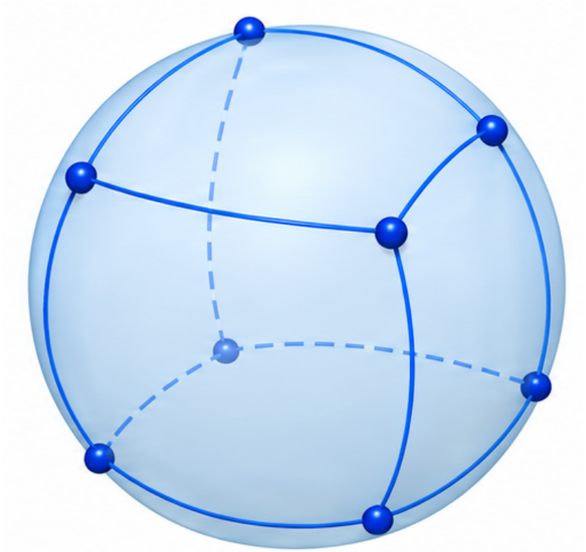


穴のある領域は、そのまま一枚の面には数えません。

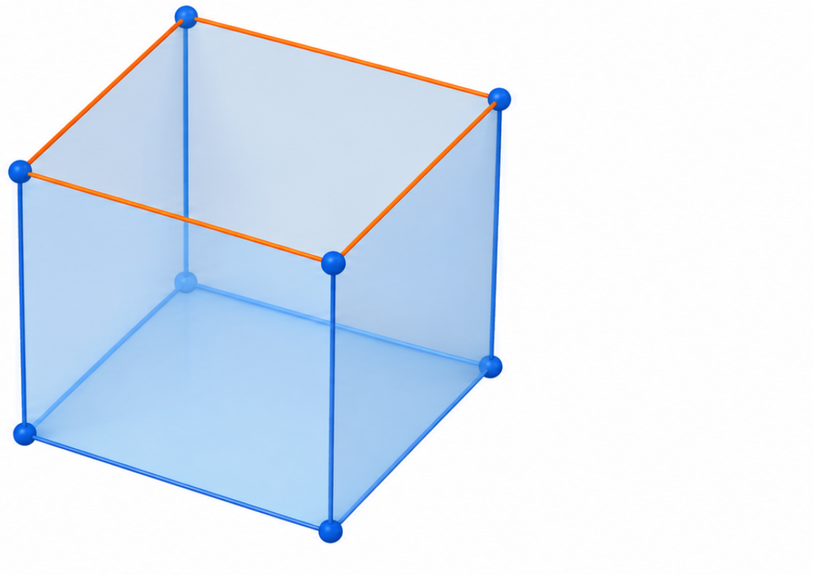
一枚の面は、円板とトポロジーの意味で同じ形の領域です。

閉曲面

有限枚の面を、周りの辺どうしで貼り合わせて作れる曲面を扱います。
球面には境界がなく、開いた箱では上の四辺が境界です。



球面：境界がない



開いた箱の表面：境界がある

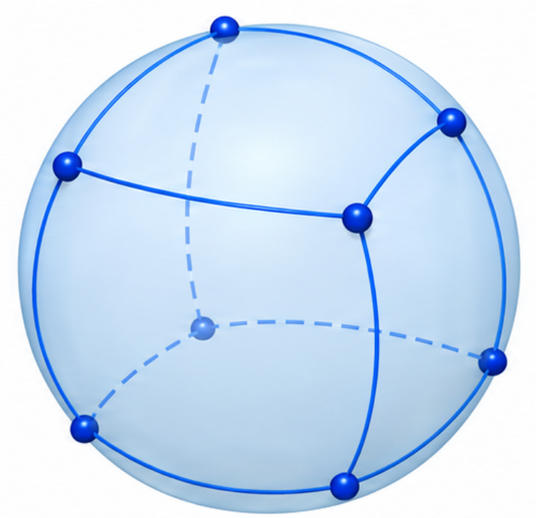
ここで扱う曲面のうち、境界がないものを閉曲面と呼びます。

オイラー標数

境界があってもなくても、一つの曲面に分割を一つ選びます。
その分割の頂点数を V 、辺数を E 、面数を F とします。
次の値 χ （カイ）を、オイラー標数と呼びます。

$$\chi = V - E + F$$

第2回の七つの橋の問題で
紹介したオイラーにちなむ名前です。



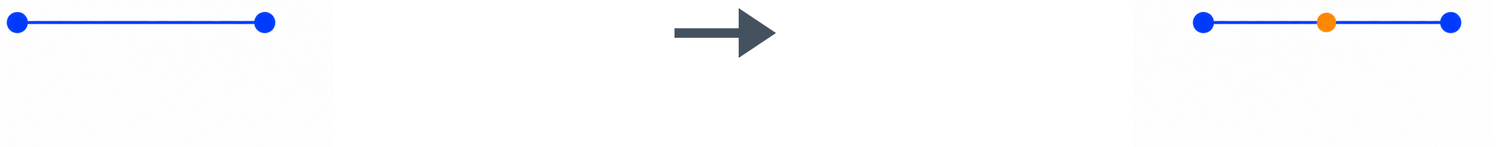
$$\chi = 8 - 12 + 6 = 2$$

頂点数から辺数を引き、面数を足した値を調べます。

辺の途中に頂点を増やす

分割を細かくする方法の一つとして、一本の辺を二つに分けます。
辺の途中に頂点を一つ加え、他の辺や面はそのままにします。

変更前の曲面全体の個数を V, E, F とします。



変更前　　頂点が 1 個増え、辺が 1 本増える

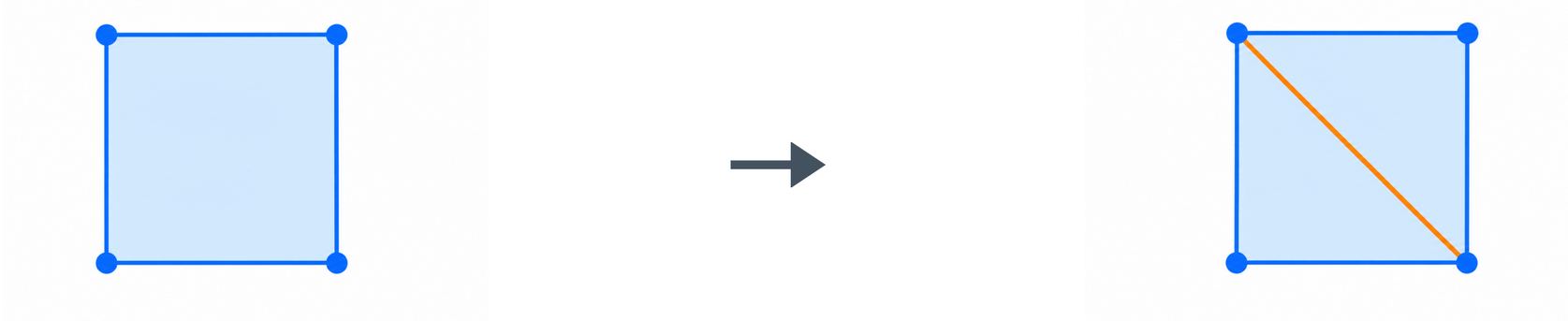
変更後のオイラー標数

$$(V+1)-(E+1)+F=V-E+F$$

頂点と辺が一つずつ増えるので、オイラー標数は変わりません。

一枚の面を二つに分ける

一枚の面の二つの頂点を、面の内部を通る新しい辺でつなぎます。
分割は細かくなりますが、曲面そのものは変わりません。
変更前の曲面全体の個数を V, E, F とします。



