

先端応用化学特別講義 I

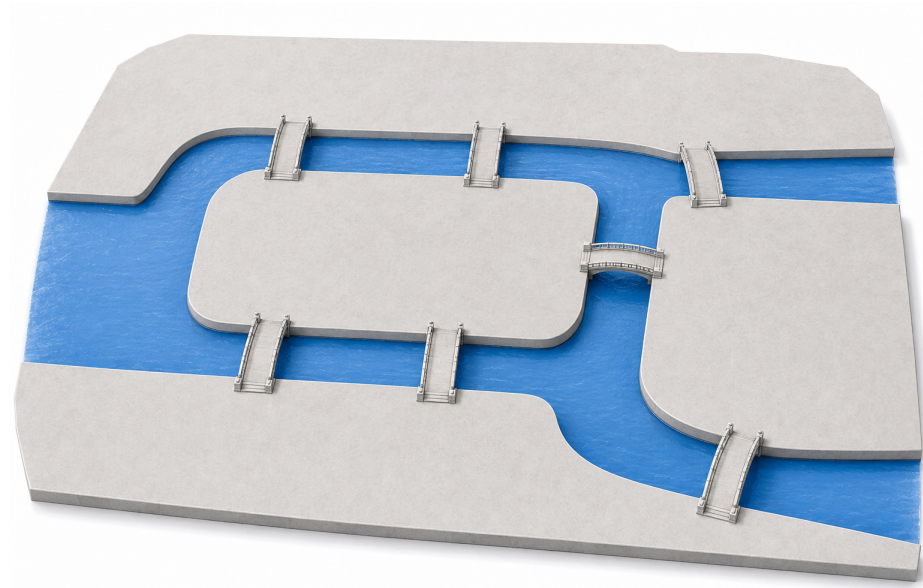
2回目講義

畠中 英里

巡り方とつなぎ方の数学

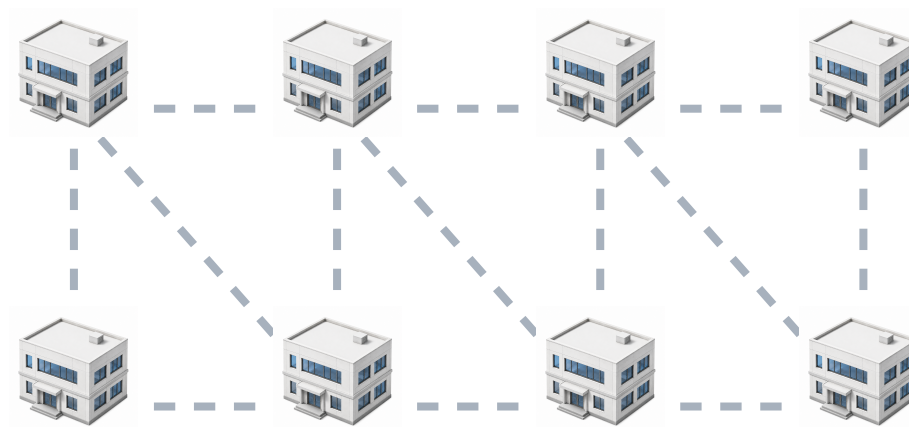
橋の渡し方と施設のつなぎ方

橋の問題



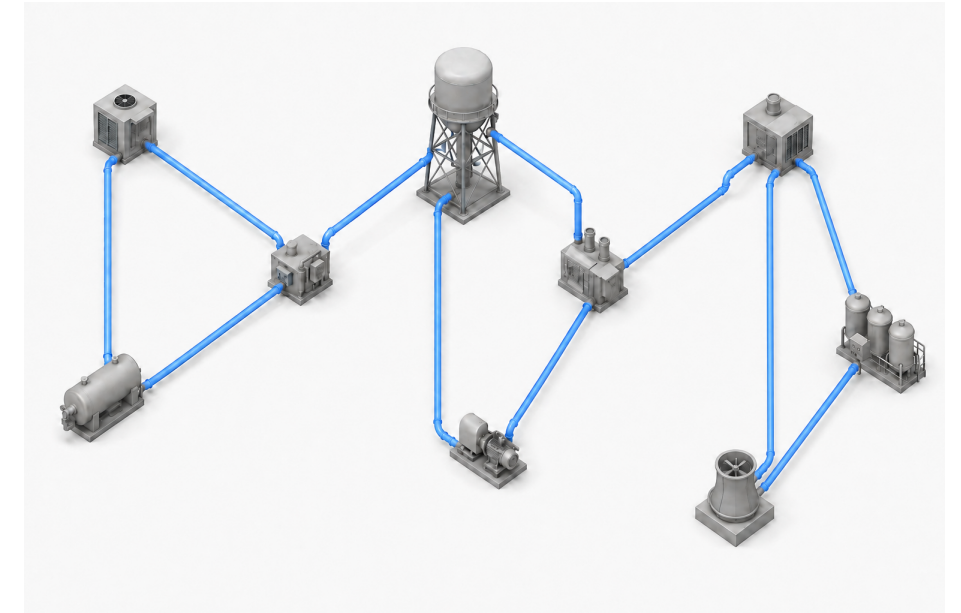
同じ橋を二度渡らずに、
七つの橋を全部
歩いて回れるか？

配線の問題



すべての施設で
通信できるように、
どの配線を選べば
工事費が最小になるか？

配管の問題



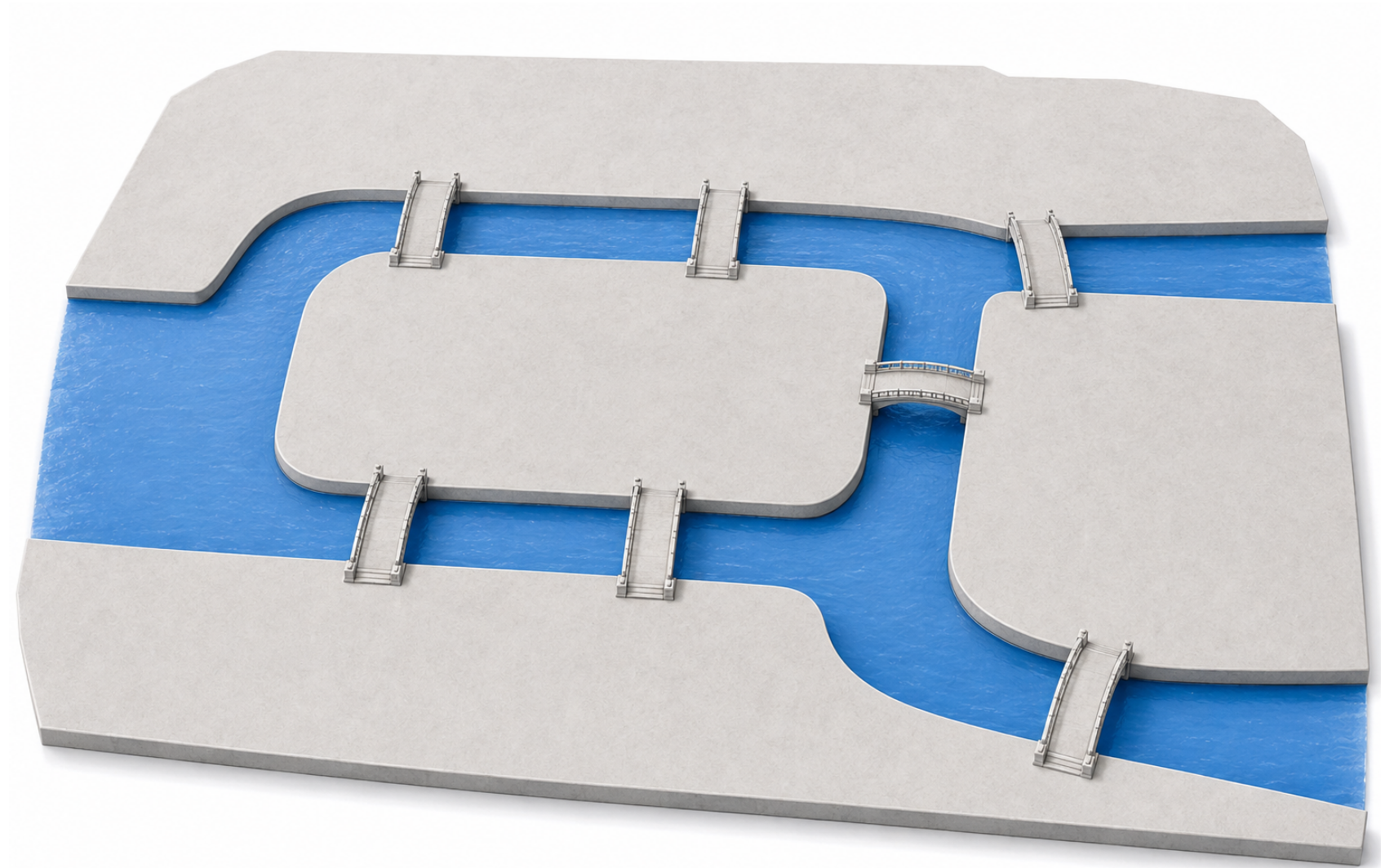
どの配管が一本
止まっても、
すべての設備に水を
届けられるか？

「つながり方」をグラフで表し、三つの問題を解きます。

七つの橋を一度ずつ渡れるか？

どこか一つの陸地から
散歩を始めます。

同じ橋を二度渡らずに、
七つの橋を全部渡る
散歩のコースはあるでしょうか。



出発する陸地は自由です。出発した場所に戻る必要はありません。

実在した七つの橋とオイラー

18世紀のケーニヒスベルクで、
実際に考えられた散歩の問題です。
現在のロシアの都市
カリーニングラードにあたります。

18世紀、数学者オイラーは
陸地と橋のつながり方に注目して
この問題を解きました。

L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis,
Comment. Acad. Sci. Petrop. 8, 128–140 (1741刊行) .



レオンハルト・オイラー

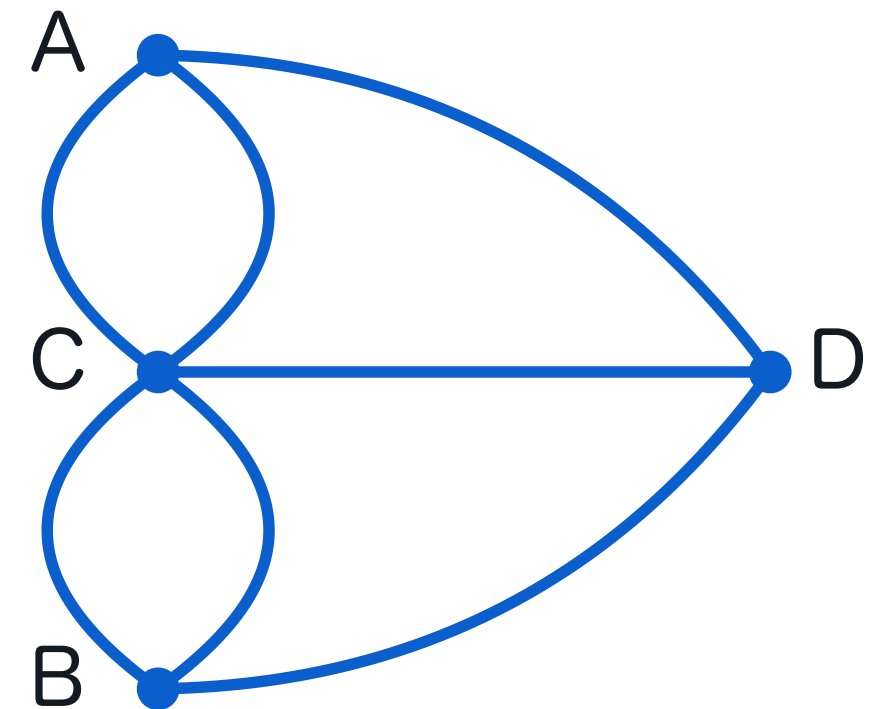
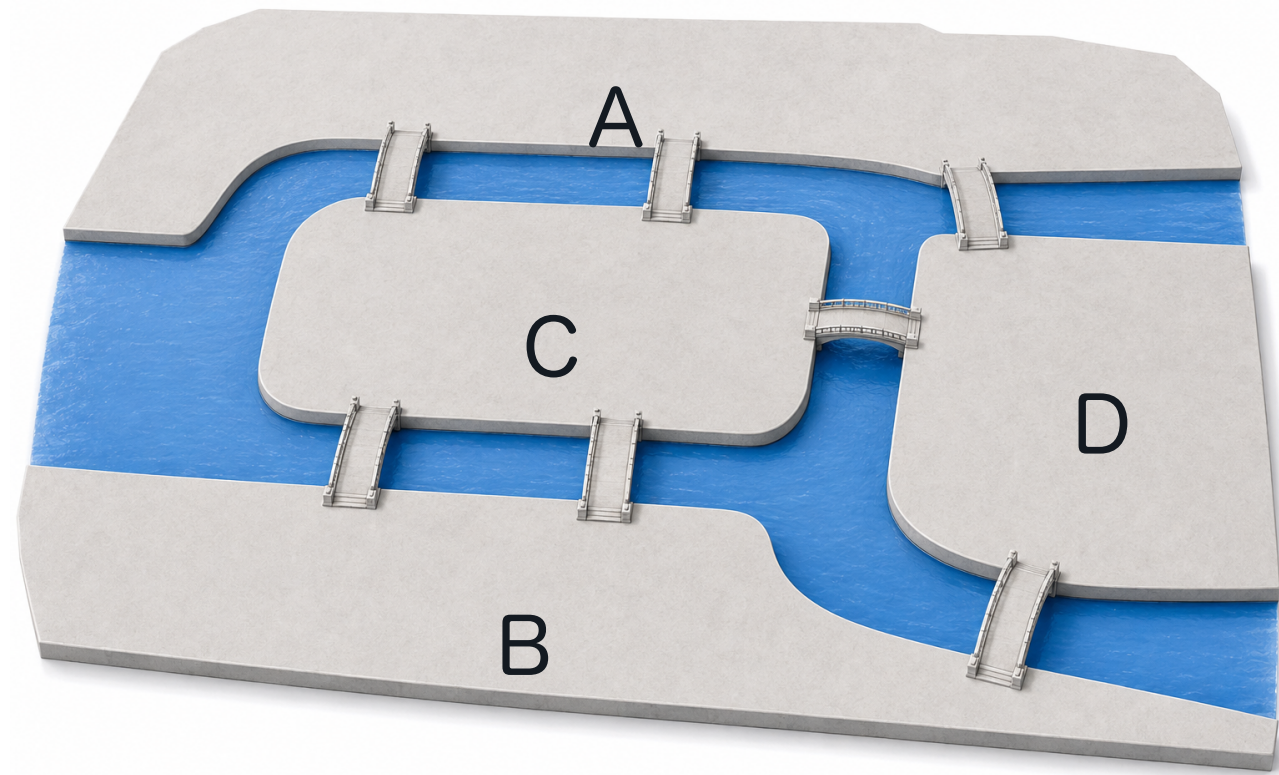
E. Handmann (1753年)、Kunstmuseum Basel
出典：Wikimedia Commons/Public domain

現実の散歩の問題を、数学の問題として解いたのがオイラーです。

散歩の問題をグラフで表す

一つの陸地を、一つの頂点で表します。

一本の橋を、両端の陸地に対応する二つの頂点を結ぶ辺で表します。

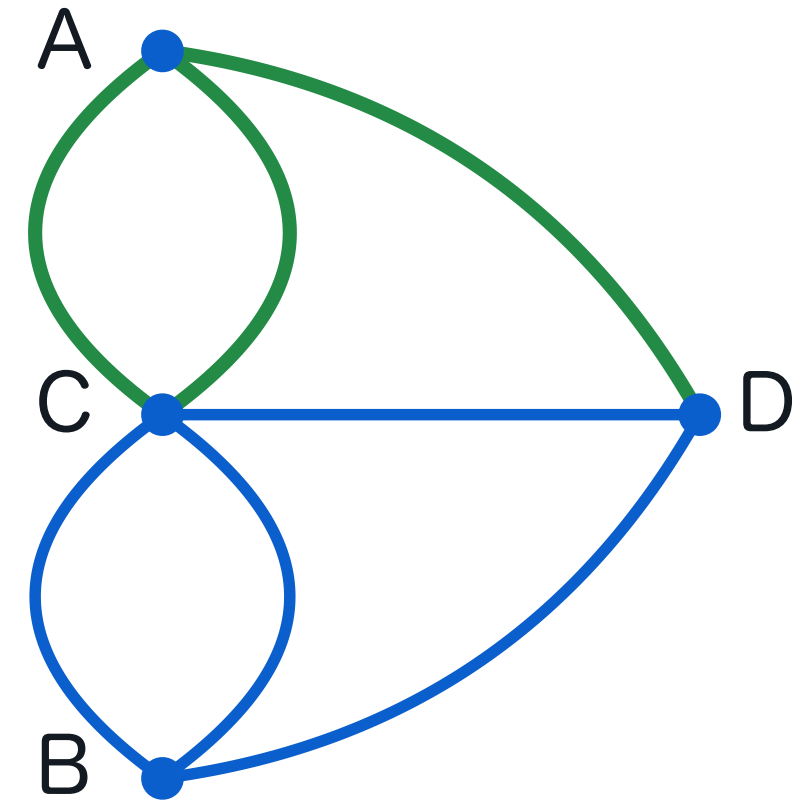


七つの橋をそれぞれ一回渡る問題は、
すべての辺を一回ずつ続けてたどる「一筆書き」の問題です。

各頂点に集まる辺を数える

一筆書きできるか、辺の本数に注目します。
頂点に集まる辺の端の数を、
その頂点の「次数」といいます。

頂点Aに集まる辺を見てみましょう。
Aの次数は 3 です。
同様に数えると、
頂点BとDの次数は 3 、
頂点Cの次数は 5 です。

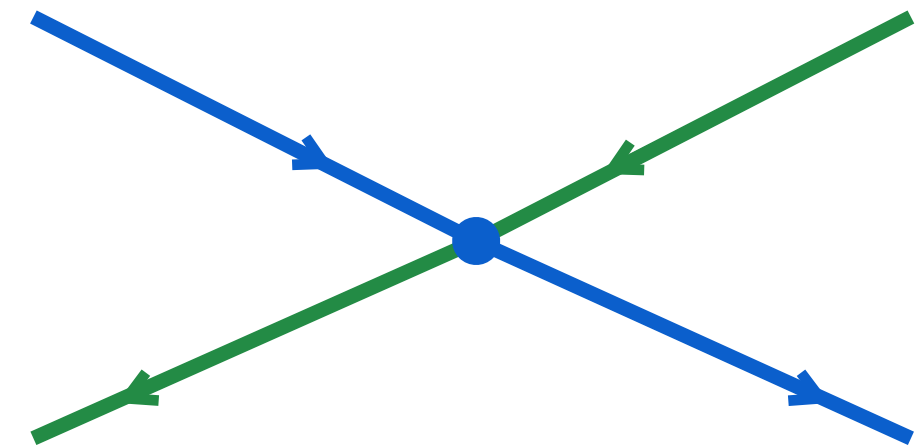


次数が奇数の頂点は 4 個で、次数が偶数の頂点はありません。

一筆書きと頂点の次数

一般のグラフで、すべての辺を一度ずつ通る条件を考えます。
ペンを離さず、グラフのすべての辺を一度ずつなぞることを
「一筆書き」と呼びます。同じ頂点は何度通ってもかまいません。

