先端応用化学特別講義Ⅰ

1回目講義

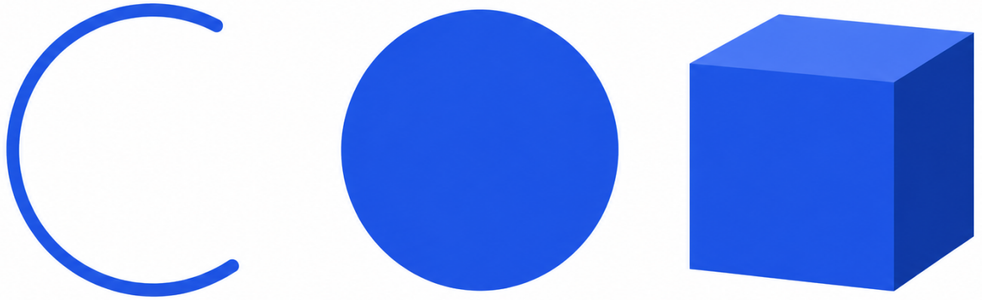
畠中　英里

「同じ形」とは何だろう？

本講義で扱う図形とトポロジー

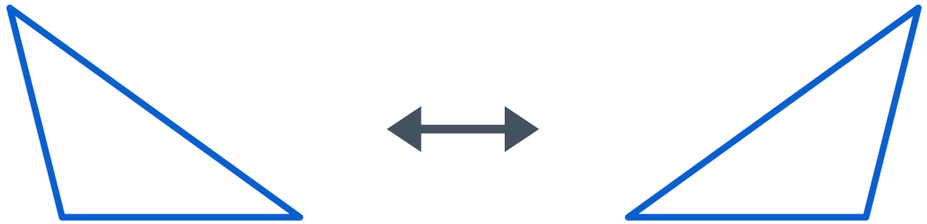
この講義では、線、 2 次元図形、立体、
さらに高次元の図形までを比べます。

トポロジーとは、長さや角度に
よらない図形の性質を調べる
数学の分野です。

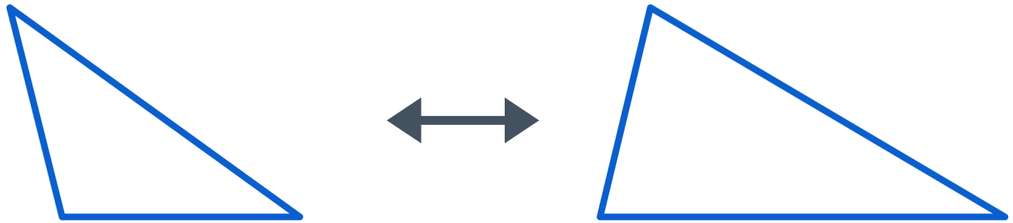


これまで学んだ合同を出発点に、
トポロジーでの「同じ形」を考えます。

二つの「同じ形」



合同：移動・回転・裏返しで、ぴったり重なる。



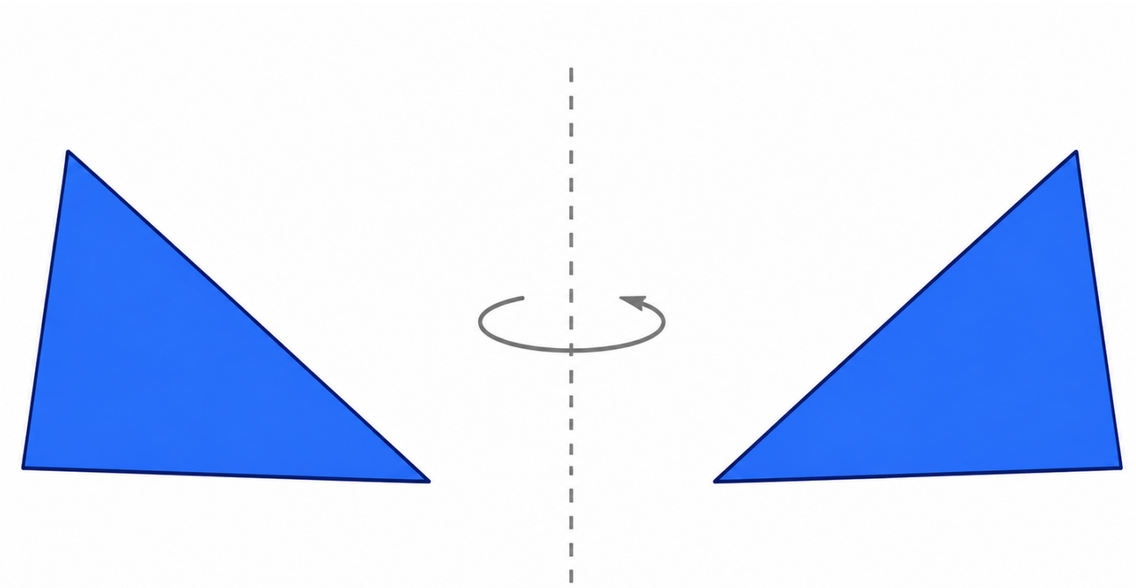
トポロジーでは「同じ形」を同相（どうそう）と呼びます。
下では、三角形の線を伸び縮みさせ、長さと角度を変えています。