変更前　　辺が 1 本増え、面が 1 枚増える

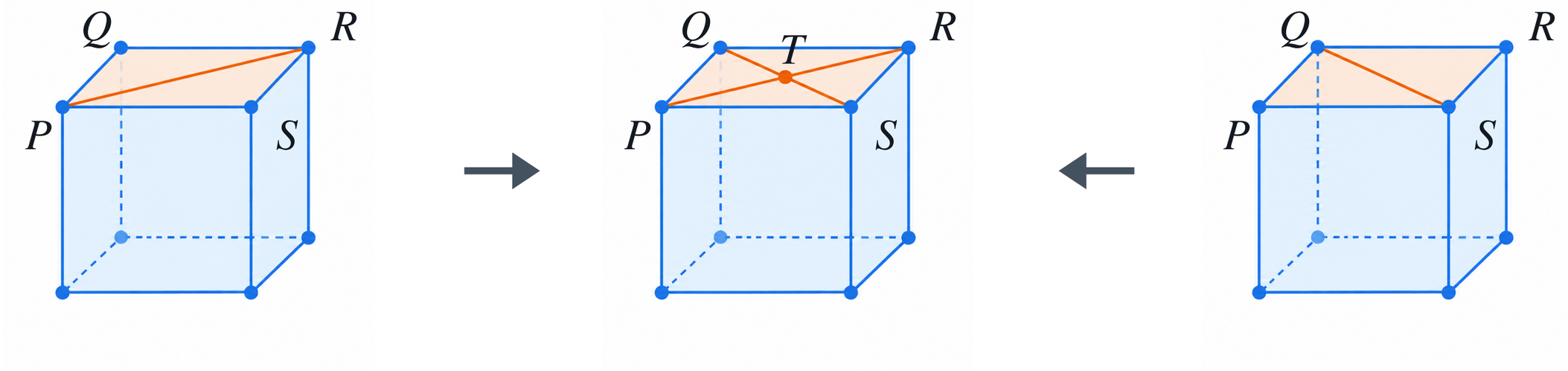
変更後のオイラー標数

$$V - (E + 1) + (F + 1) = V - E + F$$

辺と面が一つずつ増えるので、オイラー標数は変わりません。

分割が違ってもオイラー標数は同じ

同じ曲面の二つの分割を、共通の細かい分割にして比べます。
11・12ページの操作では、分割を細かくしてもオイラー標数は変わりません。

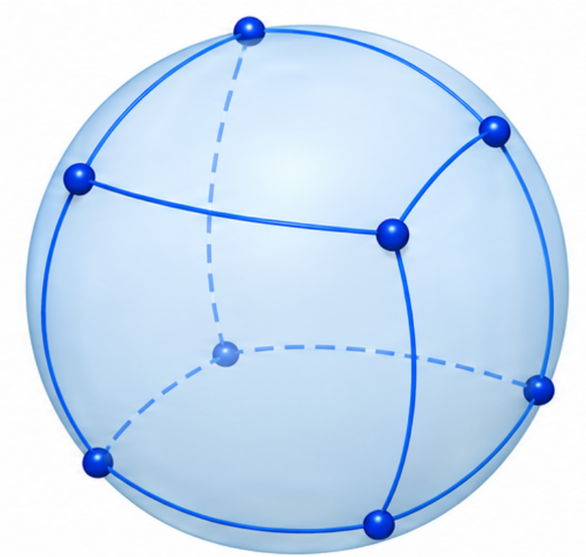


分割A　　共通の細かい分割　　分割B

Aと中央、Bと中央のオイラー標数がそれぞれ等しいので、
AとBのオイラー標数も等しくなります。

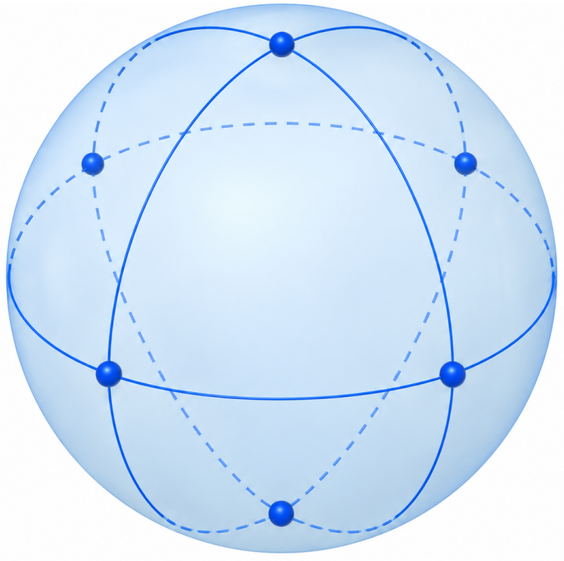
球面のオイラー標数

同じ球面を四角形 6 枚で分割した場合と、三角形 8 枚で分割した場合を比べます。



四角形 6 面の分割

$\chi = 8 - 12 + 6 = 2$



三角形 8 面の分割

$\chi = 6 - 12 + 8 = 2$

球面のオイラー標数は、分割の選び方によらず 2 です。

球面と浮き輪の形の違い

同じ形の曲面には、頂点・辺・面が対応する分割を作れます。
分割の選び方によらないので、同じ形ならオイラー標数は一致します。
この意味で、オイラー標数は曲面の不変量です。
浮き輪の表面のような曲面を、トーラスと呼びます。