出発点・到着点以外では、
入る辺と出る辺が対になります。
この頂点につながる辺は、
どれもこの対に含まれるため、
頂点の次数は偶数になります。
出発点へ戻る場合は、
出発と到着も対になります。



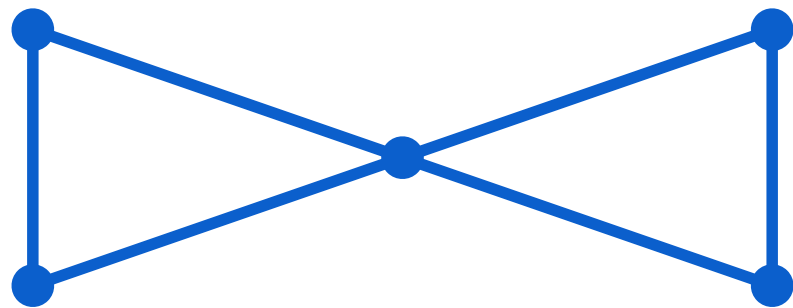
出発点・到着点以外の頂点

一筆書きができるなら、出発点・到着点以外の頂点の次数は偶数です。

一筆書きの必要十分条件

辺があり、どの頂点へも辺をたどって行けるグラフを考えます。
辺は、どちら向きにも通れるものとしします。

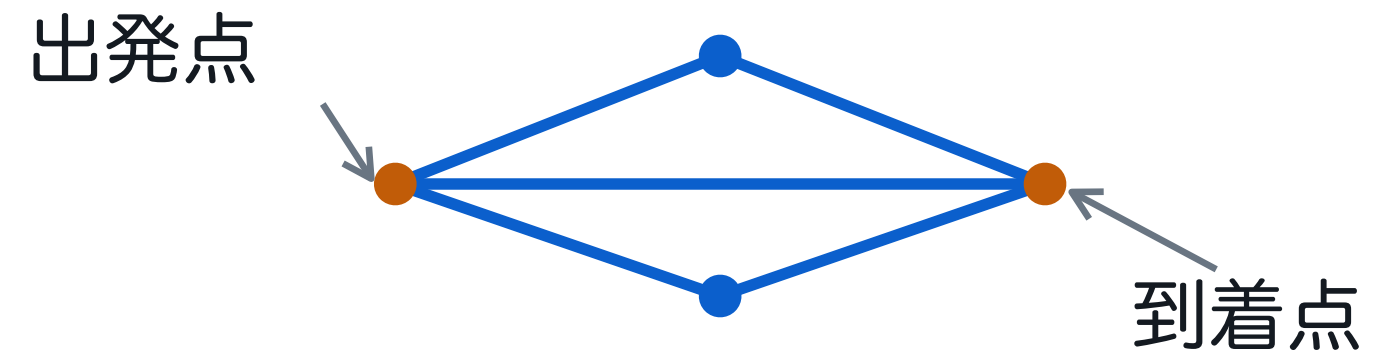
出発点に戻る場合



全頂点の次数
が偶数 $\Leftrightarrow$ 出発点に戻る
一筆書きができる

どの頂点を出発点にしてもよい

異なる頂点で終わる場合



次数が奇数の
頂点が 2 個 $\Leftrightarrow$ 異なる頂点で終わる
一筆書きができる

出発点と到着点は入れ替えられます。

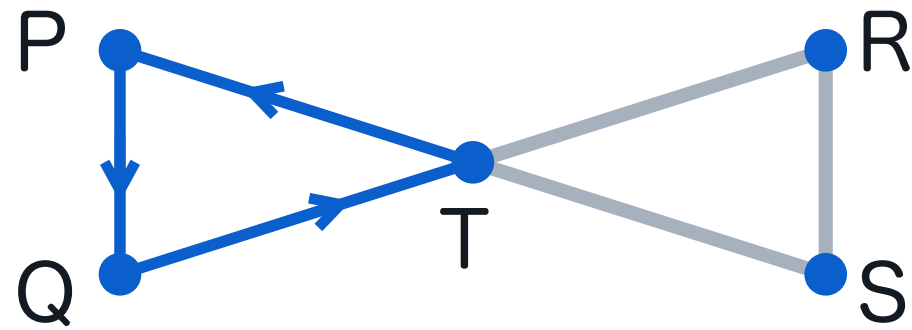
一筆書きできる $\Leftrightarrow$ 次数が奇数の頂点が 0 個または 2 個

出発点に戻る一筆書きの作り方

前の条件の左側、全頂点の次数が偶数の場合の作り方を説明します。

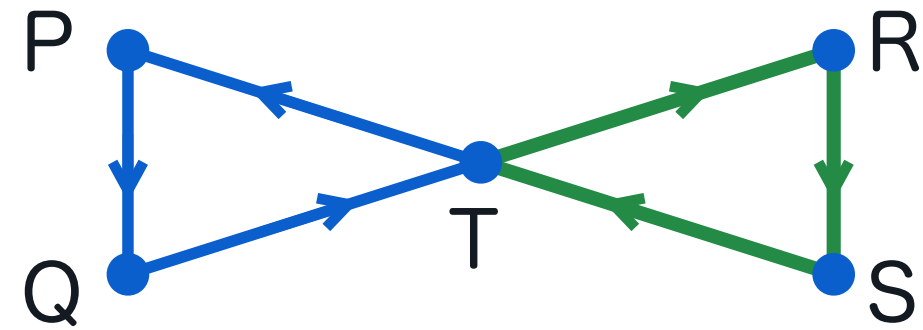
全体がつながるグラフで、出発点に戻る一筆書きを次の手順で作ります。

① 最初の一周を作る



Pから出発し、同じ辺を二度通らずに進んで、Pへ戻ります。
P以外では、まだ通っていない辺を
通って先へ進めます。

② 別の一周を途中に挟む



経路上で、まだ通っていない辺に
つながる頂点を選びます。
そこから残りの辺だけで一周し、
元の経路の途中に挟みます。

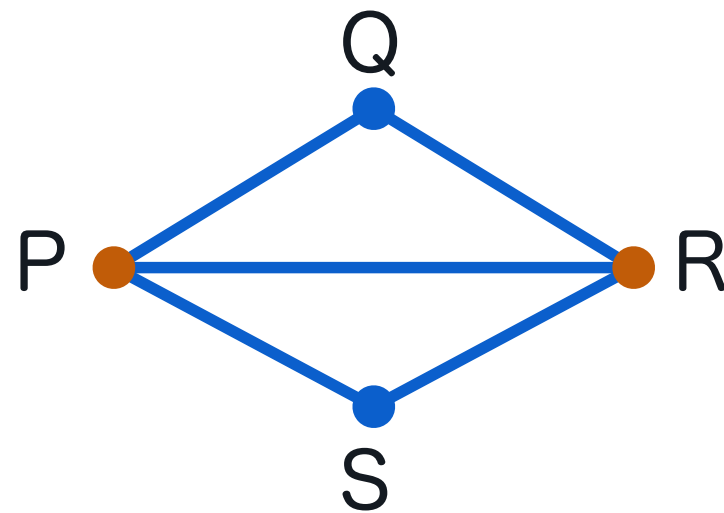
一周した辺を取り除いても、全頂点の次数は偶数のままです。

①の後、通っていない辺がなくなるまで②を繰り返します。

次数が奇数の頂点が二つの場合

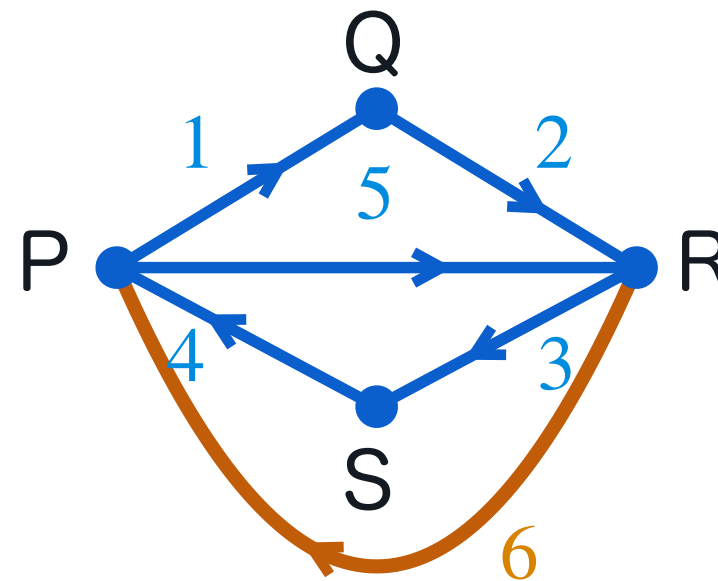
前の条件の右側の作り方です。仮の辺を加え、前ページの方法を使います。
次数が奇数の頂点が 2 個なら、異なる頂点で終わる一筆書きができます。

① 奇数次数の 2 点



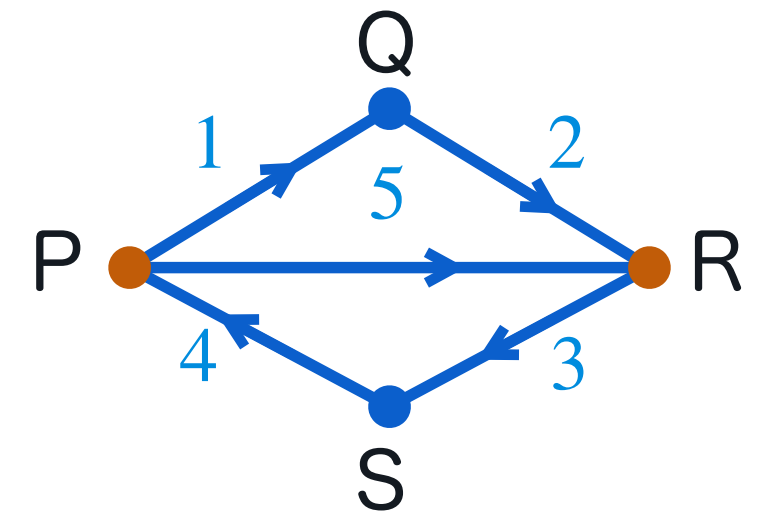
オレンジ色の P・R だけ
次数が奇数

② 仮の辺を加える



全頂点の次数が偶数
仮の辺を最後に通る並び

③ 仮の辺を取り除く



P から出発して R へ到着
逆順なら R から P へ到着

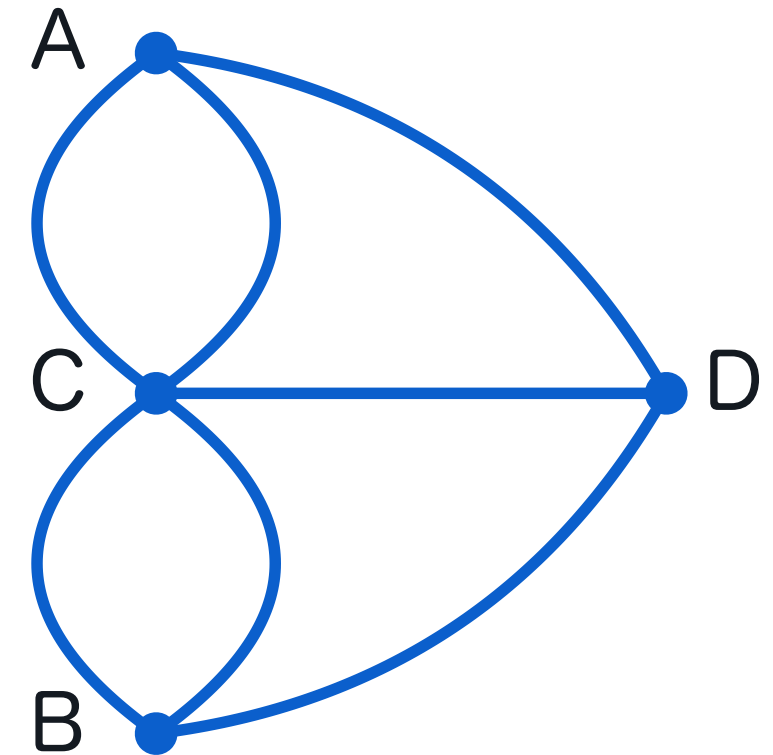
仮の辺を最後に通るように順番を選び、その辺を取り除くと、
二つの奇数次数の頂点を結ぶ一筆書きが得られます。