合同では長さや角度を変えません。
トポロジーでは、長さや角度が違っても同じ形の場合があります。

合同

合同な二つの図形は、一般にも
「同じ形」だと考えます。

移動・回転・裏返しによって、
ぴったり重なる二つの図形を
合同と呼びます。



合同では、すべての長さと角度を変えずに重ね合わせます。

合同は三角形だけではない

多角形・曲線・立体についても、
合同を定義できます。

どの 2 点間の距離も保つように、
一方を他方へ重ねられることが、
合同の定義です。

多角形





曲線





立体





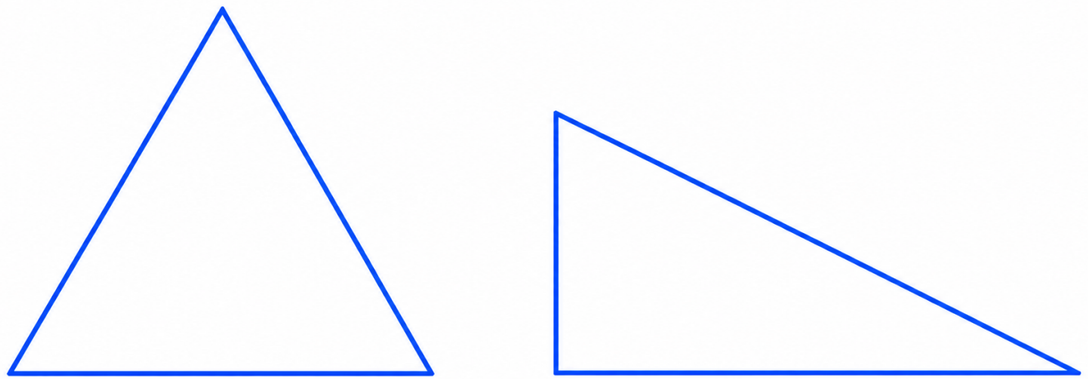
三角形に限らず、距離を保ってぴったり重ねられる
二つの図形を合同といいます。

合同でないことを証明するには

左は、三辺の長さが等しい
正三角形です。

左と合同なら、右の三辺も
すべて等しくなるはずです。

しかし、右の三辺の長さは
互いに異なります。



正三角形

三辺の長さが
すべて異なる三角形

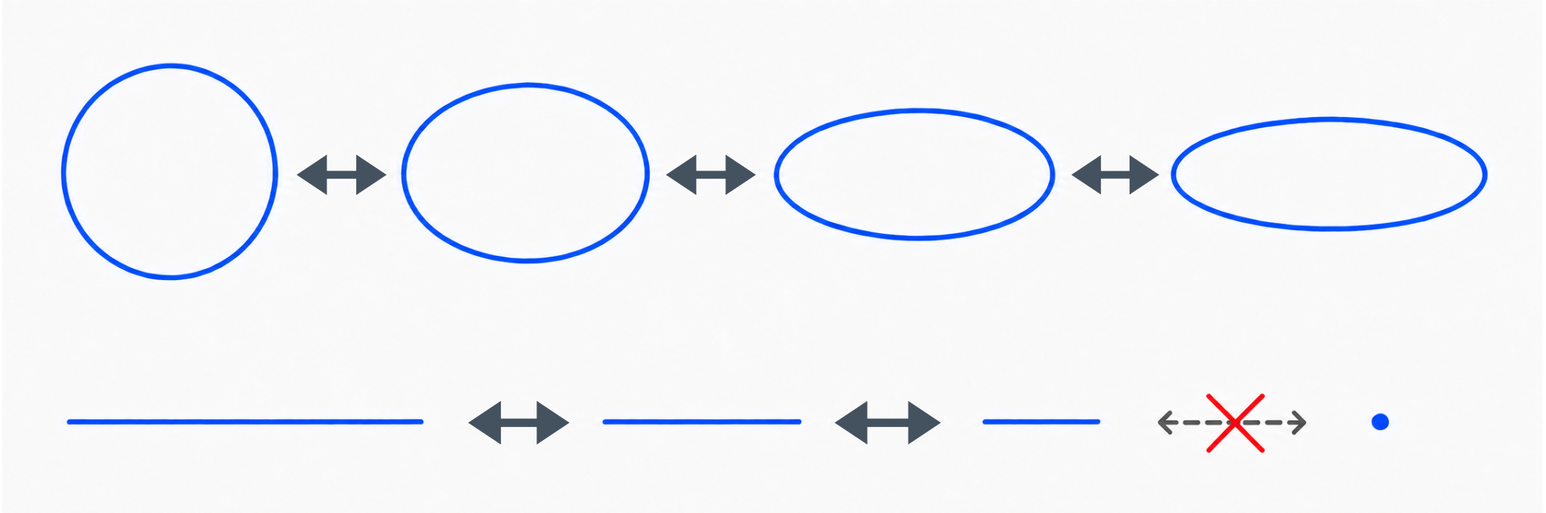
合同なら保たれる性質が一致しないので、
この二つは合同ではありません。

トポロジーで「同じ形」を示す変形

曲げたり、伸ばしたり縮めたりして、図形全体を少しずつ動かします。
切らず、新たにつながず、異なる点を一つにせず、逆向きにも戻せるなら、
トポロジーの意味で「同じ形」であることを証明できます。