球面：オイラー標数は 2



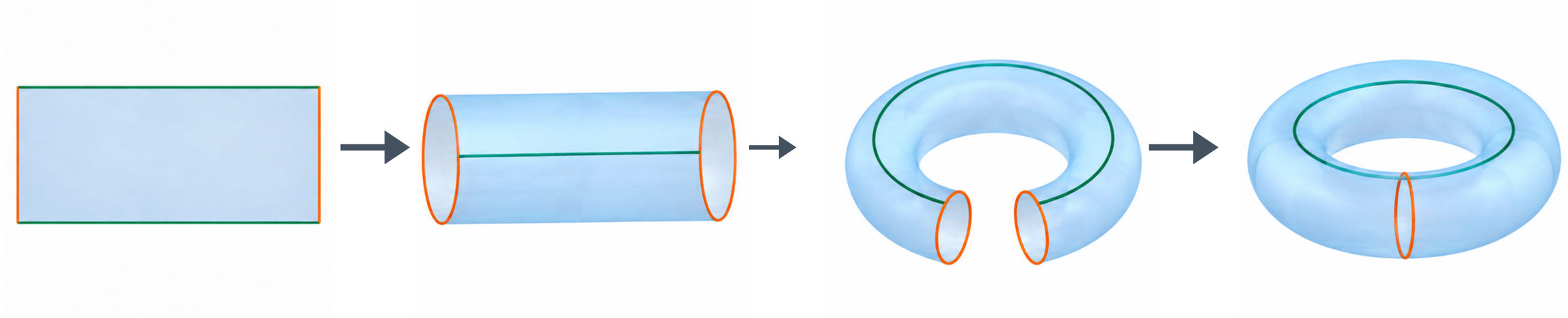
トーラス：これから計算する

見た目の違いを、オイラー標数の違いとして表せるか考えます。

長方形からトーラスを作る

長方形の上下を貼って筒を作り、筒の両端の円周も貼り合わせます。
境界上の対応する点どうしを一つにして、新しい曲面を作る操作です。

上下を貼る　　筒を曲げる　　両端を貼る

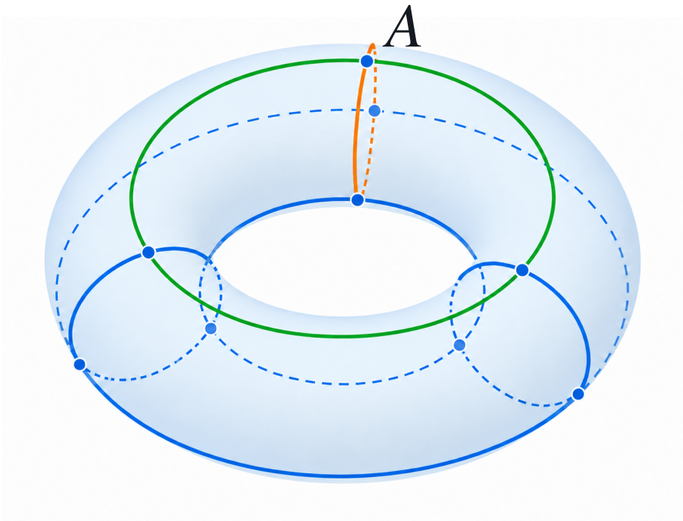


長方形　　筒　　曲げた筒　　トーラス

貼り合わせの仕組みを確かめ、トーラスの分割を作る準備をします。

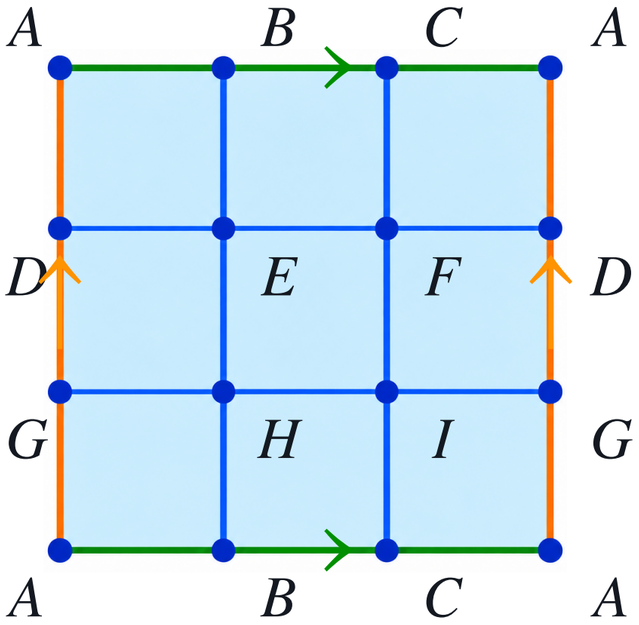
トーラスを平面の図で表す

左側のトーラスを、緑とオレンジ色の輪に沿って切り開きます。
長方形の上と下、左と右を貼ると、元のトーラスに戻ります。
長方形の四隅の A は、トーラスの一点 A に戻ります。



青い線も曲面の分割です。
切った輪が境界になります。

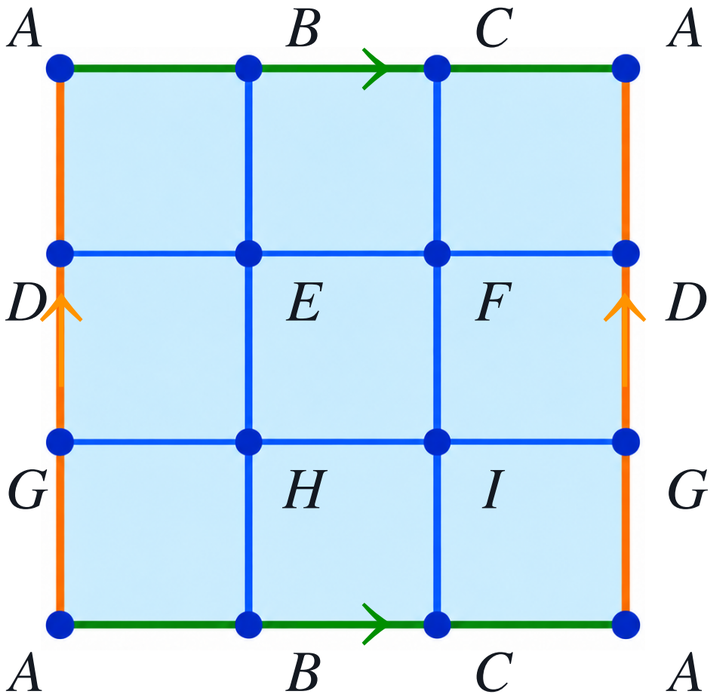
二つの輪に沿って切る



長方形と、上下・左右を貼る約束で、トーラスを表します。

トーラスのオイラー標数

曲がった面の代わりに、貼り合わせの約束を付けた長方形の図を使います。
上と下、左と右を貼ったときに重なる頂点や辺は、一つとして数えます。



頂点：対応する点をまとめて 9 個

辺：縦に 9 本、横に 9 本で 18 本

面：九つの四角形で 9 枚

$$\chi = 9 - 18 + 9 = 0$$

トーラスのオイラー標数は 0 です。

形の違いを数学で証明する

オイラー標数は不変量なので、同じ形の曲面では値が一致します。
球面のオイラー標数は 2 、トーラスのオイラー標数は 0 です。
したがって、球面とトーラスは同じ形ではありません。