七つの橋の問題の答え

12

七つの橋を一度ずつ渡る
散歩のコースはありません。
次数が奇数の頂点が 4 個あり、
一筆書きの条件を満たさないためです。

橋を追加すれば、一筆書きができるでしょうか。
出発点へ戻る場合も考えます。

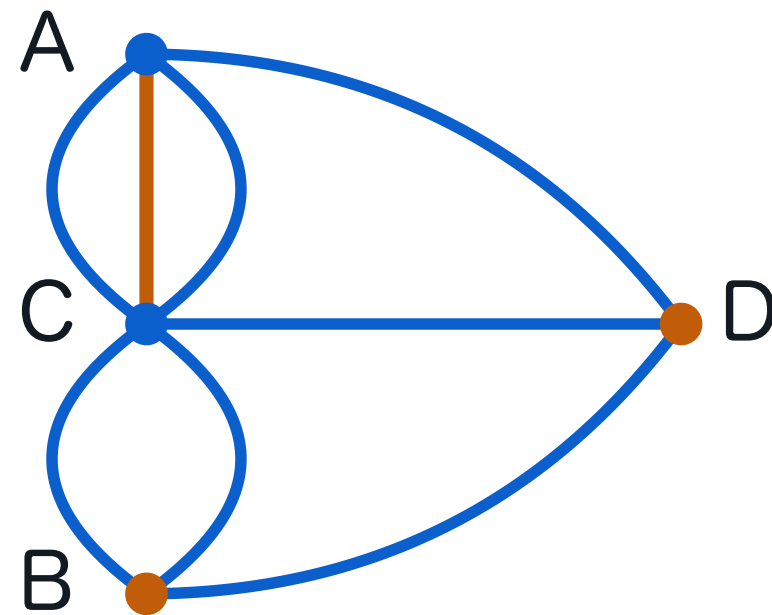


追加した橋も含めて、すべての橋を一度ずつ渡るために、
どこに橋を何本加えればよいかを考えます。

一筆書きに必要な橋の追加本数

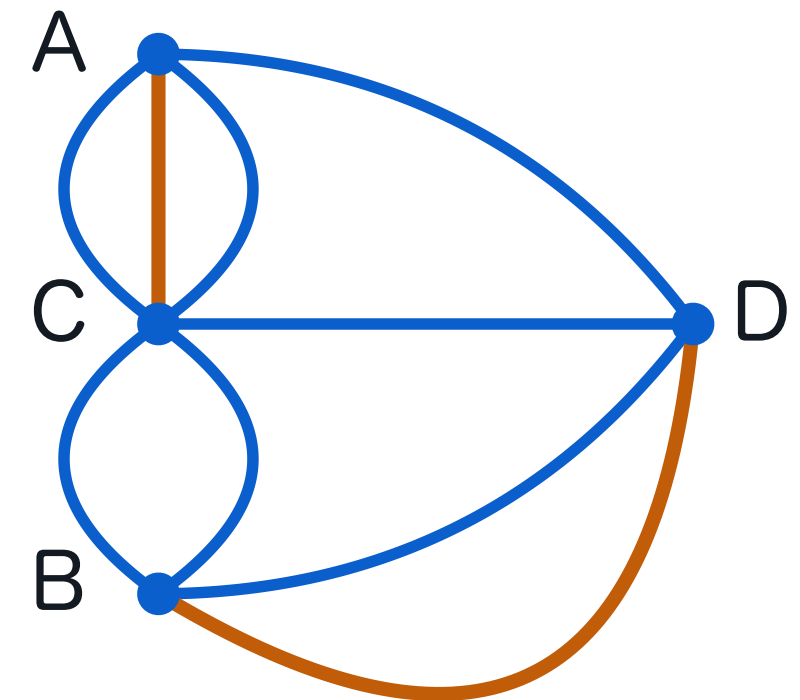
13

異なる場所で終わる：最少 1 本



ACに 1 本加えると、奇数はB・D。
BからDへ一筆書きできる（逆も可）。

出発点に戻る：最少 2 本



AC・BDに 1 本ずつ加えると全て偶数。
どの頂点からでも出発点へ戻れる。

点のオレンジ色は奇数次数、線のオレンジ色は追加した橋です。

図は追加方法の一例で、ほかの組合せでも実現できます。

橋を増やさずに出発点へ戻る

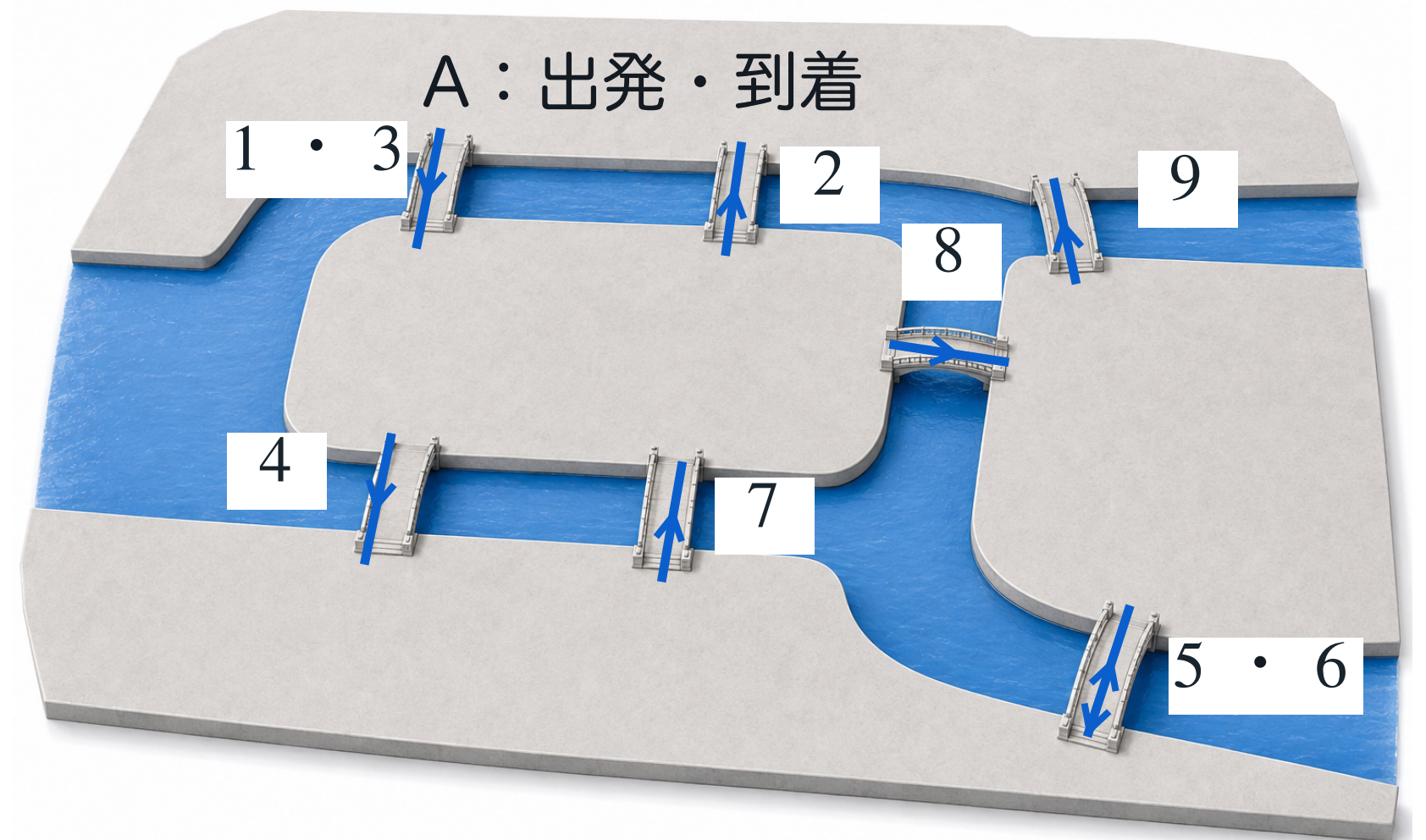
同じ橋を2回渡ってもよいとして、
全部の橋を渡って出発点へ
戻る散歩を考えます。