円と楕円は同じ形

線分と一点は
同じ形ではない



線分を一点にする操作では、異なる点が一つに重なります。
この操作は、トポロジーで「同じ形」を示す変形ではありません。

紐で、変わるものを確かめる

紐をCからSへ曲げ、
Cへ戻す動きを追ってみましょう。

曲がり方を変えると、
何が変わり、
何が変わらないでしょうか。

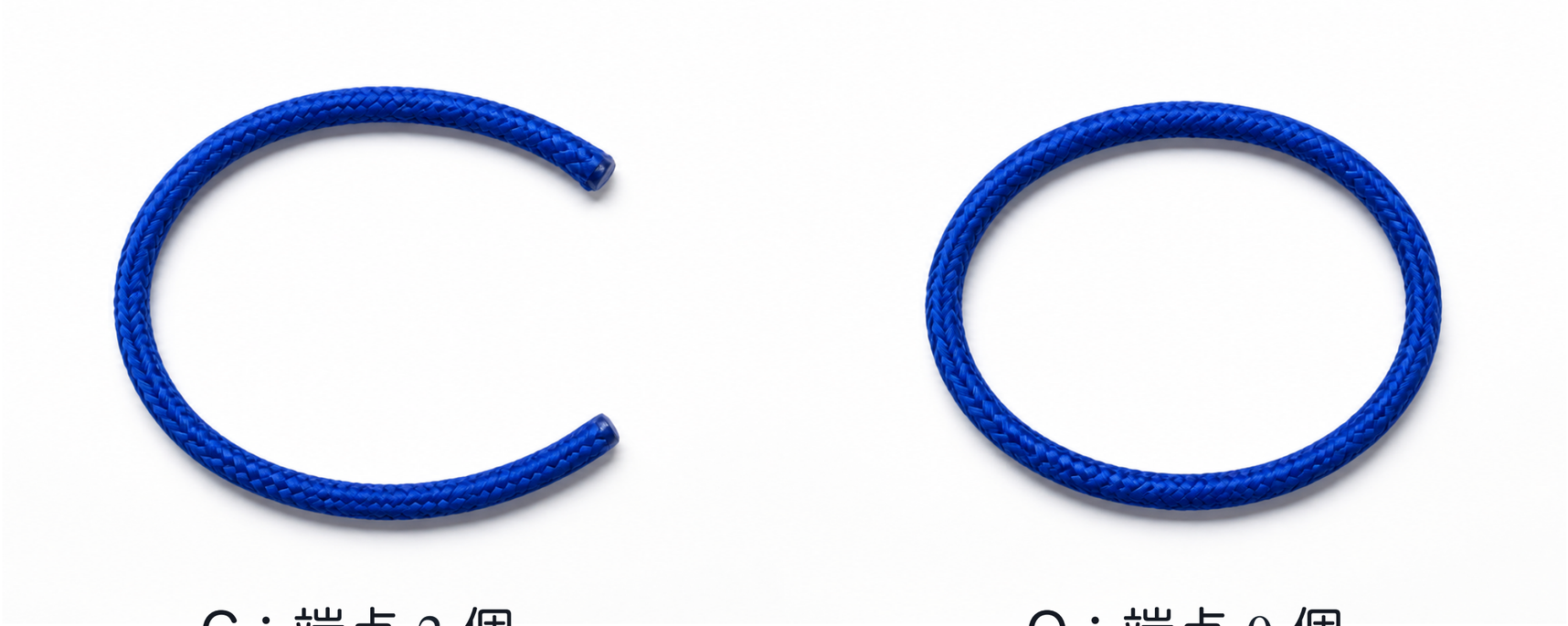


C　　S　　C

両端を離したまま曲げると、
曲がり方は変わっても、線の両端は残ります。

端点を比べる

端点とは、その点のすぐ近くで線が 1 方向にだけ伸びる点です。
Cの形の紐と、両端をつないだ輪の、端点の個数を比べましょう。



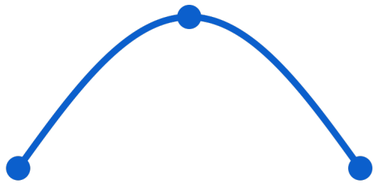
C：端点 2 個

O：端点 0 個