球面： $\chi = 2$



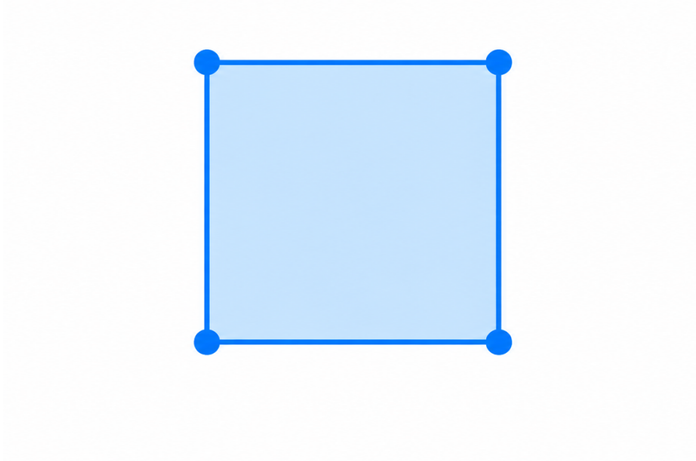
トーラス： $\chi = 0$

見た目による判断を、オイラー標数を使って数学的に証明できました。

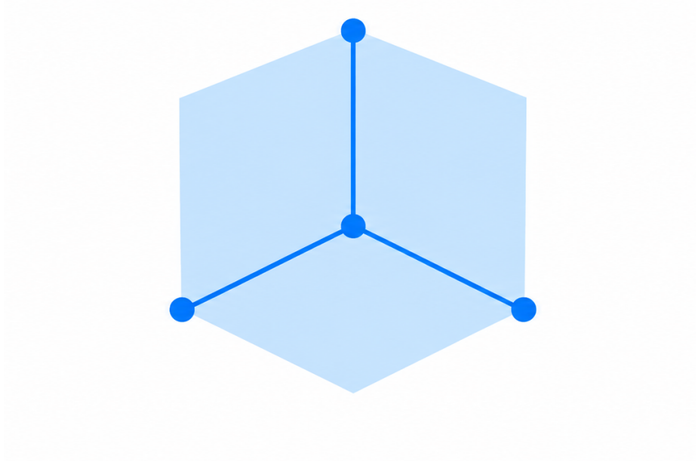
オイラー標数の違いが、同じ形でないことの証明になります。

正多面体の種類を調べる

ここでは長さや角度にも条件を加え、くぼみのない正多面体を調べます。
全ての面を同じ大きさの正 p 角形にし、どの頂点にも q 枚ずつ集めます。
どの正多面体の表面も球面と同じ形なので、オイラー標数は 2 です。



一つの面の辺は p 本

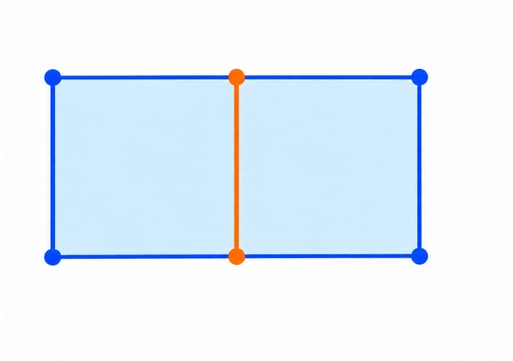


一つの頂点には q 枚

オイラー標数を使って、正多面体で可能な組 (p, q) を探します。

面と頂点から辺を数える

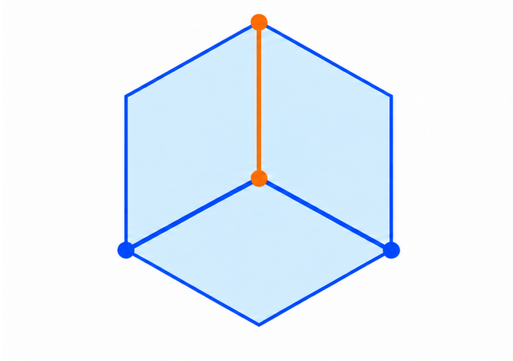
① 面の周りから数える



各面の周りの p 本を、
面の総数 F 枚分数えます。
各辺を隣り合う 2 面から
1 回ずつ、計 2 回数えます。

$$pF = 2E$$

② 頂点から数える



各頂点から伸びる q 本を、
頂点の総数 V 個分数えます。
各辺を両端の 2 頂点から

$$qV = 2E$$

正多面体の条件から、 $pF = 2E$ と $qV = 2E$ が得られます。

オイラー標数の式へ代入する

前のページの式 $qV = 2E$ を q で、 $pF = 2E$ を p で割ります。

$$V = \frac{2E}{q}, F = \frac{2E}{p}$$

球面のオイラー標数の式 $V - E + F = 2$ に代入します。

$$\frac{2E}{q} - E + \frac{2E}{p} = 2$$

左辺の各項にある E をまとめます。

$$E(\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1) = 2$$

頂点数と面数を辺数で表すと、 p, q, E の条件式になります。

面の辺数と集まる枚数の条件

前のページで得た式を使います。

$$E(\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1)=2$$

辺数 E は正なので、括弧の中も正です。

$$\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1>0 \Rightarrow \frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$$

面は三角形以上の多角形で、各頂点には 3 枚以上の面が集まります。
したがって、 p と q はどちらも 3 以上の整数です。

正の整数 p, q は、 $p, q \geq 3$ と $1/p + 1/q > 1/2$ を満たします。

少なくとも一方は 3

仮に、 p も q も 4 以上だったとします。

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

これは、前のページで得た次の条件に矛盾します。

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$$

p も q も 4 以上の場合は起こりません。
どちらも 3 以上なので、少なくとも一方は 3 です。

p と q の少なくとも一方は 3 です。

残る五つの組み合わせ

前の条件 $1/p + 1/q > 1/2$ に、一方が 3 であることを使います。

① $p = 3$ として、両辺から $1/3$ を引きます。

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{q} > \frac{1}{6} \Rightarrow q < 6$$

q は 3 以上の整数なので、 $q = 3, 4, 5$ です。

② $q = 3$ として、同じく両辺から $1/3$ を引きます。

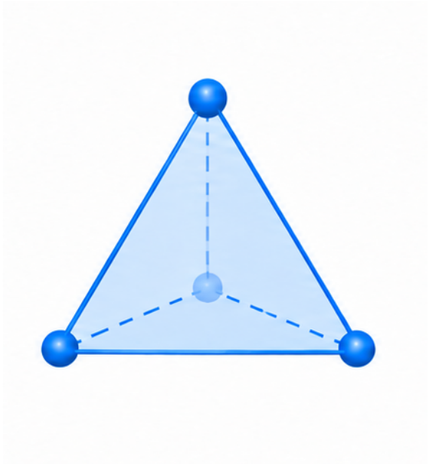
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{3} > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{p} > \frac{1}{6} \Rightarrow p < 6$$