これは、各橋をちょうど1回ずつ
渡る一筆書きとは異なります。

AC・BDへの追加を、
同じ橋をもう一度渡ること
に読み替えます。

右図の番号順に橋を渡ります。

1・3と5・6は、それぞれ
同じ橋を二度渡る順番です。

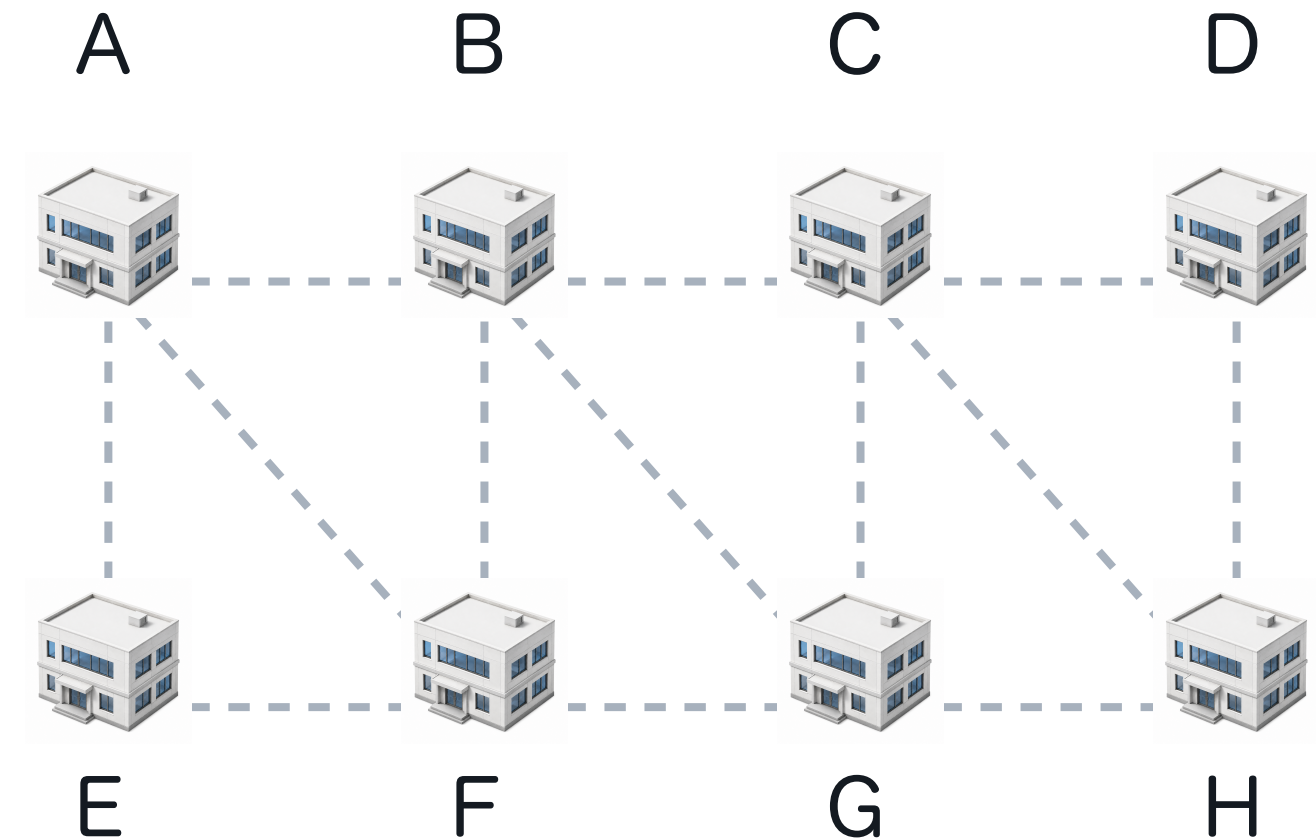


橋を増やす代わりに、一部の橋をもう一度渡ること
で、出発点へ戻る散歩が作れます。

どの配線なら工事費が最小か？

今度は、八施設をできるだけ
安くつなぐ配線を考えます。
新しく通信線を設置します。

区間ごとに工事費が異なります。
設置する区間の工事費を合計し、
最小になる配線を考えます。



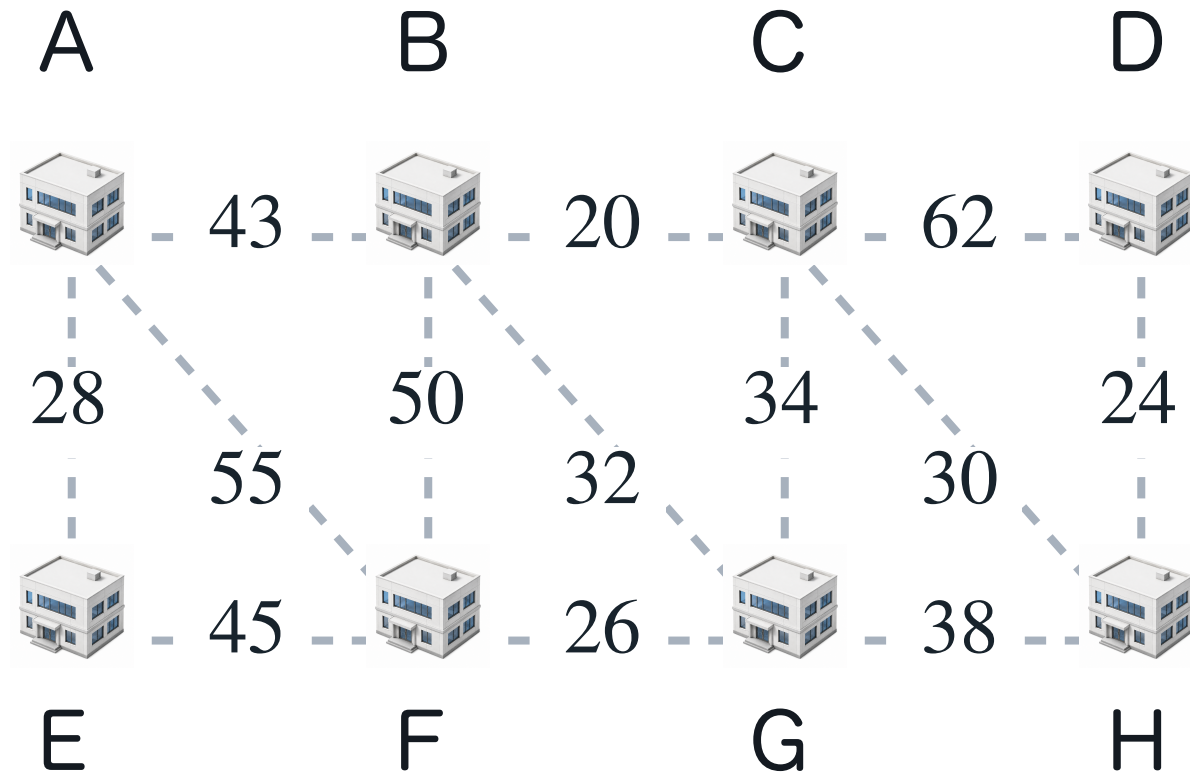
灰色の線は、通信線の
設置区間の候補です。

ほかの施設を経由してもよいので、全施設の間で通信できるようにします。

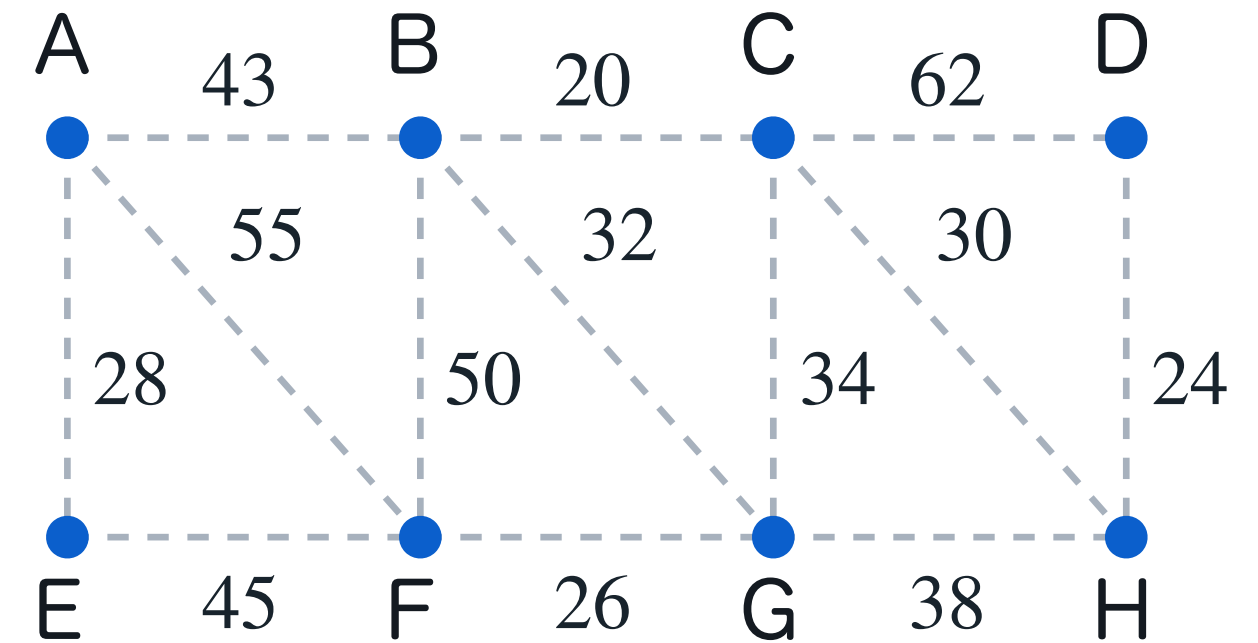
配線の問題をグラフで表す

灰色の線は、通信線を設置できる区間の候補です。
各区間の工事費を、右のグラフでも同じ数字で表します。

施設と配線候補



頂点・辺・工事費（万円）

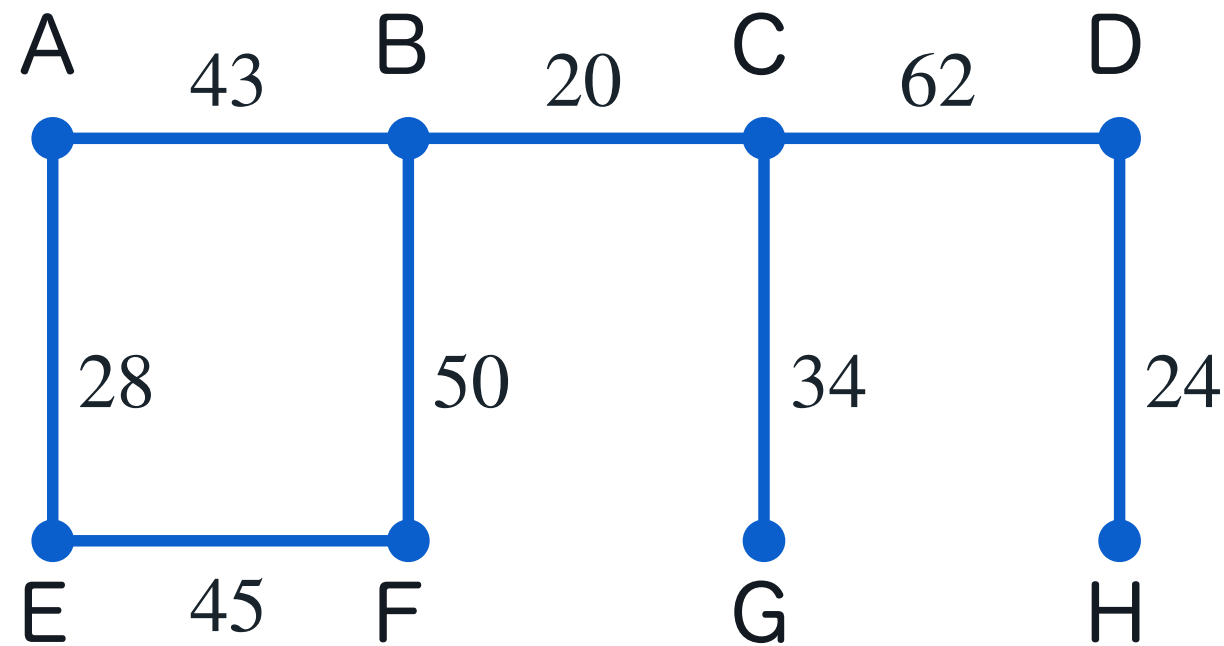


施設を頂点に、配線候補を辺に置き換え、工事費はそのまま対応させます。

辺を減らしてつながりを保つ

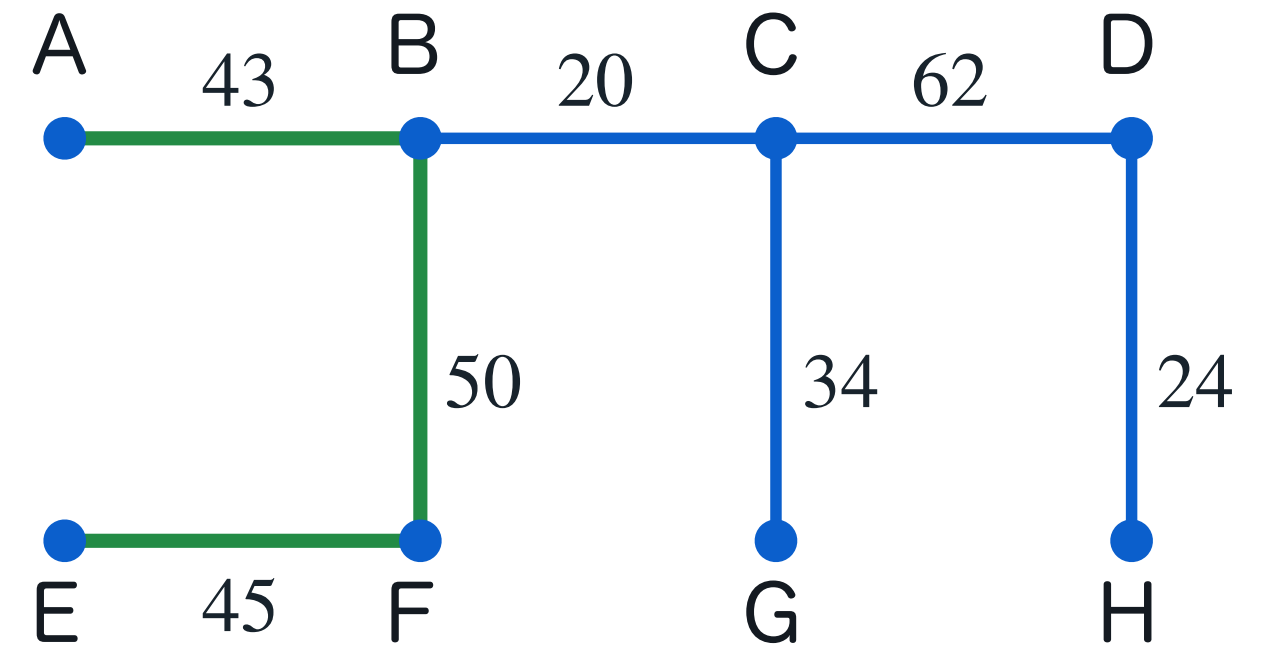
八施設をつなぐ配線の一例で、閉路とつながりを調べます。
 同じ辺や途中の頂点を繰り返さずに出発点へ戻る一周を、
 「閉路」といいます。

閉路を含む配線案



閉路 $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow A$

AEを取り除く



緑の辺で $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow E$ とたどれる

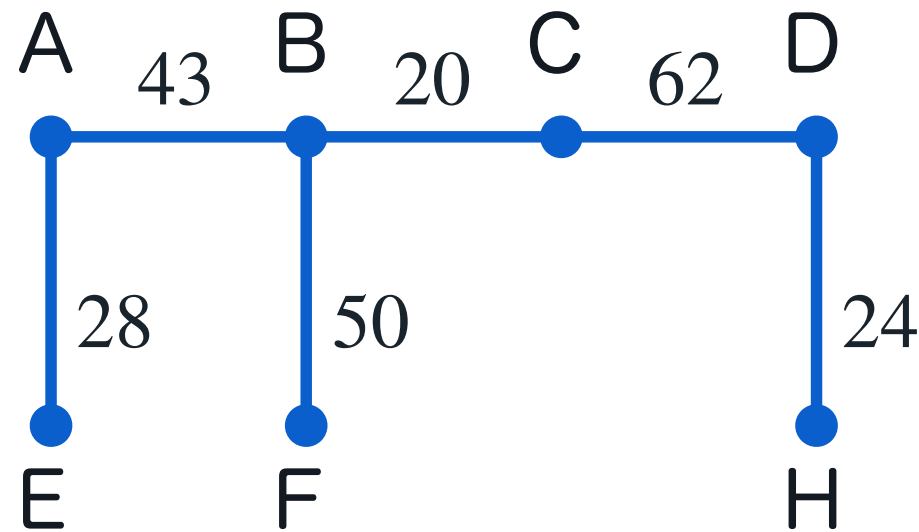
閉路を作る辺のうち一本を取り除いても、
 残りの辺をたどって、その辺の両端を結べます。

すべての頂点を含む全域木

つながっていて、閉路のないグラフを「木」といいます。

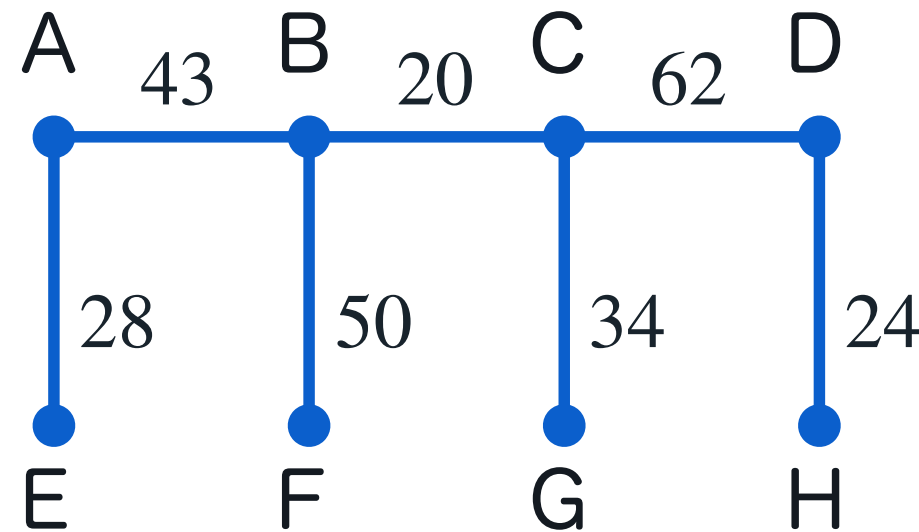
八施設の配線候補から、全頂点を含む木を選ぶと「全域木」になります。

全域木ではない木



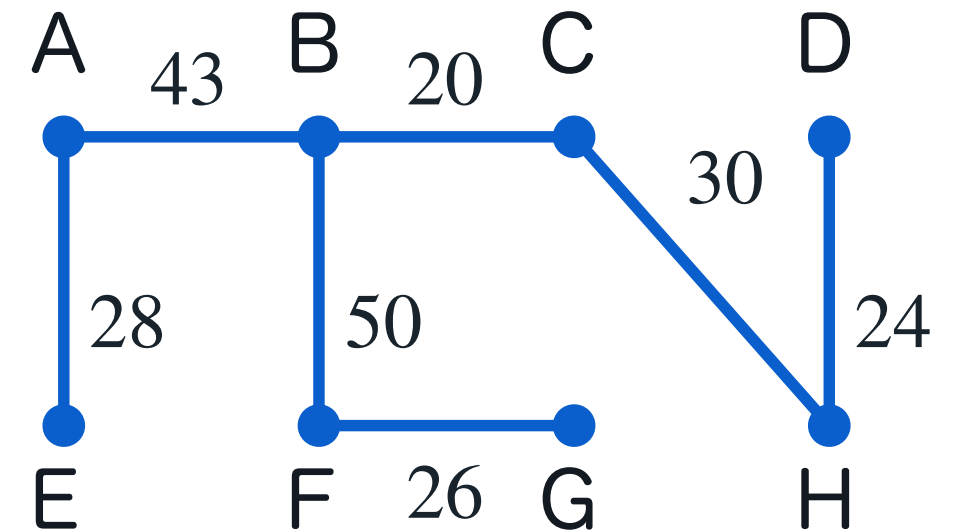
Gを含まない

全域木①



全 8 頂点を含む木

全域木②

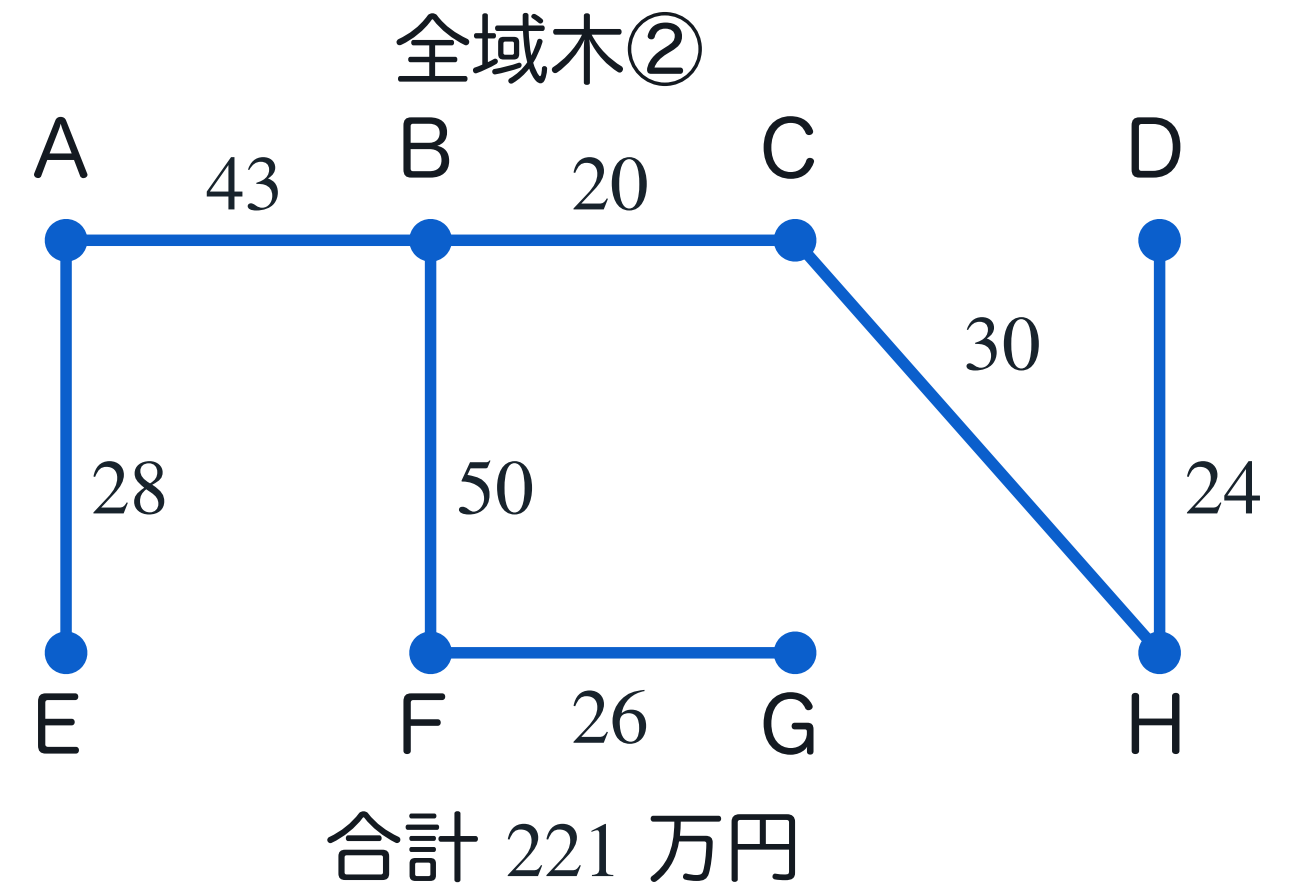
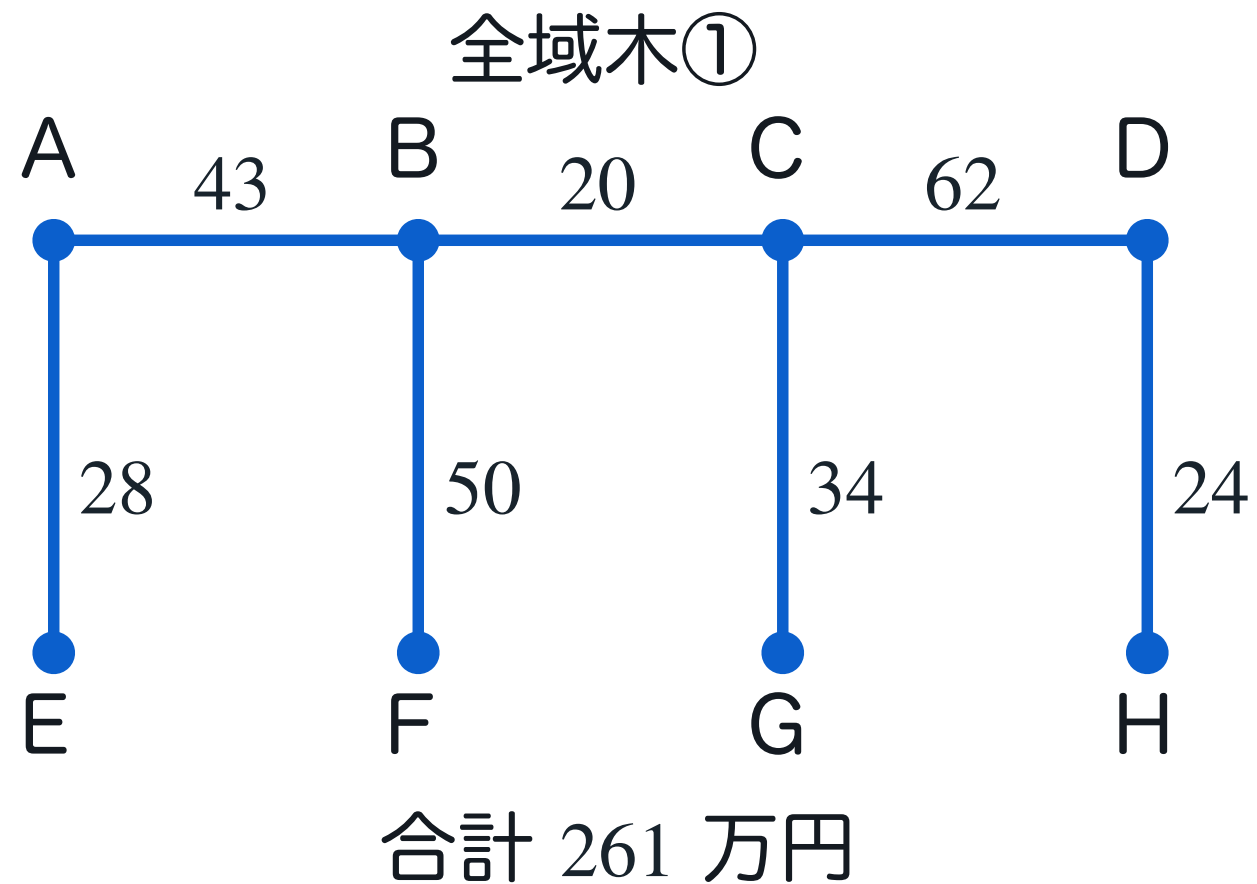


全 8 頂点を含む別の木

工事費が最小になる配線を、全域木の中から探します。

全域木の費用を比べる

同じ八施設を七本で結んでも、選ぶ辺で合計工事費が変わります。
前ページの全域木①と②で、工事費を比べてみましょう。

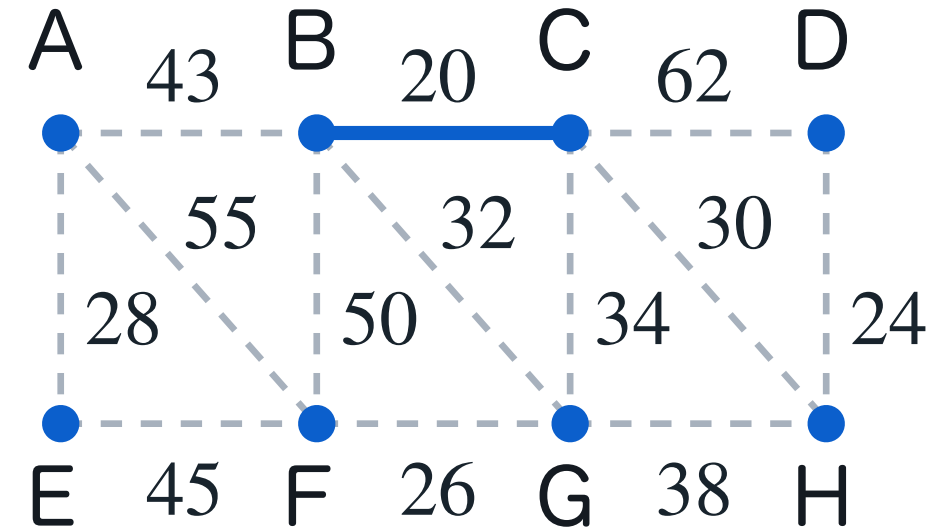


全域木をすべて比べる方法もありますが、候補が多くなります。
この二例の比較だけでは、全候補の中で最小とは分かりません。

Kruskal法の手順

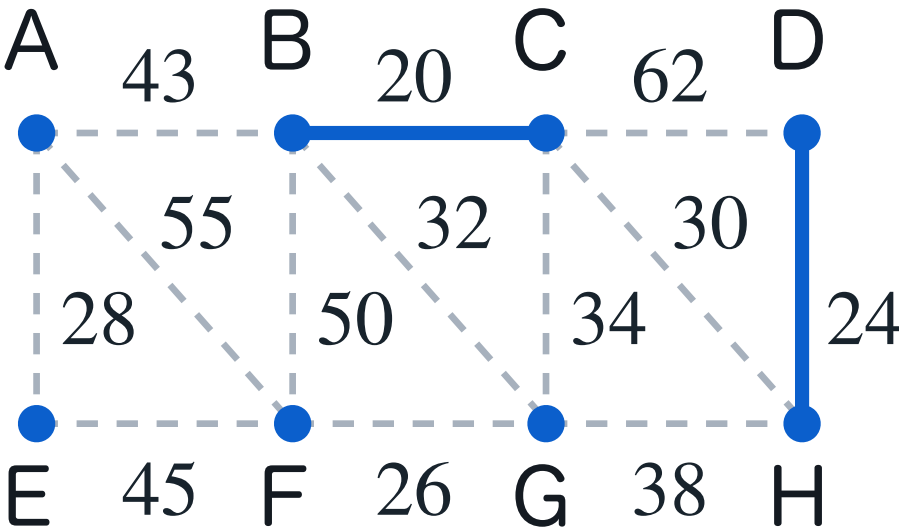
数学者ジョセフ・クラスカルが、1956年に示した方法です。
全候補を安い順に調べ、採用した辺と閉路を作らなければ採用します。
青は採用した辺、灰色は採用していない辺です。