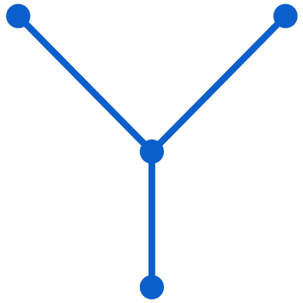
トポロジーで同じ形の二つの図形では、
端点の個数が一致します。

グラフと頂点

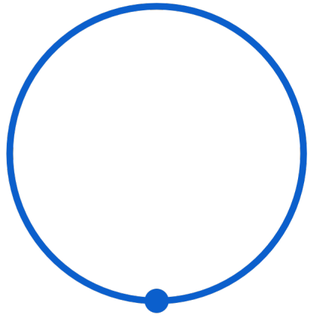
紐を、太さのない線の図形として表します。
青い点を「頂点」、頂点で区切られた線を「辺」と呼びます。
頂点と辺で表した線の図形が「グラフ」です。



両端：線が 1 本（端点）
中央：線が 2 本



中央：線が 3 本（分岐点）
分岐点では線が 3 本以上



青い点：線が 2 本
頂点 1 個と辺 1 本の輪

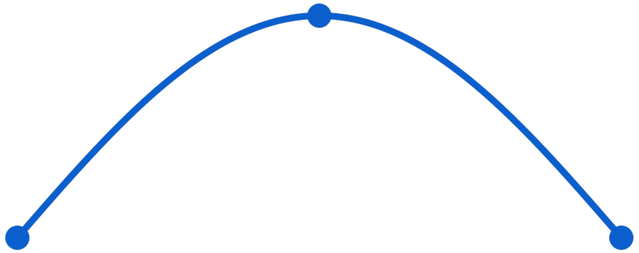
辺の両端には頂点を置きます。同じ頂点を両端にしても構いません。
端点・分岐点を頂点に含め、途中にも頂点を選べます。