$p = 3, 4, 5$ です。①と重なる $(3, 3)$ を 1 組として数えます。

可能性が残るのは 5 組です。実際の形を次のページで確かめます。

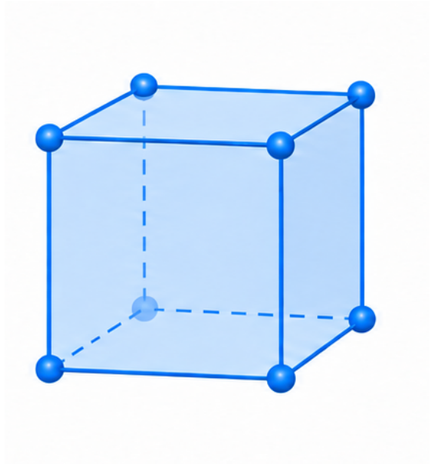
五種類の正多面体

残った 5 組は、次の正多面体として全て実現します。



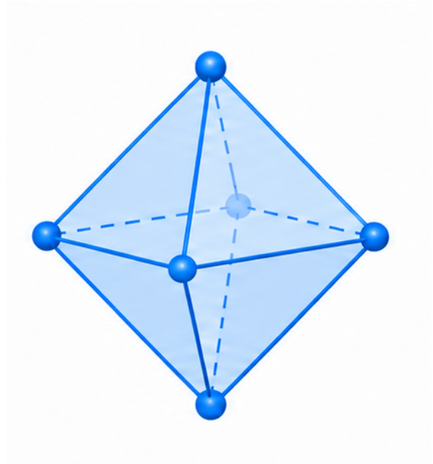
正四面体

$(3, 3)$



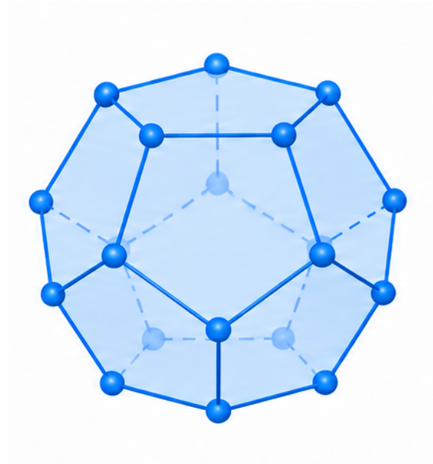
正六面体

$(4, 3)$



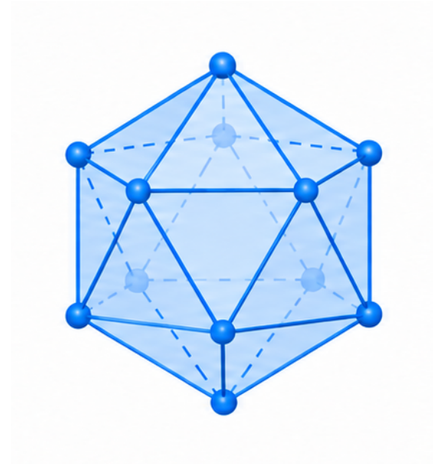
正八面体

$(3, 4)$



正十二面体

$(5, 3)$



正二十面体

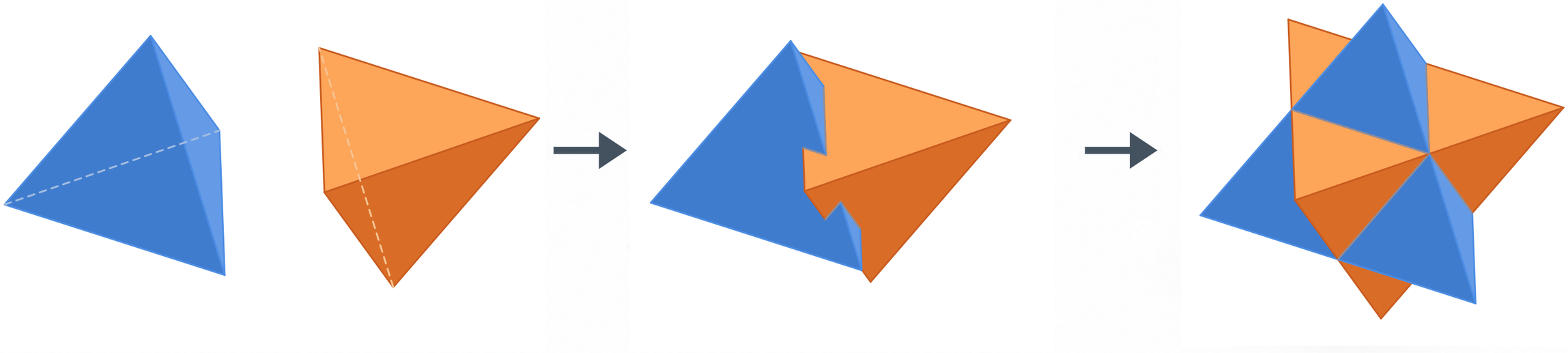
$(3, 5)$

同じ組 (p, q) の正多面体は、大きさの違いを除けば同じ多面体です。

くぼみのない正多面体は、この 5 種類です。

二つの正四面体を重ねる

同じ大きさの二つの正四面体を逆向きにし、中心をそろえて重ねます。
全体にも高い対称性があり、正複合多面体の一例となります。



逆向きの二つの正四面体　　中心を近づける　　中心をそろえる

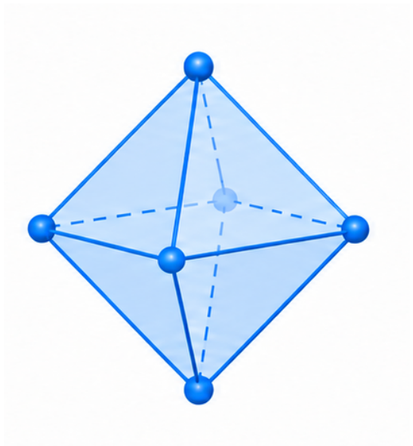
ほしがたはちめんたい
星型八面体

複数の多面体を重ねたものを、複合多面体と呼びます。