① BC (20)



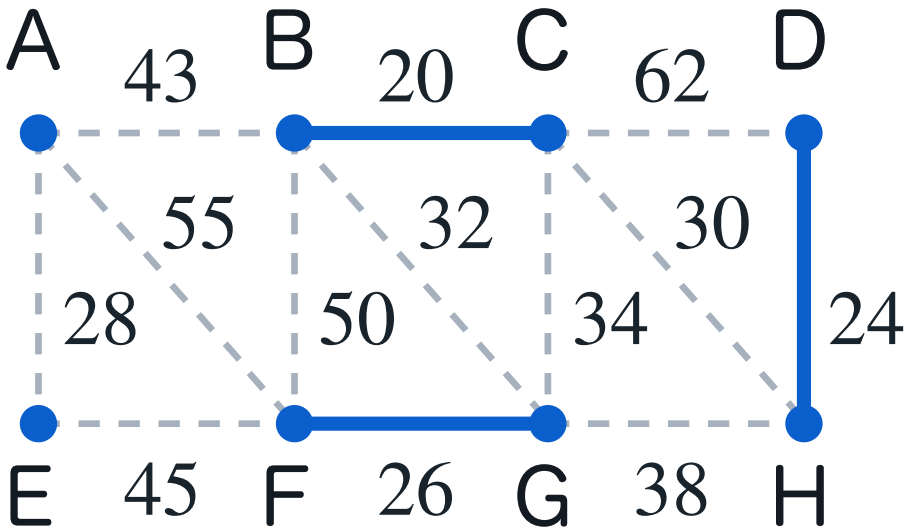
最も安いBCを採用する

② DH (24)



次に安いDHを採用する

③ FG (26)



次に安いFGを採用する

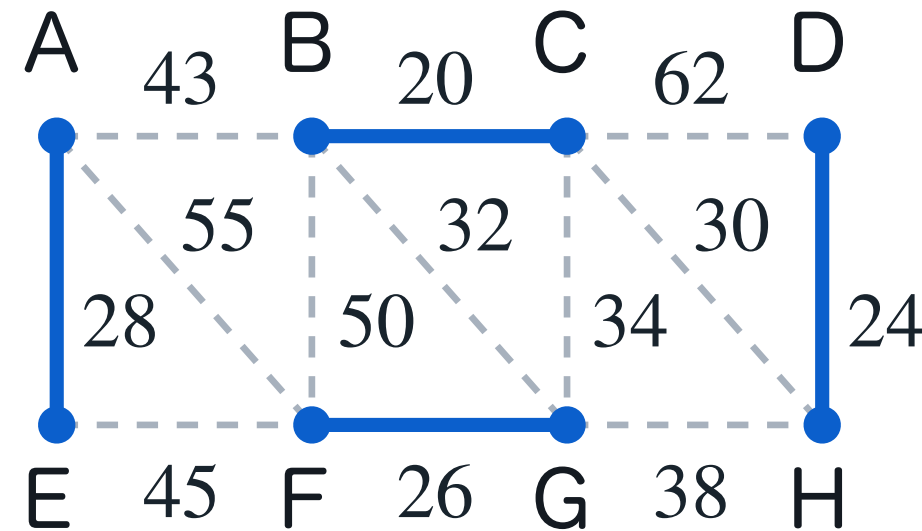
J. B. Kruskal, "On the Shortest Spanning Subtree of a Graph
and the Traveling Salesman Problem", Proc. Amer. Math. Soc. 7, 48-50 (1956).

全候補を安い順に一度ずつ調べ、閉路を作らない辺を採用します。

Kruskal法で配線を選ぶ

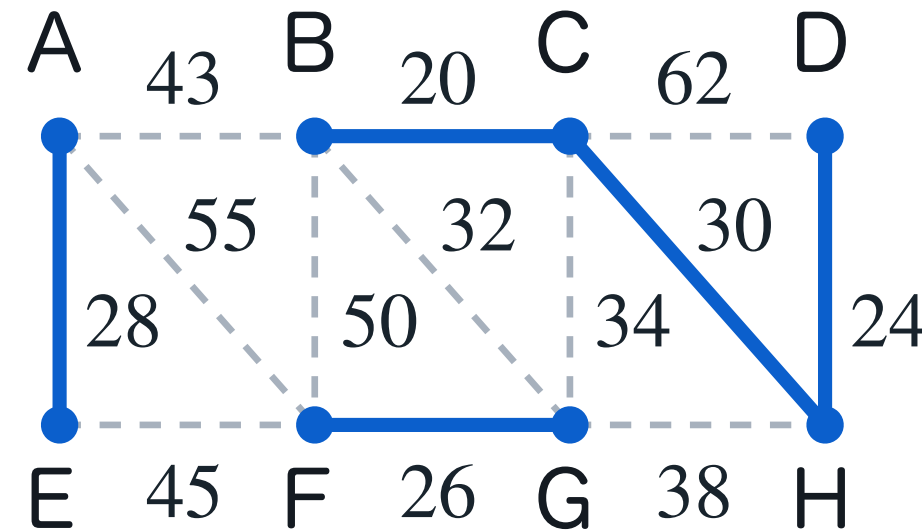
同じ八施設で、全候補を安い順に調べる手順を続けます。
すでに採用した辺で両端がつながっていれば、閉路になるので採用しません。

④ AE (28)



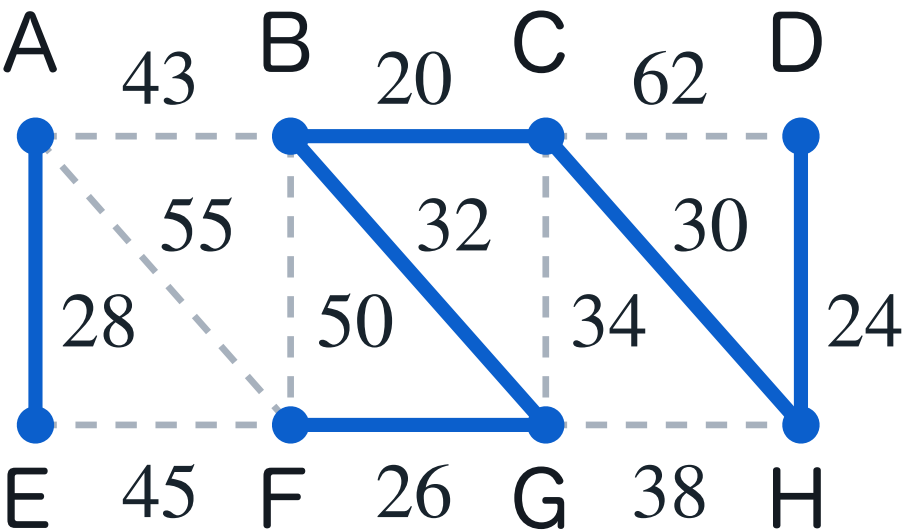
次に安いAEを採用する

⑤ CH (30)



次に安いCHを採用する

⑥ BG (32)



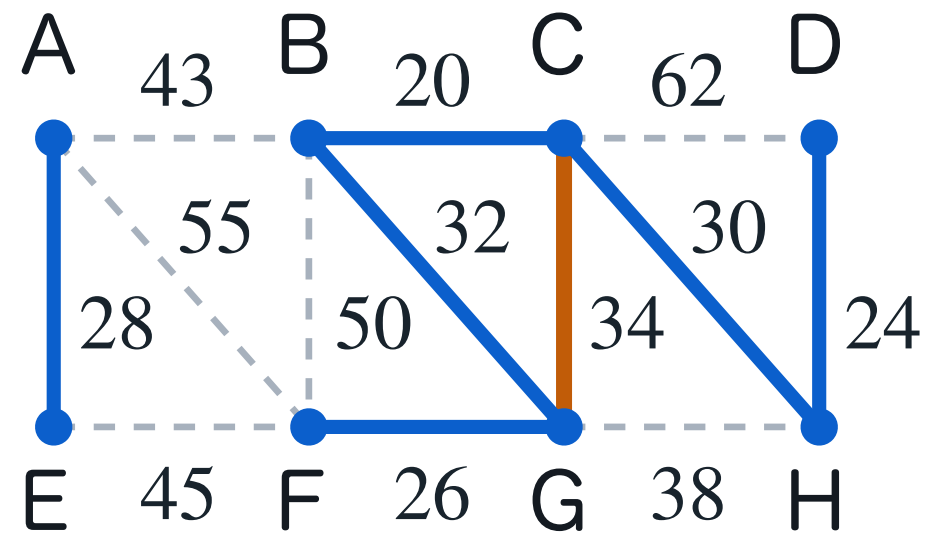
次に安いBGを採用する

各段階で最も安い未検討の辺を調べ、閉路を作らないので採用します。

Kruskal法で配線を完成させる

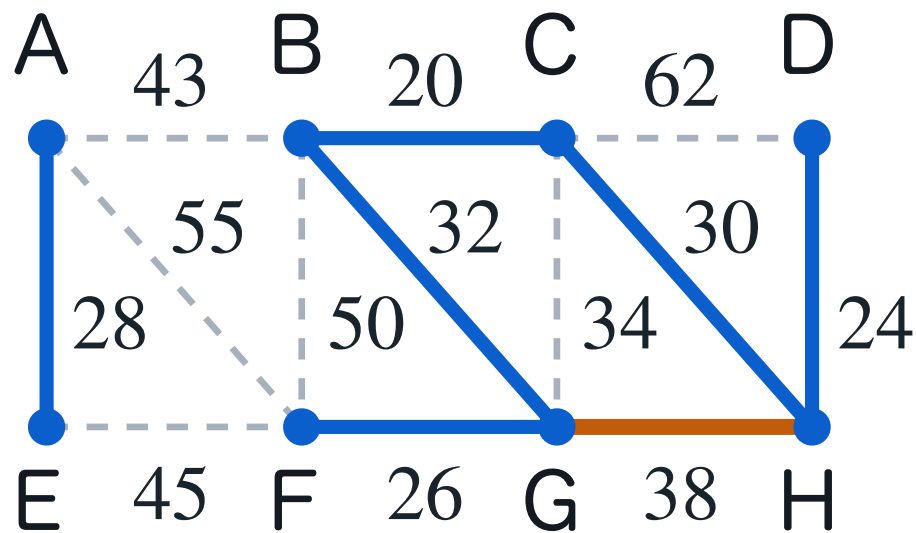
CG・GHは閉路を作るので選ばず、次のABを選びます。
オレンジ色の線は、各段階で採用するかを調べている辺です。

⑦ CG (34) は選ばない



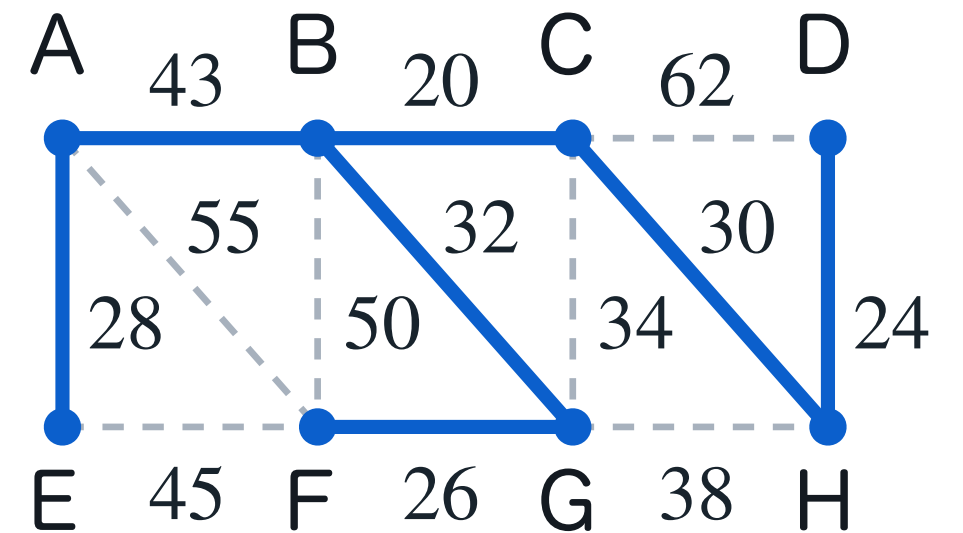
C → B → G → C が閉路

⑧ GH (38) は選ばない



G → B → C → H → G が閉路

⑨ AB (43) を採用



全 8 頂点がつながる

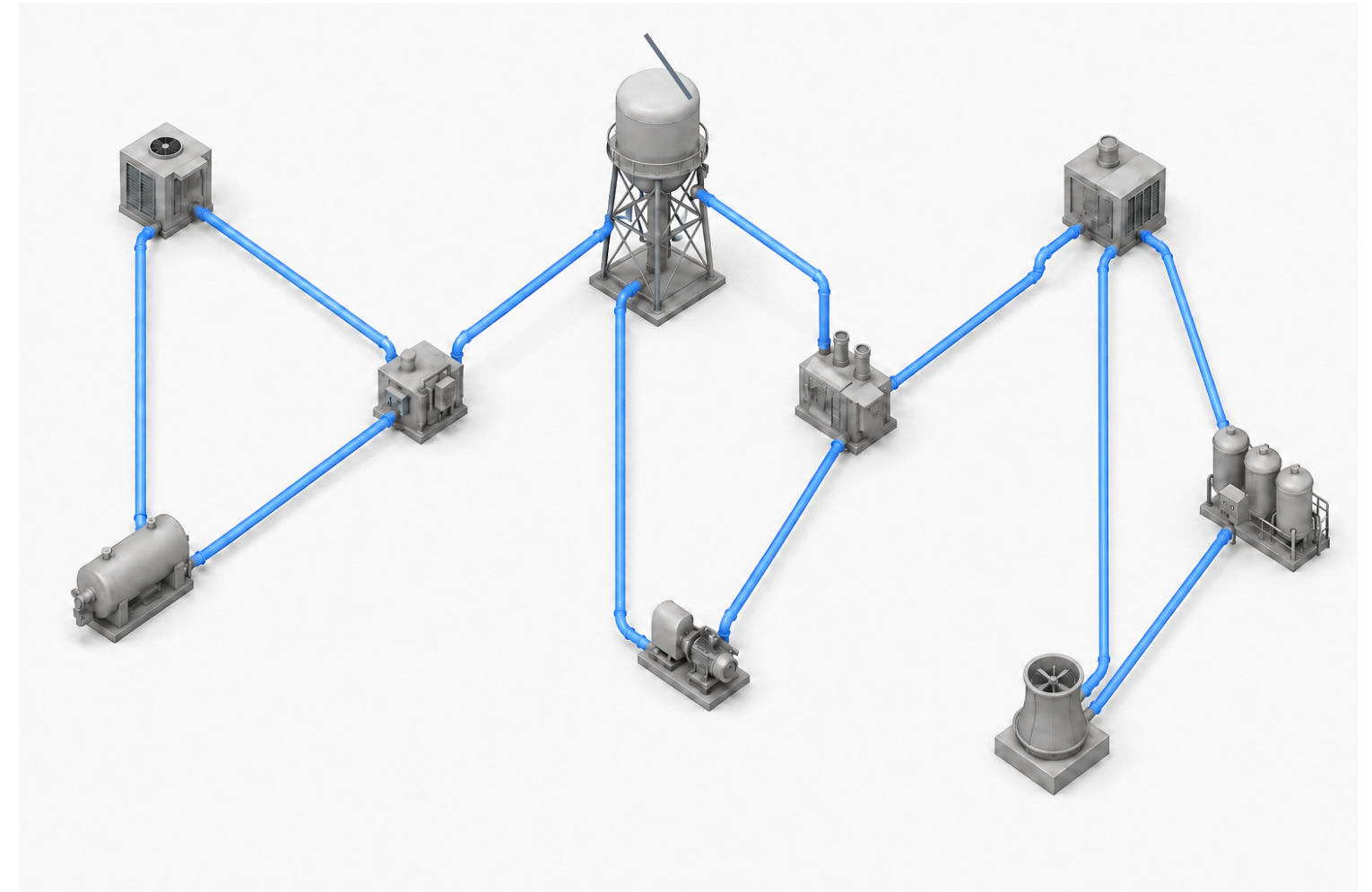
選んだ辺は、全 8 頂点をつなぎ、閉路を作っていません。
Kruskal法で得られる全域木の工事費は最小の203万円です。