頂点を増やしても、トポロジーでは同じ形

右では、線の途中に頂点を 1 個加えています。
線を切ったり、つないだりしていません。端点はどちらも 2 個です。



頂点 2 個・辺 1 本



頂点 3 個・辺 2 本

トポロジーでは、頂点の選び方を離れて、線そのものの形を比べます。

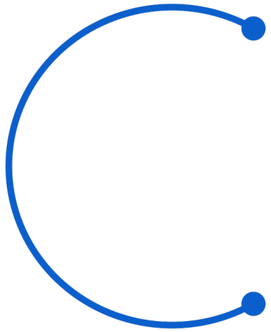
頂点数も辺数も、トポロジーで同じ形のまま変えられます。
その個数の違いだけでは、トポロジーで形が違うと証明できません。

不変量：形の違いを証明する

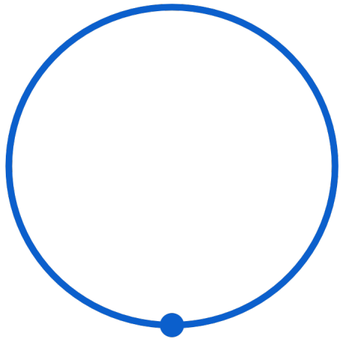
CとOの比較を使って、形の違いを証明する考え方を整理します。

トポロジーで同じ形なら、値が必ず一致する量を
「不変量」と呼びます。

端点の個数は不変量です。
頂点数や辺数は、
不変量ではありません。



C：端点 2 個



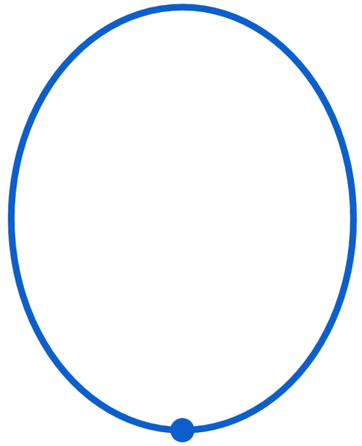
O：端点 0 個

CとOは、端点の個数が 2 個と 0 個なので、同じ形ではありません。

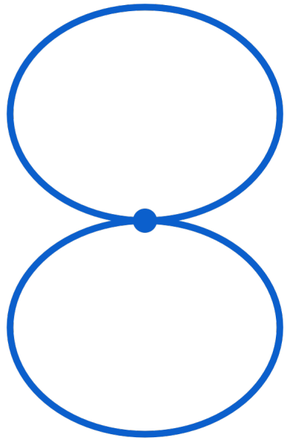
同じ形なら値が必ず一致する不変量を使えば、
変形をすべて試さなくても、形の違いを証明できます。