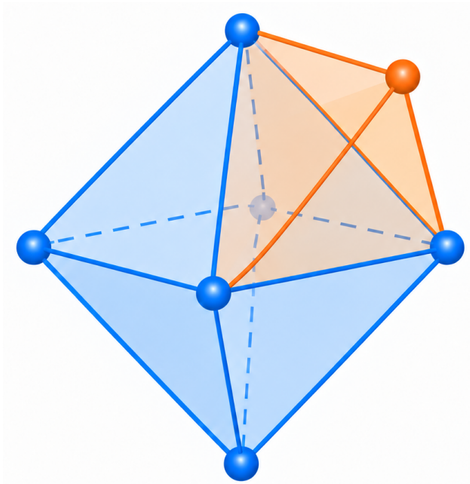
ほしがたはちめんたい

星型八面体

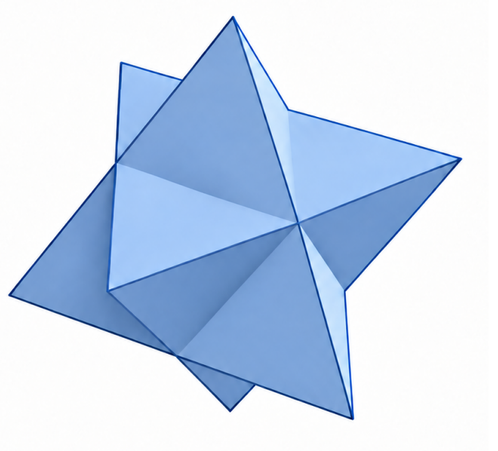
正八面体の 8 枚の面に、小さい正四面体を一つずつ貼ります。
三角形の面をぴったり合わせ、すべて外向きに付けます。
前のページと同じ星型八面体を、別の作り方で見ています。



正八面体



一面に正四面体を貼る



8 個を貼った完成形

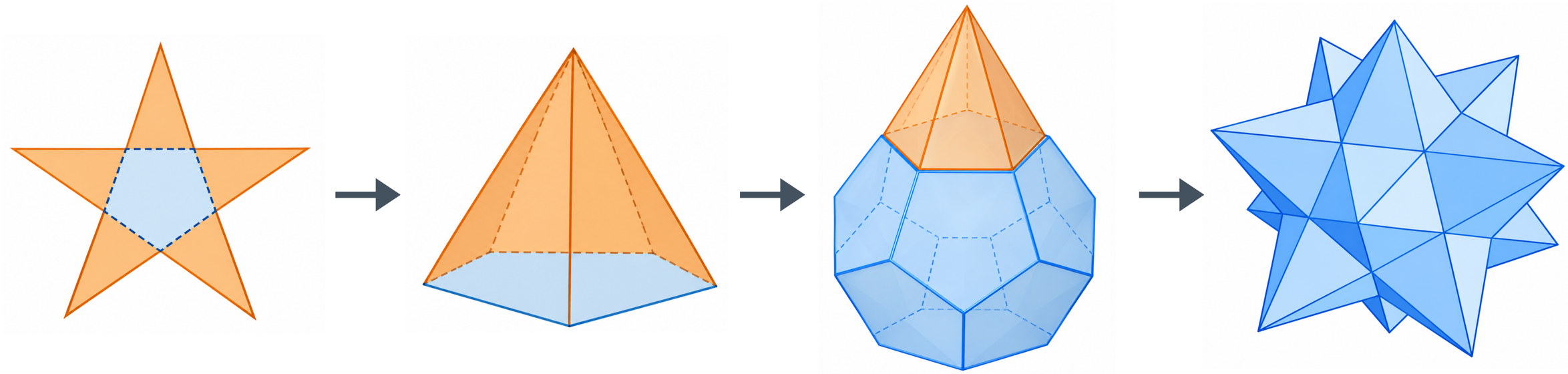
$$\chi = (6 + 8) - (12 + 24) + 24 = 14 - 36 + 24 = 2$$

この立体の外側の表面のオイラー標数は、球面と同じ 2 です。

しょうほしがたじゅうにめんたい

小星型十二面体

星形の五つのとがった部分を折り上げ、五角錐を作ります。
底面の五角形を、正十二面体の面にぴったり合わせて貼ります。
12 枚の面すべてに付けると、小星型十二面体ができます。



点線の辺で折る　五角錐　一面に貼る　12 面すべてに貼る

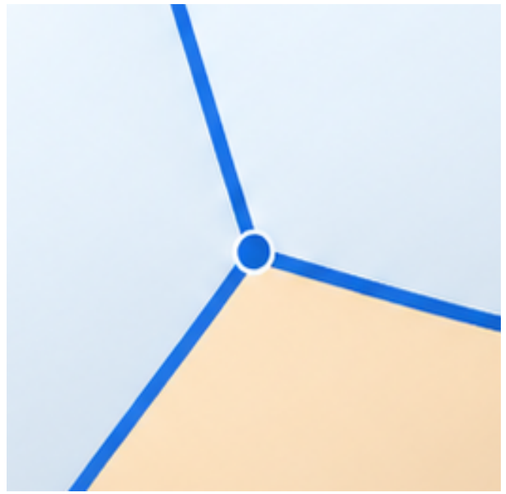
正十二面体の各面に、同じ五角錐を外向きに付けた立体です。

六角形だけで球面を覆えるか

図のサッカーボールは、五角形と六角形を貼り合わせた形です。
一つの頂点には、五角形 1 枚と六角形 2 枚が集まっています。
この 3 枚という条件で、五角形を使わず六角形だけにできるでしょうか。
ここからは、各面が正多角形であることは仮定しません。