配管が一本止まっても給水できるか？

図の上中央のタンクから、
八つの設備へ水を送ります。
配管は、両方向に水を送れる
ものとしします。

どの配管が一本止まっても、
すべての設備へ水を
届けられるでしょうか。

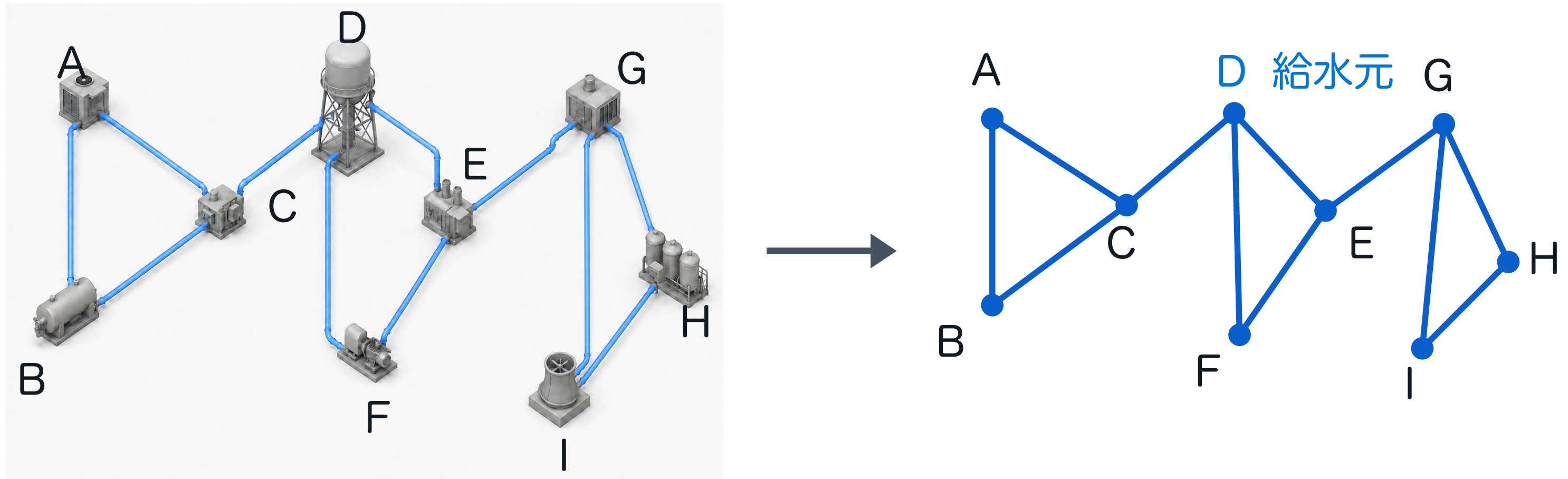
給水元のタンク



工事費を抑える配線では、不要な迂回路を減らしました。
今度は、費用をかけて迂回路を作り、一本の故障に備えます。

給水の問題をグラフで表す

タンクと設備を頂点に、配管を辺に置き換えます。Dが給水元です。
一本止めると水が届かない設備が生じる配管を、すべて探してください。

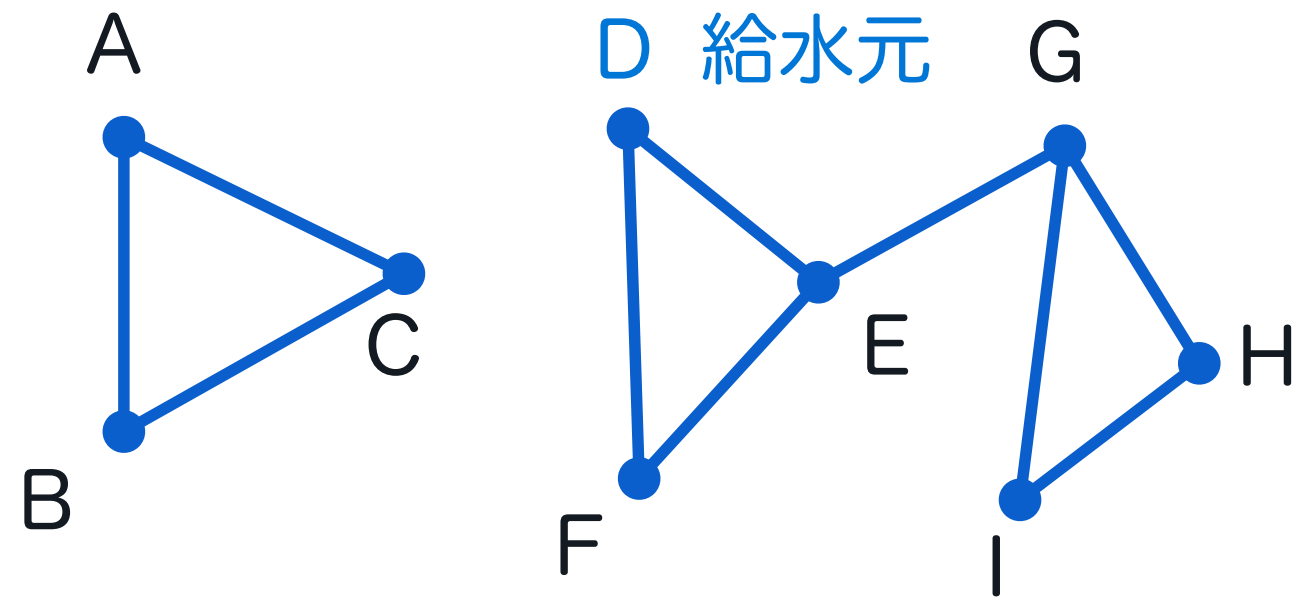


配管を一本止めることを、その辺を取り除くことに置き換えます。

取り除くと分離する辺『橋』

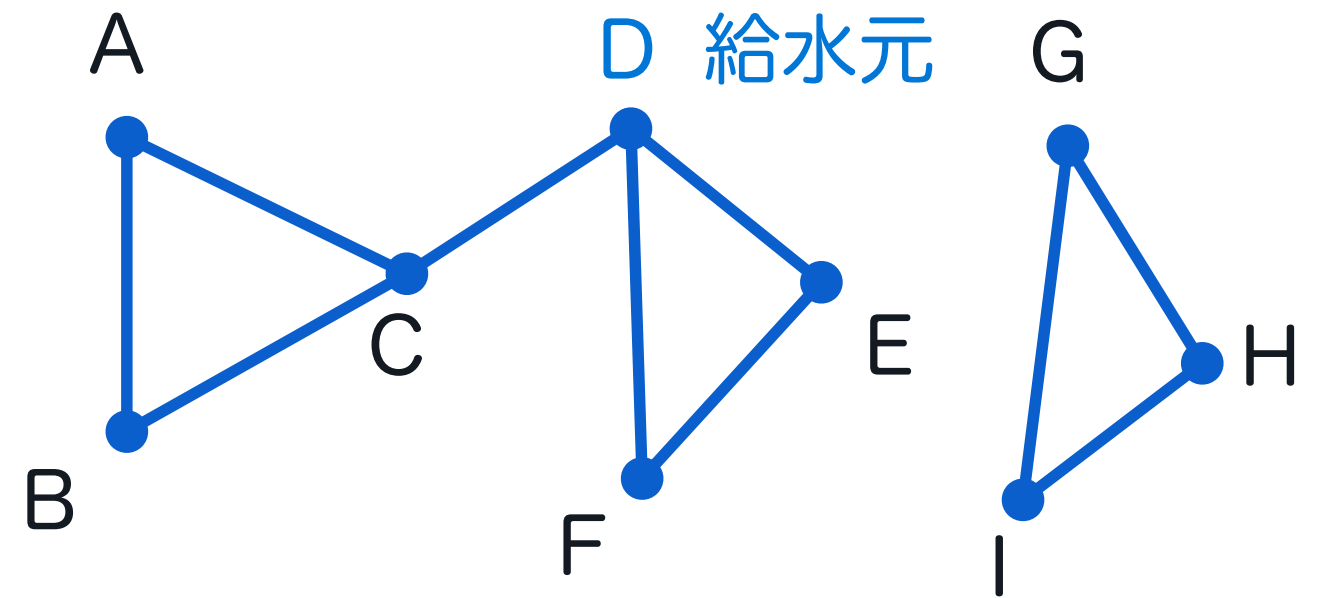
取り除くと、それまで行き来できた頂点どうしが
行き来できなくなる辺を、グラフ理論では「橋」と呼びます。

CDを取り除いた図



A・B・Cに水が届かない

EGを取り除いた図

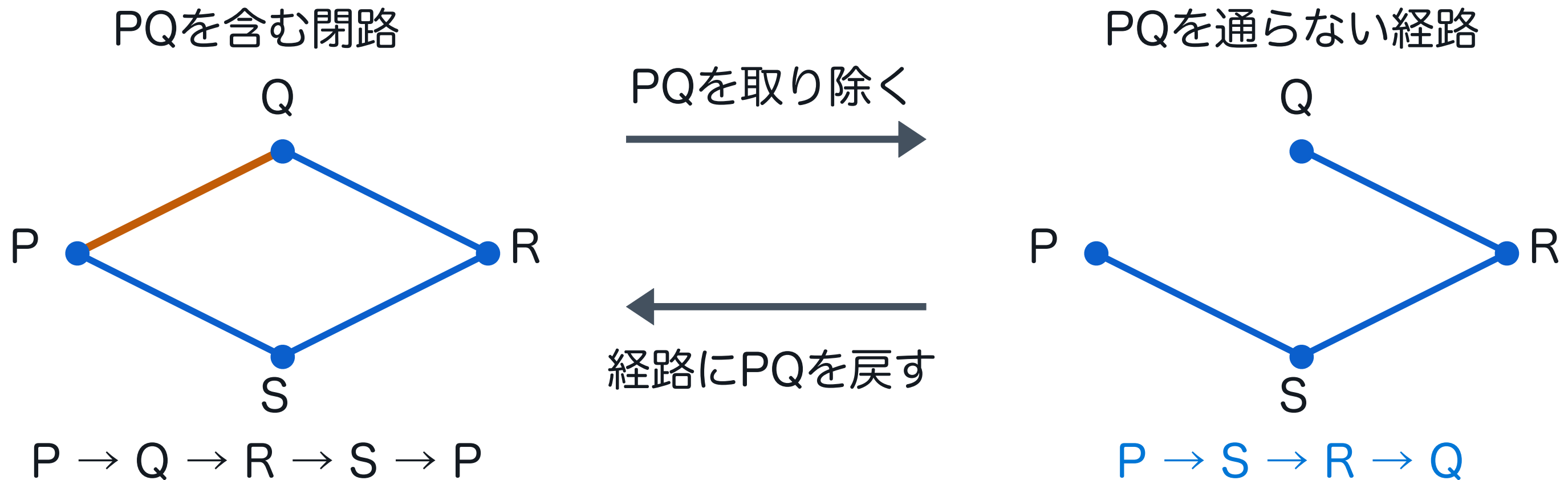


G・H・Iに水が届かない

取り除くとグラフが分離する辺を橋といいます。
この図ではCDとEGが橋です。

迂回路と閉路

前の配線の問題では費用を抑えるために迂回路をなくしましたが、今度は配管の故障に備えるために迂回路を残すことが重要です。ある辺の両端を、その辺を通らずに結ぶ経路を迂回路といいます。迂回路と元の辺を合わせると閉路になり、閉路からその辺を取り除くと迂回路が残ります。

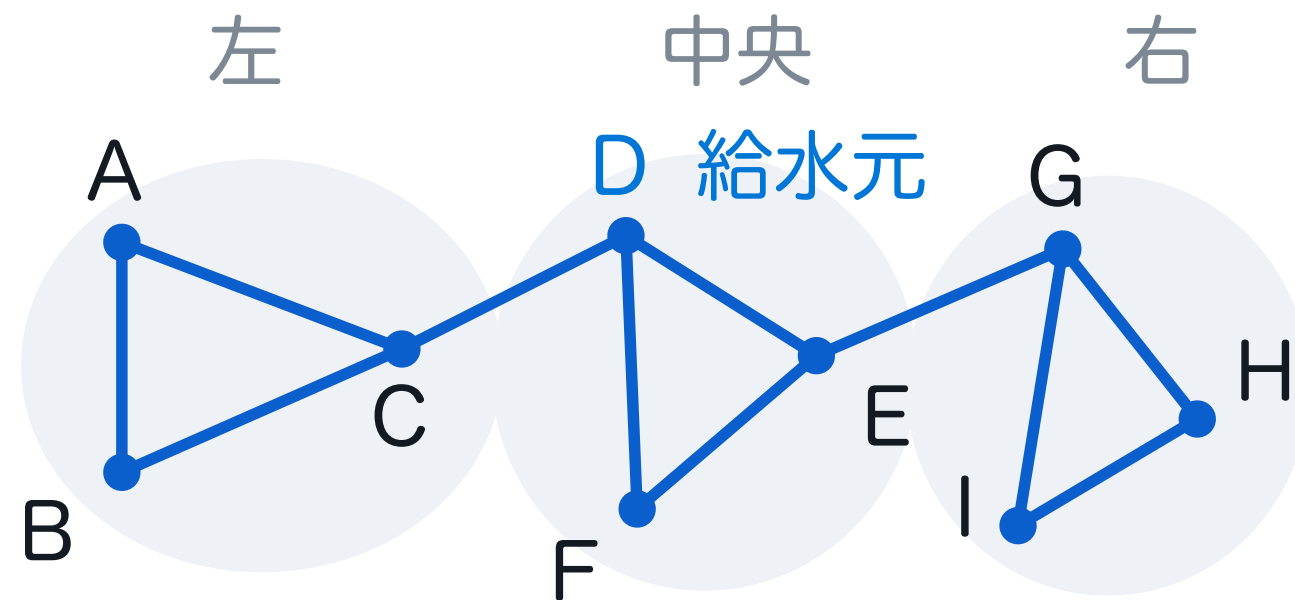


ある辺に迂回路があることと、その辺が閉路に含まれることは同値です。

配管の追加で迂回路を作る

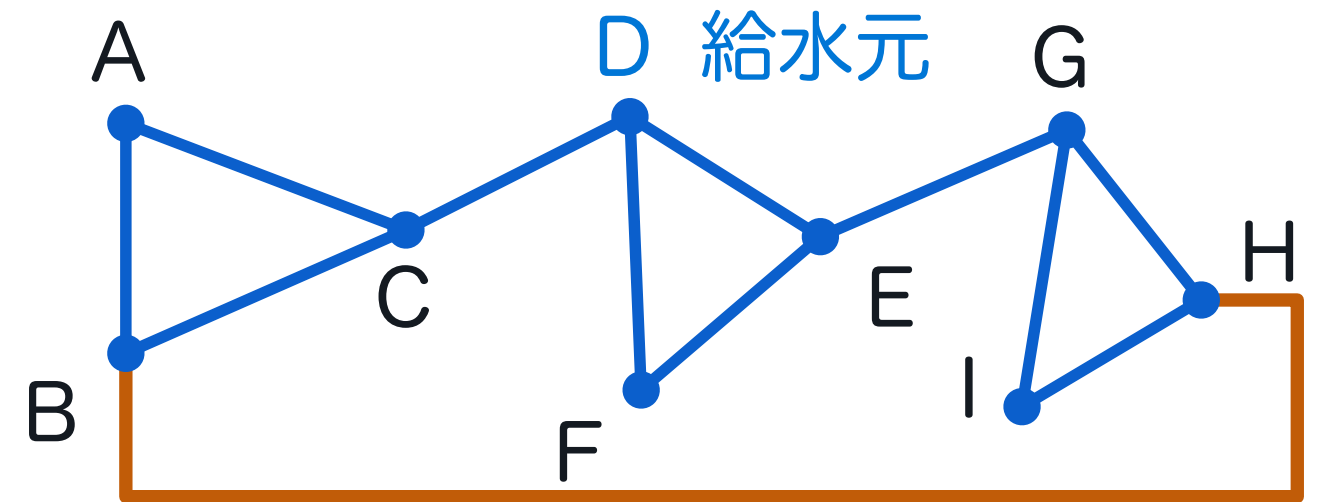
給水タンクDと八設備の配管に、一本追加して故障に備えます。
CDとEGの両方に迂回路を作るには、どこを結べばよいでしょうか。