五角形と六角形のボール



一つの頂点の周り

各頂点に 3 枚の面が集まる条件で、六角形だけにできるか考えます。

六角形だけでは球面にならない

六角形だけを使い、各頂点に 3 枚の面を集めたと仮定します。

面の周りから数えると、各辺を 2 回数えます。

$$6F = 2E \Rightarrow E = 3F$$

頂点からも各辺を 2 回数えるので、頂点数は次のようになります。

$$3V = 2E = 6F \Rightarrow V = 2F$$

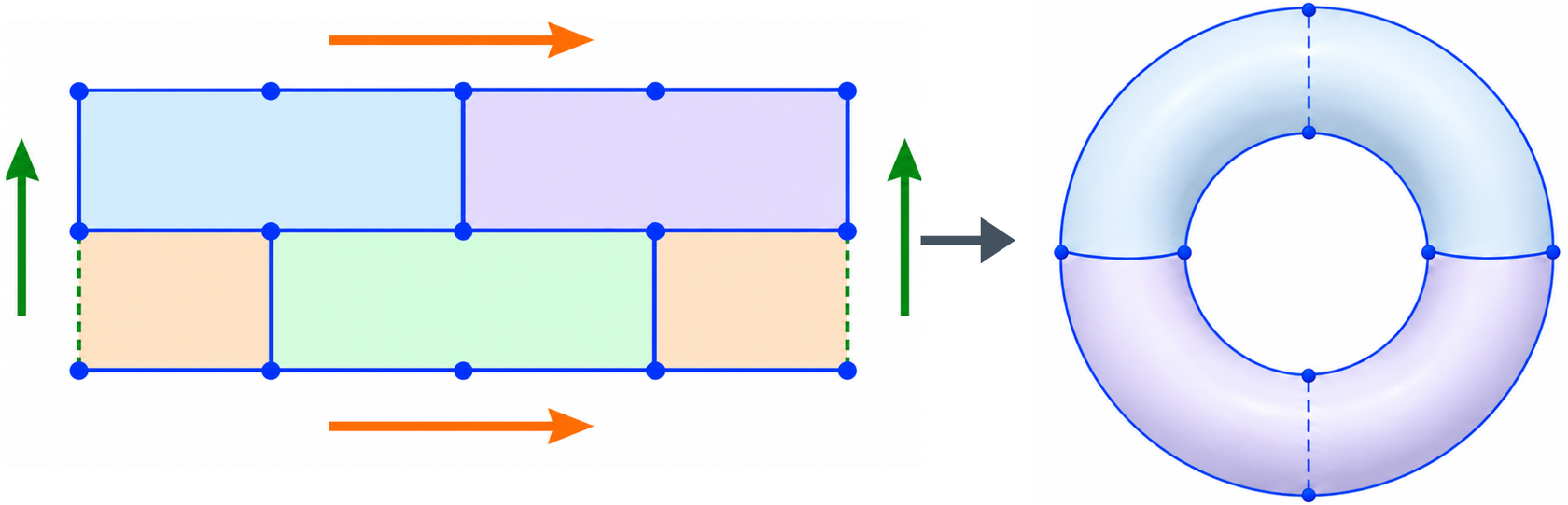
オイラー標数を計算すると、球面の値 2 と一致しません。

$$\chi = V - E + F = 2F - 3F + F = 0 \neq 2$$

各頂点に 3 枚の面が集まる条件では、六角形だけで球面を覆えません。

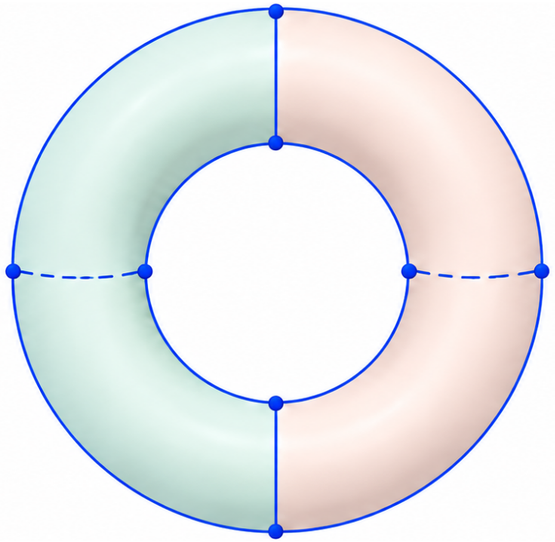
六角形で分割したトーラス

左の図の上と下、左と右をそれぞれ貼ると、右のトーラスの分割になります。
青い点の間を 1 本の辺と数えると、各面の周りは 6 本の辺です。
点線は、左では切り開いた位置、右では裏側の辺を表します。



同じ色の矢印の側を貼る

上から



下から

六角形だけの分割は、球面にはなくてもトーラスには作れます。

五角形と六角形の枚数

球面の分割に戻り、五角形と六角形の枚数をどこまで変えられるか調べます。
各頂点に 3 枚集め、五角形を P 枚、六角形を H 枚とします。

面の周りから数えると、各辺を 2 回数えます。

$$5P + 6H = 2E \Rightarrow E = (5P + 6H)/2$$

頂点からも各辺を 2 回数えます。面の総数は 2 種類の和です。

$$3V = 2E \Rightarrow V = 2E/3, F = P + H$$

オイラー標数を使って、五角形と六角形の枚数の条件を求めます。

五角形はちょうど 12 枚

前のページの $V = 2E/3$ と $F = P + H$ を、 $V - E + F = 2$ に代入します。

$$2 = \frac{2E}{3} - E + P + H = -\frac{E}{3} + P + H$$

さらに、前のページの $E = (5P + 6H)/2$ を代入します。

$$2 = -\frac{5P + 6H}{6} + P + H = \frac{P}{6}$$

$$P = 12$$

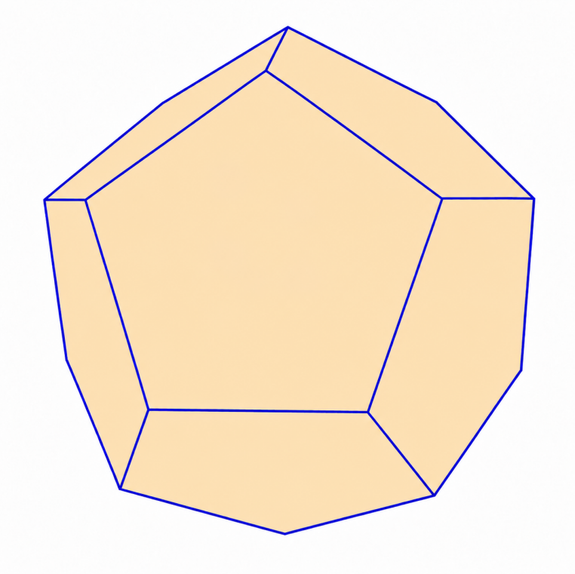
別の結果として、六角形は 0 枚か 2 枚以上のどの枚数でも作れます。

1 枚では作れません（Grünbaum（グリュンバウム）の定理による）。

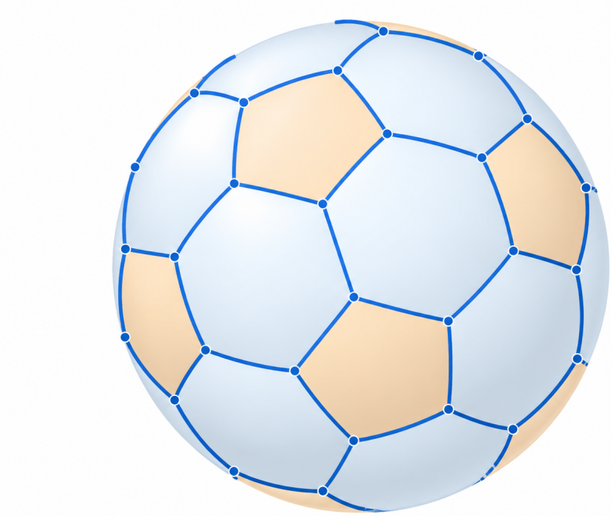
オイラー標数を使うと、五角形はちょうど 12 枚と決まります。

六角形の枚数を変えた例

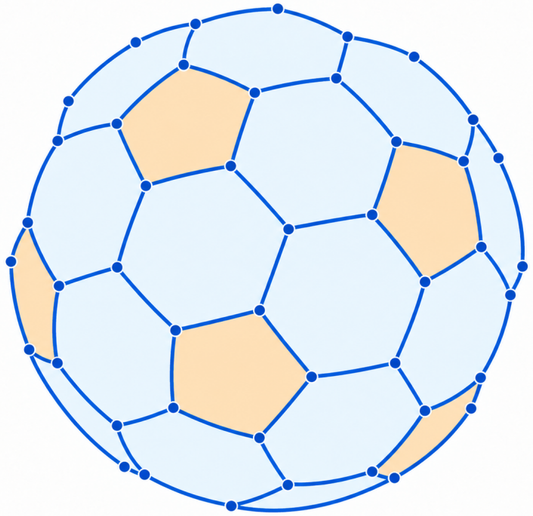
五角形だけの例も、六角形を加えた例も作れます。



五角形 12 枚・六角形 0 枚
正十二面体の表面



五角形 12 枚・六角形 20 枚
図のサッカーボールの形



五角形 12 枚・六角形 30 枚

五角形はどの例も 12 枚ですが、六角形の枚数は異なります。

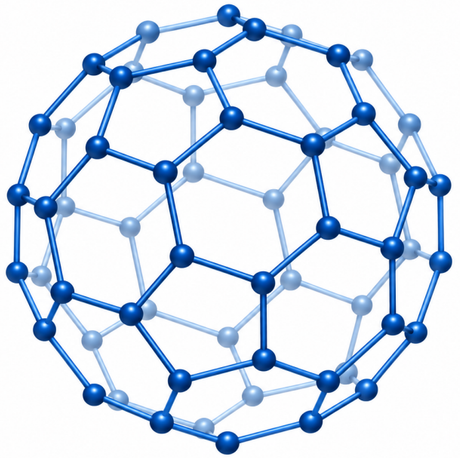
フラーレン C_{60}

フラーレンは、炭素原子がかご状につながった分子の仲間です。
代表例 C_{60} は炭素原子 60 個からなり、前の中央のボールと同じ構造です。

バックミンスター・フラーのドームが、
中空のかご形を考える手がかりとなり、
その名にちなんで名付けられました。

1985年、黒鉛をレーザーで蒸発させる
実験から見いだされました。

2010年には、星が放出したガスやちりの中にも
C_{60} があることが、赤外線の観測で
確かめられました。



点：炭素原子
辺：原子どうしの結合

分子の結び付きにも、五角形 12 枚・六角形 20 枚の構造が現れます。

七角形も加えて調べる

五角形と六角形に、七角形も加えて球面を分割する場合を考えます。
各頂点に 3 枚集め、面の枚数をそれぞれ P 、 H 、 S とします。

各面の周りから数えると、各辺を 2 回数えます。

$$5P + 6H + 7S = 2E \Rightarrow E = (5P + 6H + 7S)/2$$

頂点からも各辺を 2 回数えます。面の総数は 3 種類の和です。

$$3V = 2E \Rightarrow V = 2E/3, F = P + H + S$$

五角形・六角形・七角形の枚数を、オイラー標数で調べます。

五角形と七角形の枚数の関係

前のページの $V = 2E/3$ と $F = P + H + S$ を、 $V - E + F = 2$ に代入します。

$$2 = -\frac{E}{3} + P + H + S$$

さらに、前のページの $E = (5P + 6H + 7S)/2$ を代入します。

$$2 = -\frac{5P + 6H + 7S}{6} + P + H + S = \frac{P - S}{6}$$

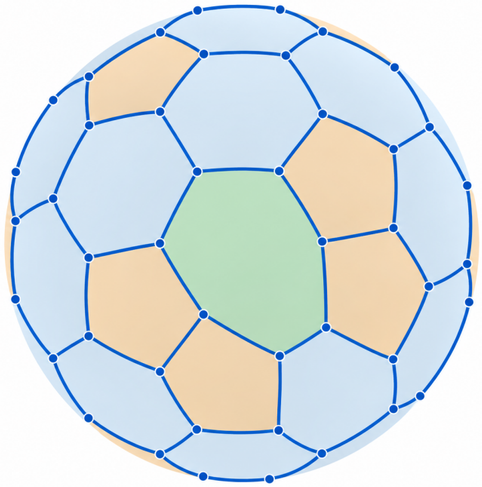
$$P - S = 12$$

この式だけで、全ての枚数の組み合わせが作れるとは限りません。

五角形の枚数は、七角形の枚数よりちょうど 12 枚多くなります。

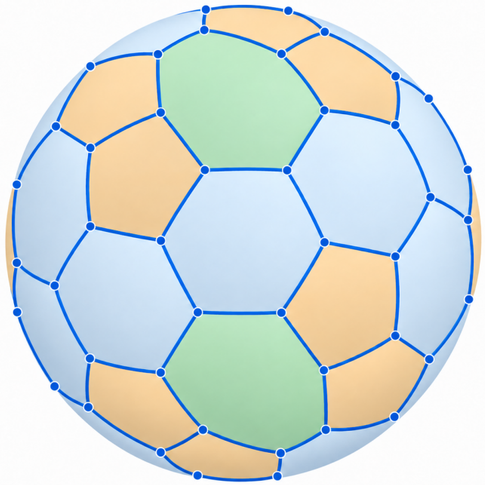
七角形を含む球面の分割

七角形を 1 枚含む例と、 2 枚含む例を比べます。



五角形 13 枚・六角形 28 枚
七角形 1 枚

$P - S = 13 - 1 = 12$



五角形 14 枚・六角形 26 枚
七角形 2 枚

$P - S = 14 - 2 = 12$

七角形を含む場合にも、条件に合う分割を実際に作れます。

数えてわかる形の違い

形の違いを証明する

$$\chi = V - E + F$$

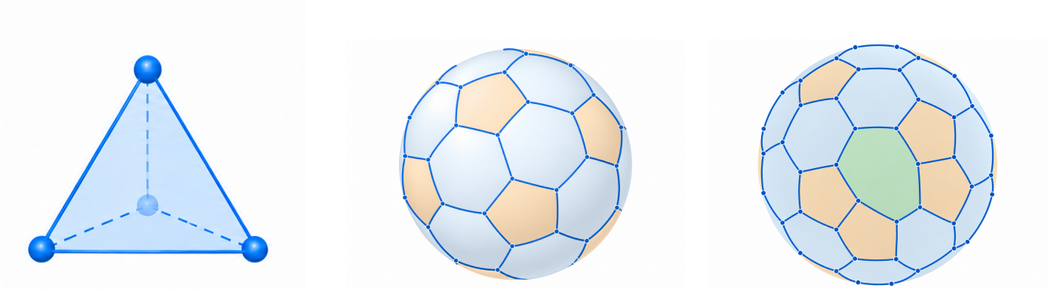




球面：$\chi = 2$ トーラス：$\chi = 0$

同じ形ならオイラー標数は同じ。
値が違うので、同じ形ではありません。

作れる形の条件を求める



くぼみのない正多面体は 5 種類。
各頂点に 3 枚集める球面の分割では
五・六角形：$P = 12$
五・六・七角形：$P - S = 12$

オイラー標数は、形の違いの証明と作れる形を探すことに役立ちます。