① 追加する配管の両端を考える



中央と片側だけでは、
もう一方を迂回できません。

② 左と右を結ぶ追加の一例

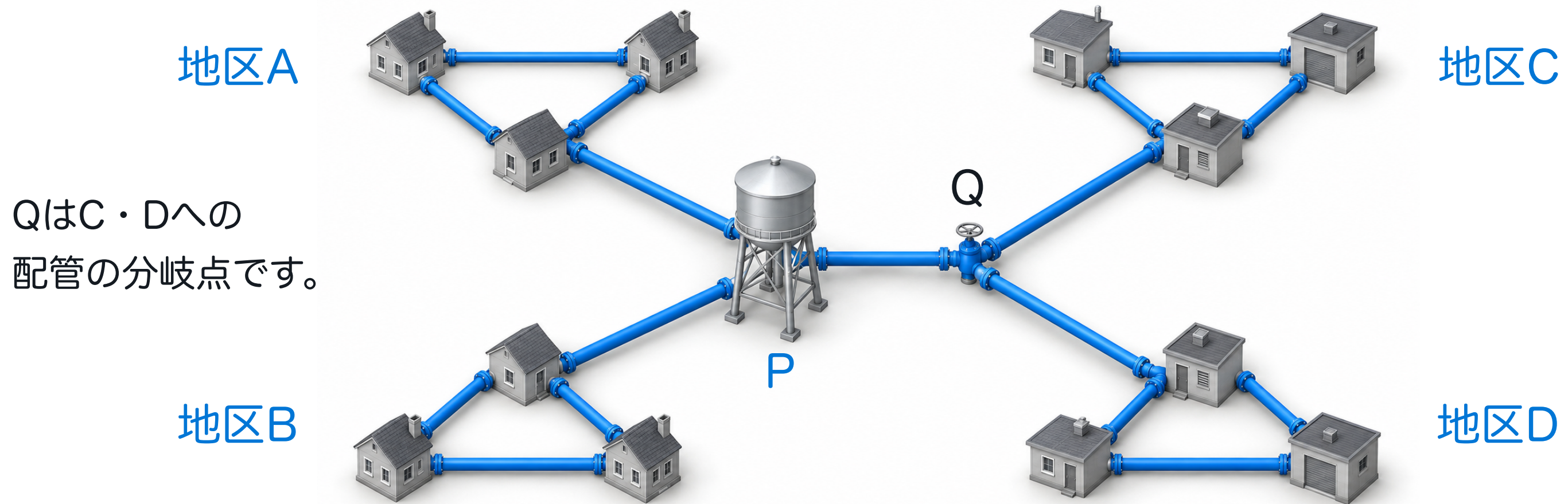


BHを加えた閉路が、
CDとEGの両方を通ります。

左の 3 頂点と右の 3 頂点を結ぶ、 9 通りの選び方があります。

四つの地区への給水

給水タンクPから、三施設ずつある四地区へ水を送ります。
どの配管が一本止まっても、全地区に給水できるようにします。

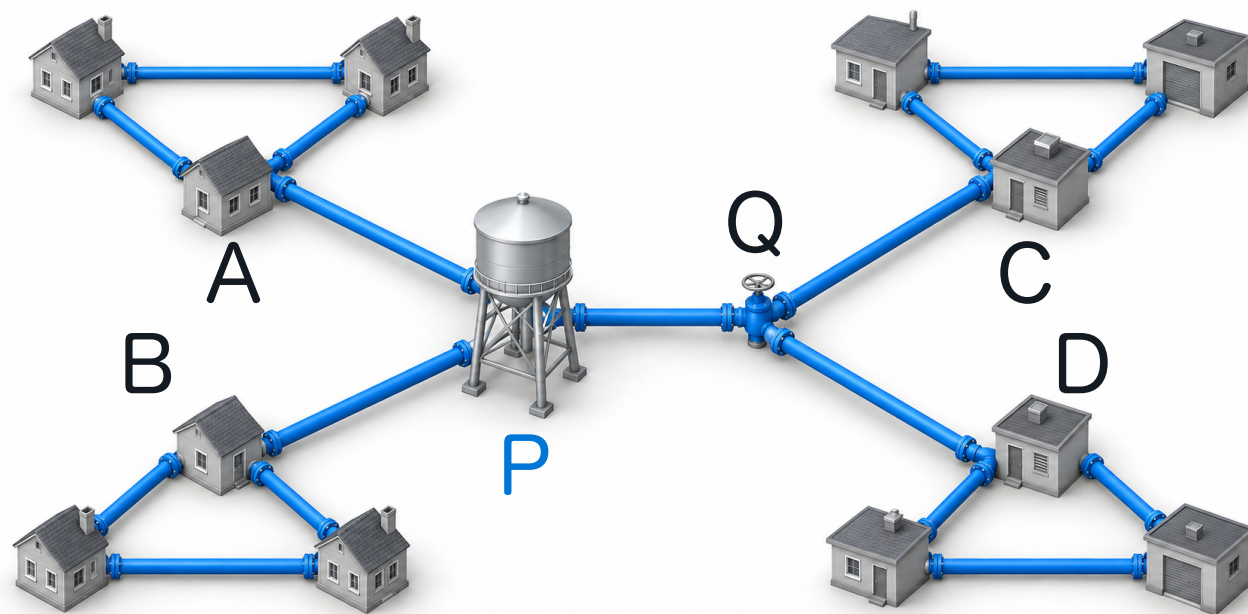


施設や分岐点の間には、自由に配管を追加できます。
配管は最少で何本追加すればよいでしょうか。

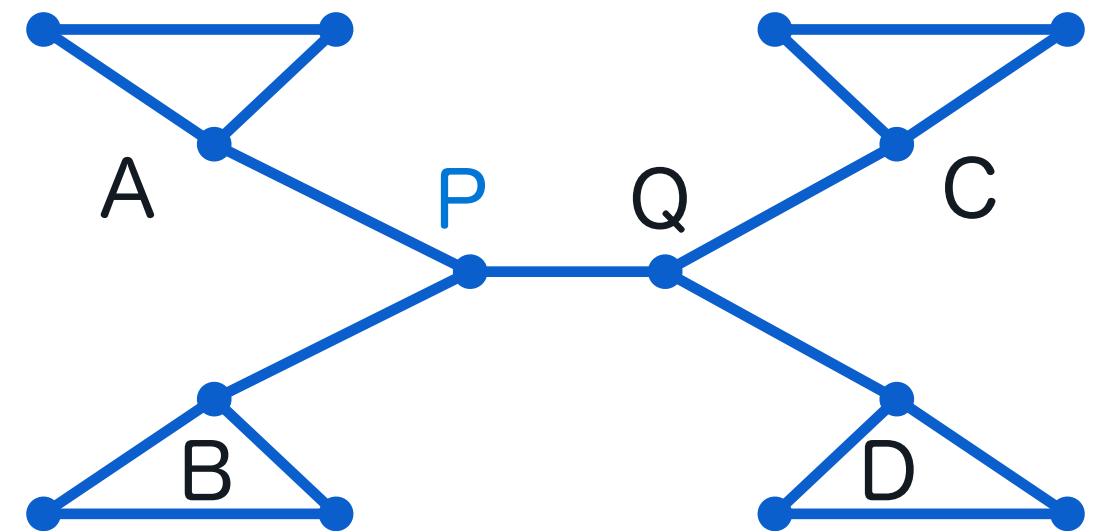
止めると給水が途切れる配管

施設と分岐点を頂点に置き換え、各地区の三施設を三頂点で表します。
各地区の外部配管につながる一施設をA～Dと呼び、配管を辺で表します。

前の街の配管



頂点と辺で表したグラフ

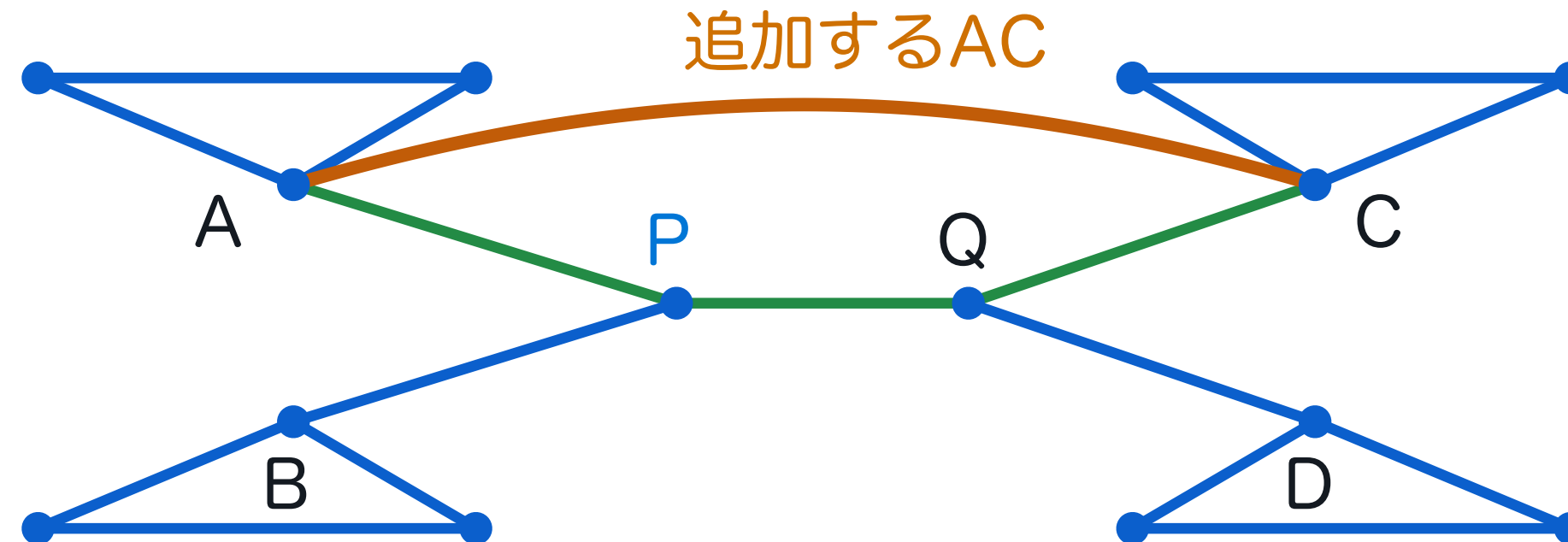


A～Dは、各地区の入口となる施設です。

このグラフの橋はAP・BP・PQ・QC・QDの5本です。
どれか1本を取り除くと、給水元Pから水が届かない地区が生じます。

一本の追加でできる迂回路

AP・BP・PQ・QC・QDに迂回路を作るため、ACを一本加えます。
ACを加えると、AP・PQ・QCは閉路に含まれ、橋ではなくなります。
一方、BP・QDは橋のままなので、B地区とD地区への給水は故障に弱いままです。



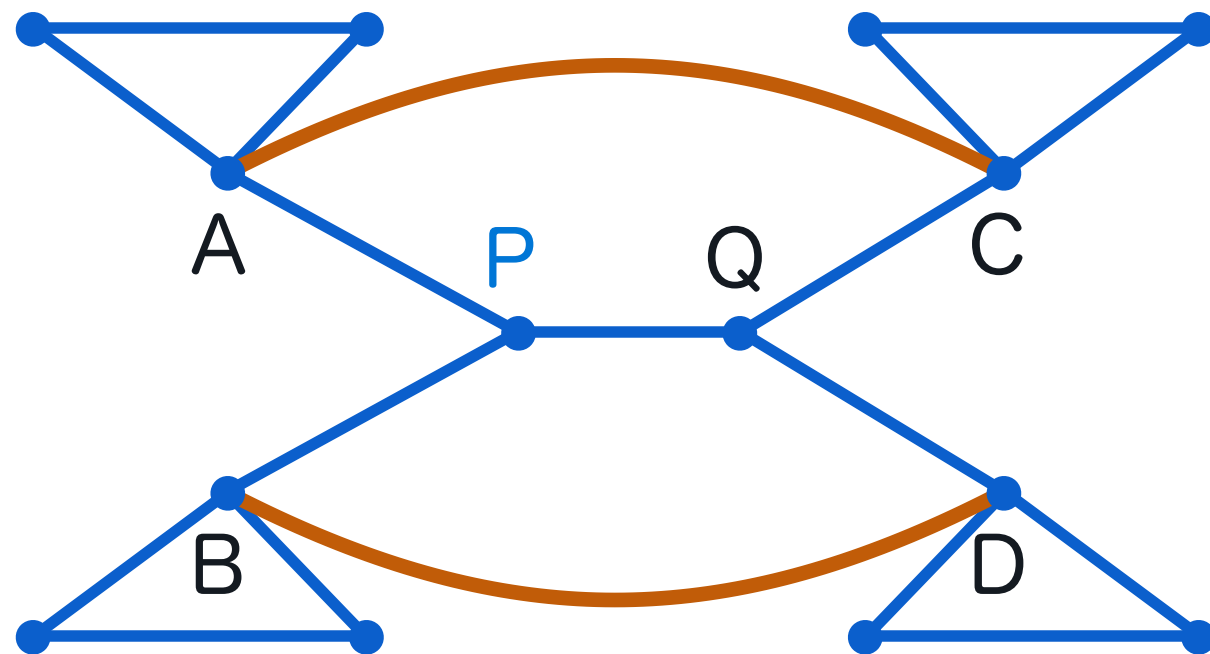
ACの追加だけでは、すべての地区への給水を
1本の故障から守れません。

二本の配管の選び方

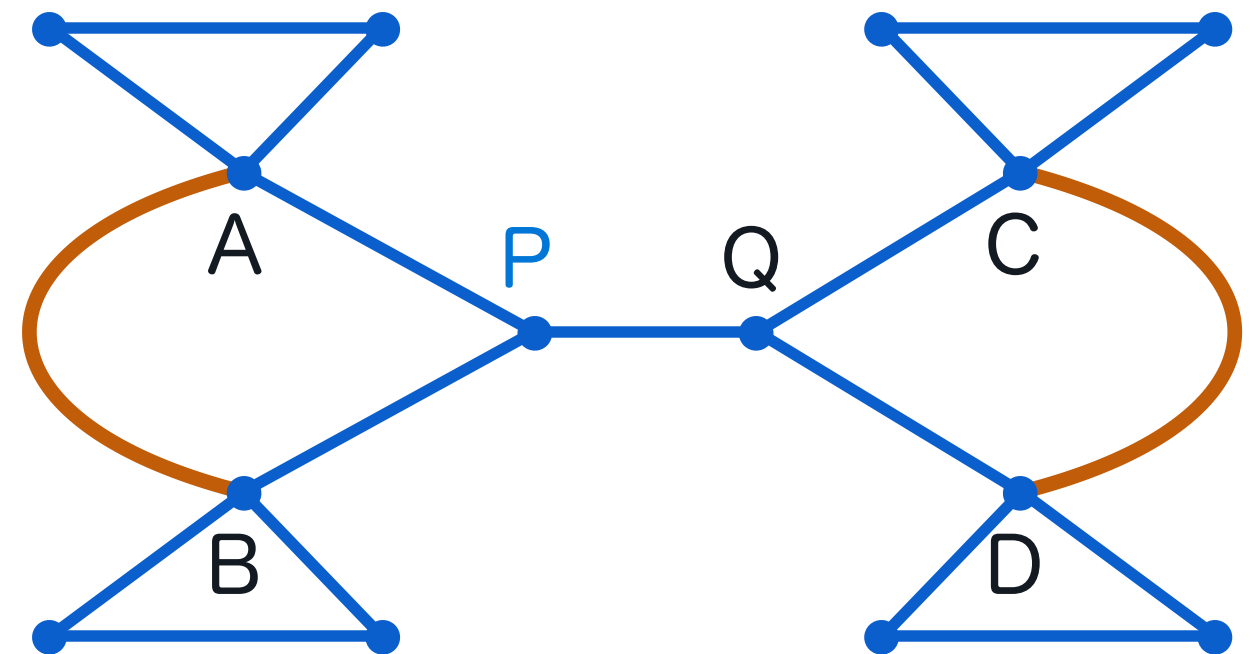
①のAC・BDを加えると、すべての辺に迂回路ができます。

②のAB・CDではPQが橋として残り、給水が止まる地区があります。

① ACとBDを追加



② ABとCDを追加



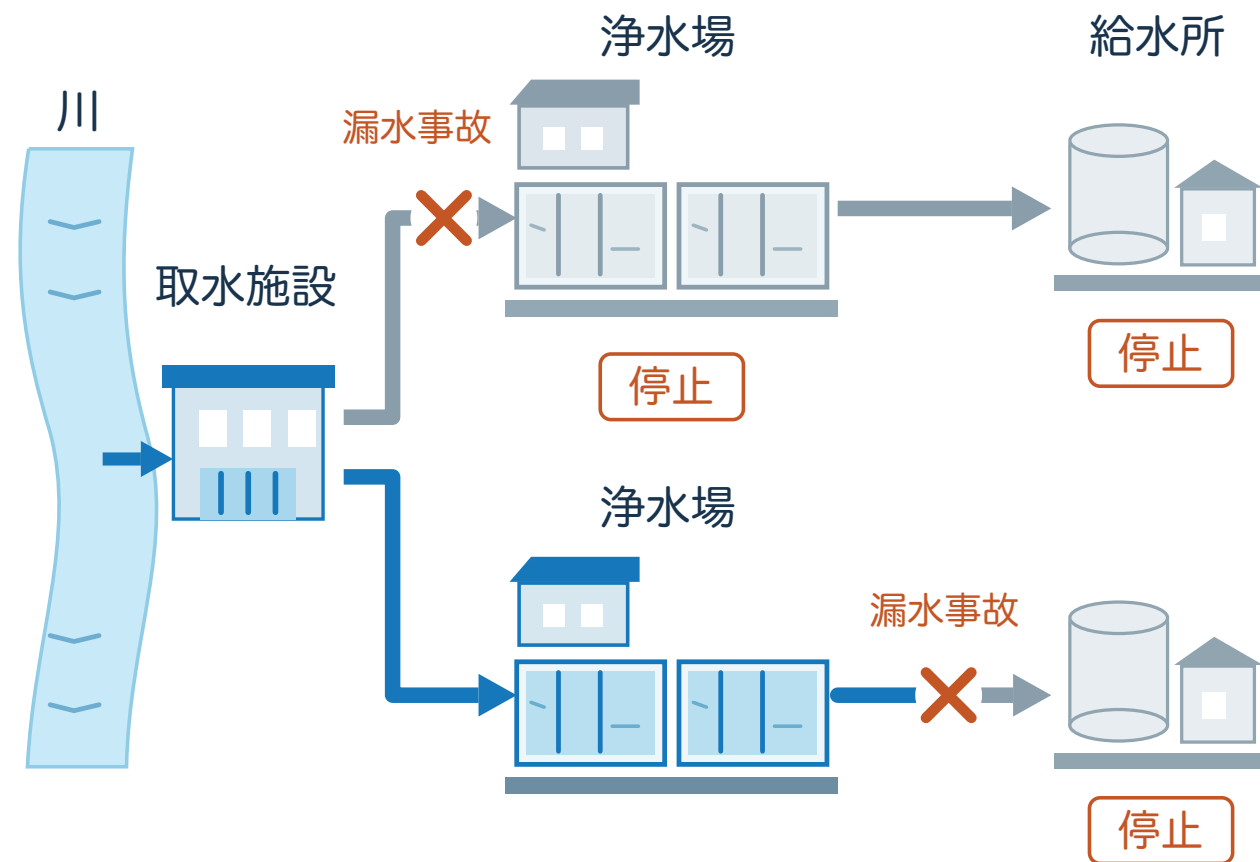
①とは別の解として、AC・BDの代わりにAD・BCの2本を追加しても実現できます。

各地区に、外へつながる配管がもう1本必要です。
1本で補えるのは最大2地区なので、最小本数は2本です。

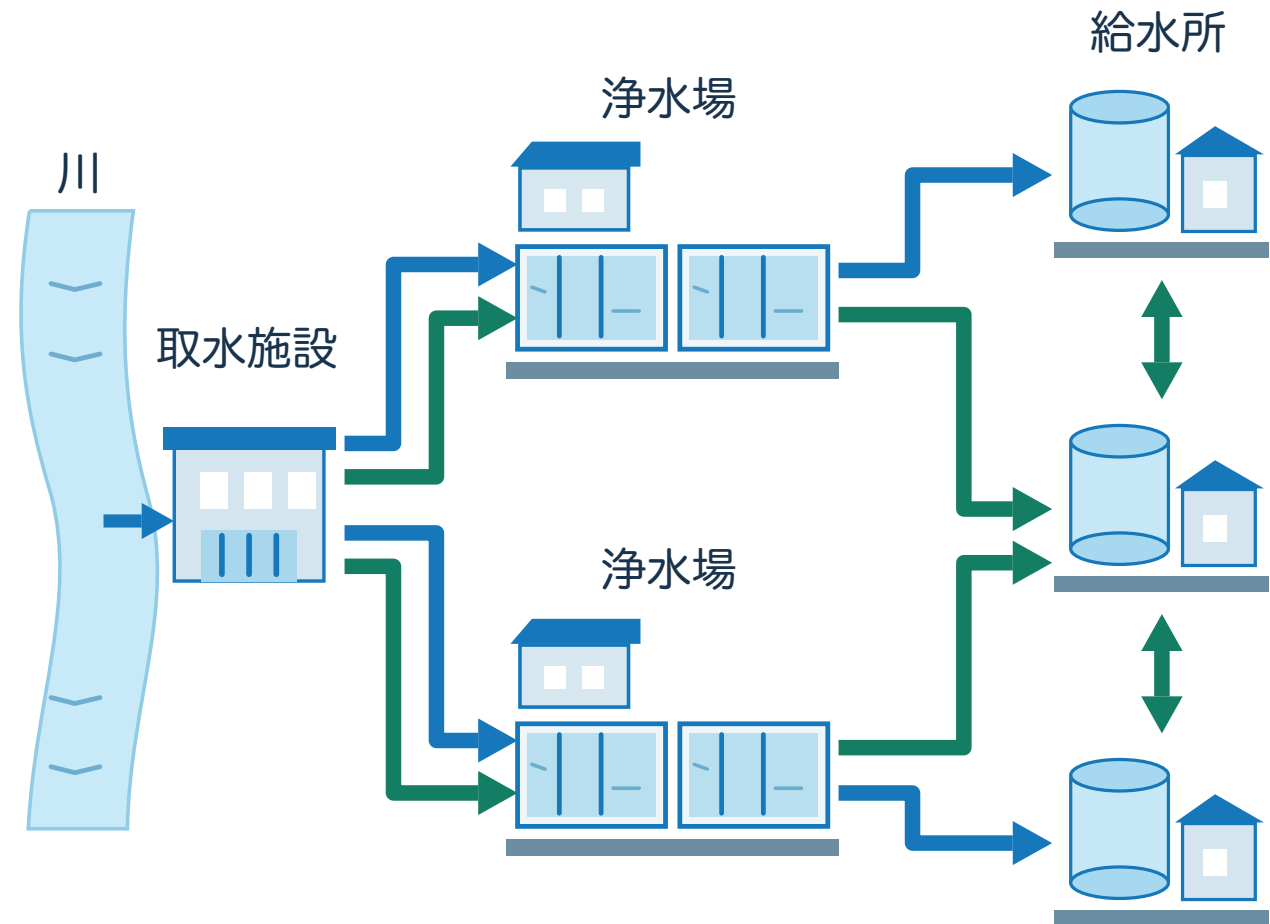
水道のバックアップ経路

東京都水道局は、導水施設の二重化や送水管のネットワーク化を進めています。

事故で給水が止まる場合



別の経路を確保した場合



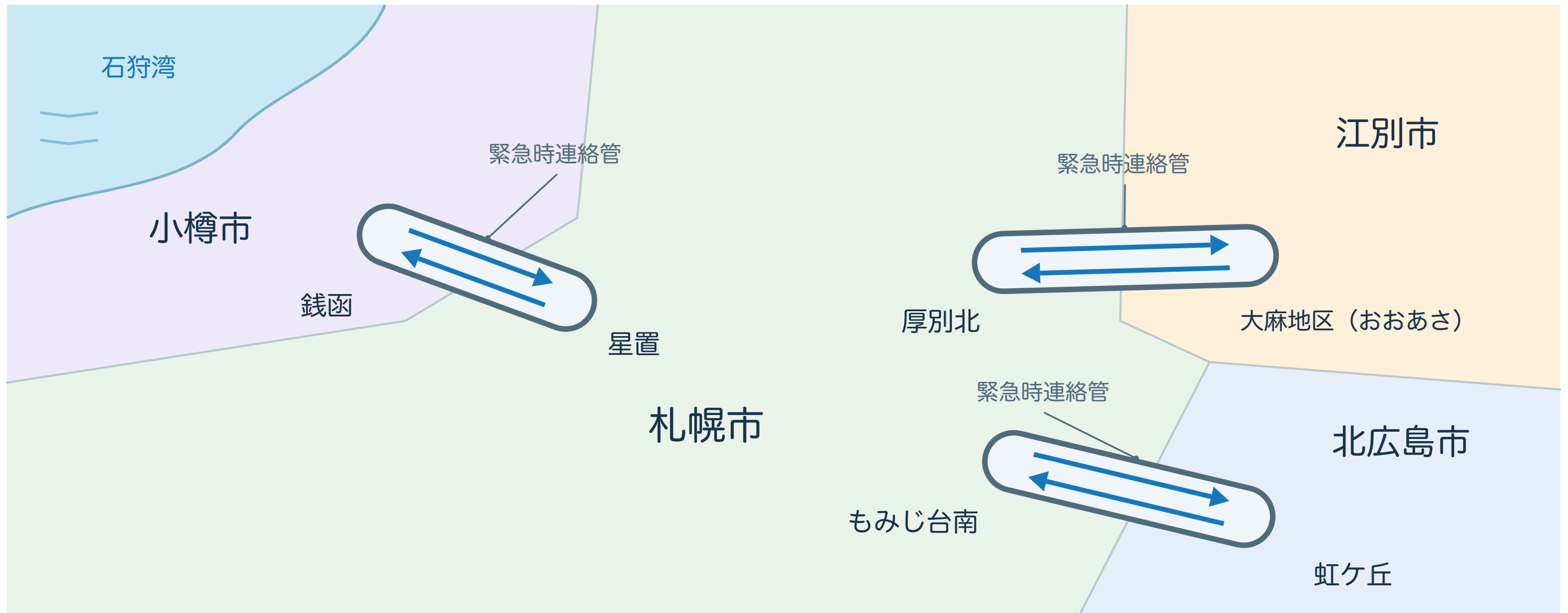
実際の設計では、水圧や水量もあわせて検討します。

参考：東京都水道局『東京水道経営プラン2026』印刷39ページ（公式情報を基に作成）

<https://www.waterworks.metro.tokyo.lg.jp/documents/d/waterworks/104012008026-01>

都市間で水を融通する連絡管

札幌市と3市の位置関係と、緊急時連絡管を示します。
事故や災害の際に、市境付近の一部地域へ水道水を相互に融通します。

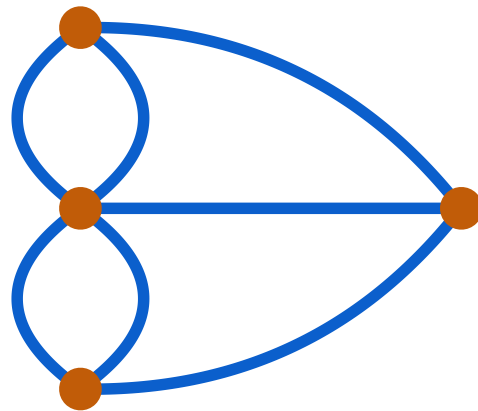


参考：札幌市水道局「緊急時連絡管」（公式情報を基に作成）

<https://www.city.sapporo.jp/suido/overview/kinkyujirenrakukan.html>

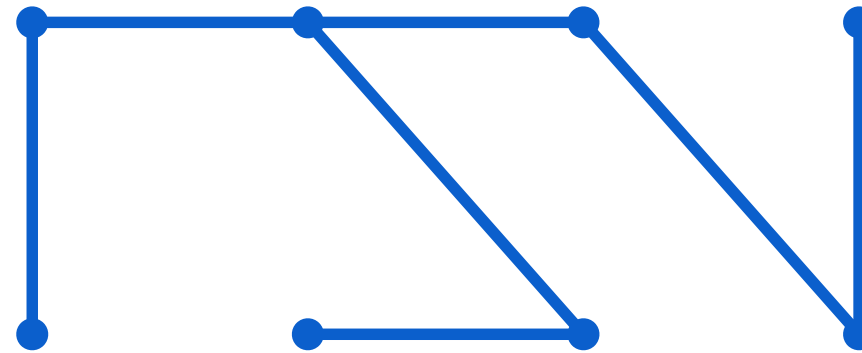
巡り方とつなぎ方の数学

巡り方



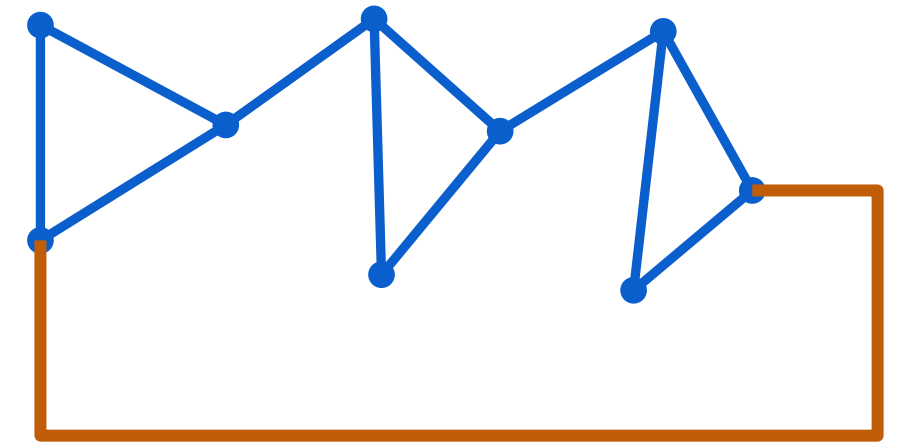
一度ずつ巡れるかは、
奇数次数の頂点の個数で
判断できる。
七つの橋では不可能。

安いつなぎ方



閉路を作らず、
工事費の安い辺から選ぶ。
Kruskal法で、
最小費用の全域木を作る。

故障に備えるつなぎ方



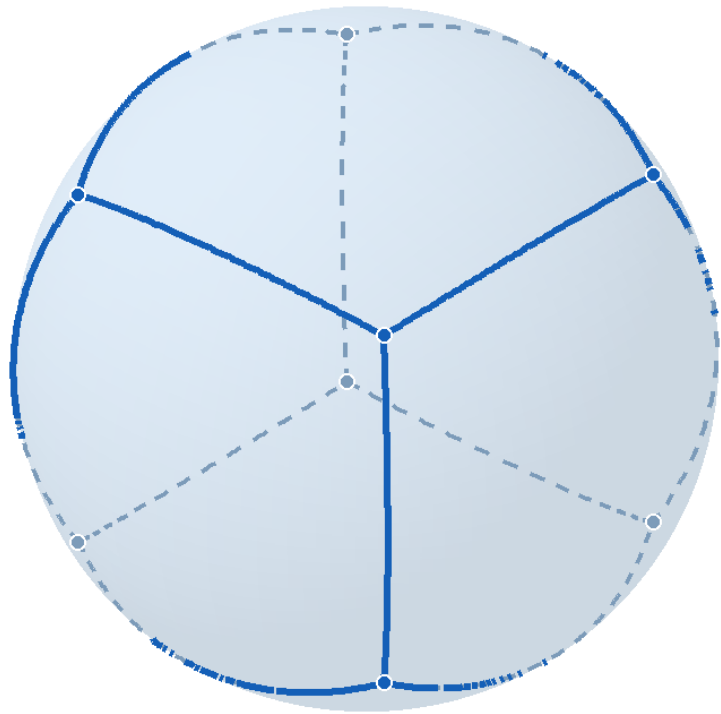
すべての配管に
迂回路を確保する。
一本止まっても
給水経路を残せる。

現実の問いをグラフで表し、目的に合う巡り方・つなぎ方を考えました。

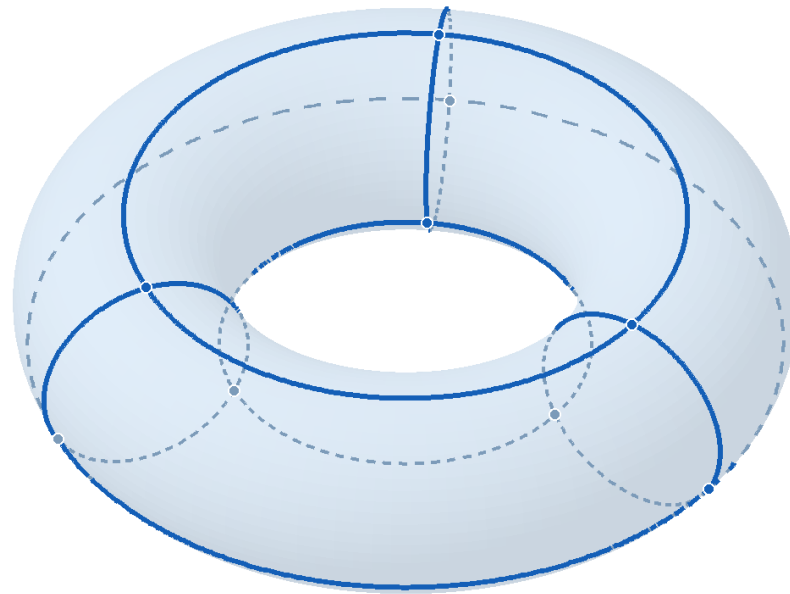
数えてわかる形の違い

35

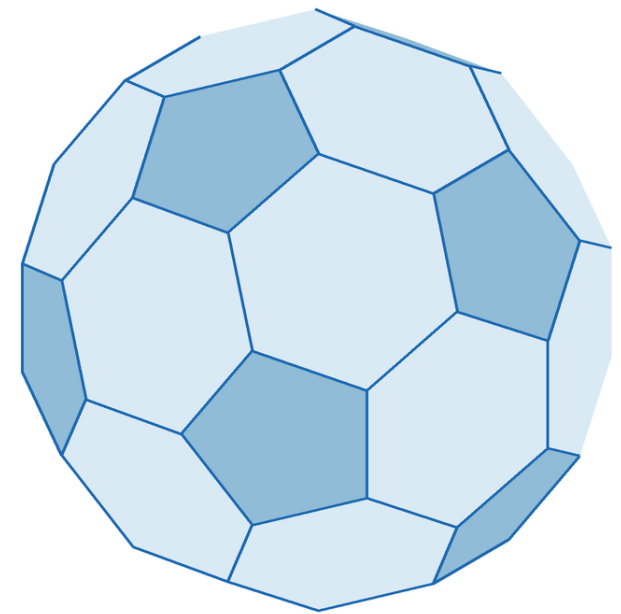
第3回では、曲面に線を引いて区切り、頂点・辺・面を数えます。



曲面を分割して数える



球と浮き輪の表面を比べる



ボールの面の並びを調べる

数えた値で形の違いを証明し、面の並び方の条件を調べます。