Oと8

画面のOと8は、端点がどちらも 0 個です。
線が 3 本以上に分かれる分岐点を探しましょう。



O：分岐点 0 個



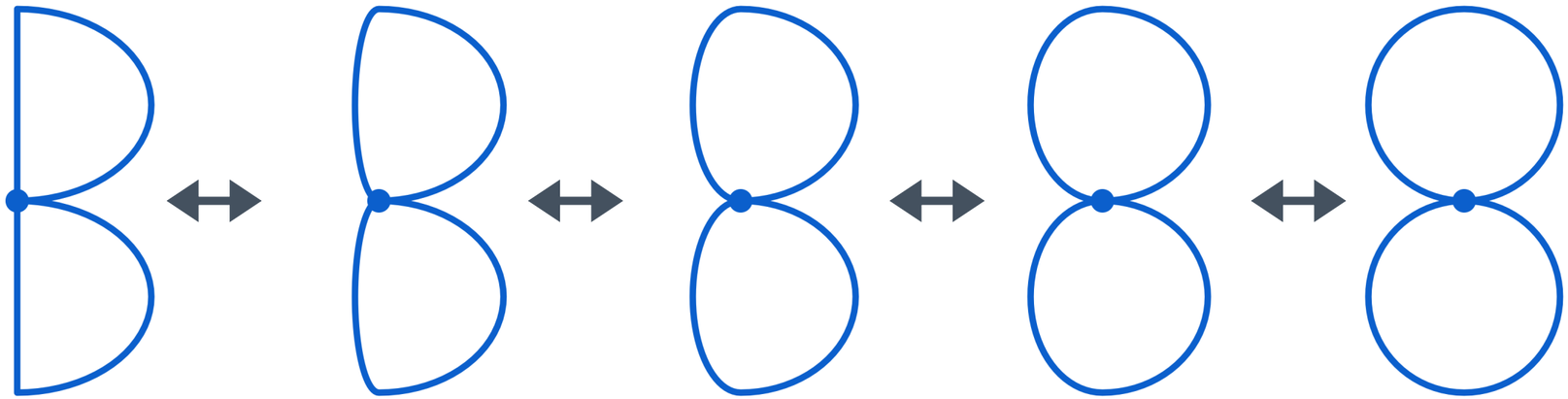
8：分岐点 1 個

8の中央では線が 4 本に分かれます。Oにはそのような点がありません。

同じ形なら、分岐点どうしが対応し、その個数も一致します。
Oと8は分岐点の個数が違うので、同じ形ではありません。

Bと8

画面のBは、上下の輪が中央の一点だけでつながった線の図形です。
中央のつながりを保ち、左側を外へ曲げて、上下の角を丸めます。

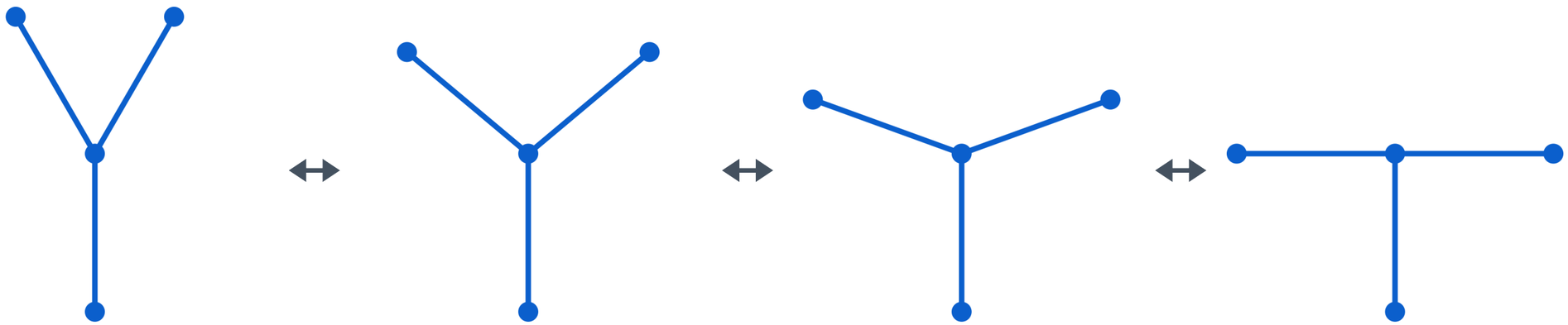


切らず、新たにつながず、異なる点を一つにせずに少しずつ動かします。
同じ動きを逆にたどると、この図のBへ戻せます。

条件を守り、逆にも戻せる変形を具体的に示せるので、
この図のBと8は、トポロジーの意味で同じ形です。

YとT

画面のYの中央を保ち、上の二つの腕を左右へ開きます。
同じ動きを逆にたどれば、TからYに戻せます。



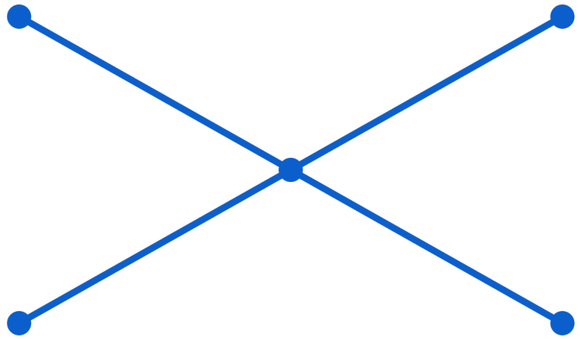
切らず、新たにつながず、異なる点を一つにせずに動かせます。
中央で分かれる線は 3 本のままですが、腕の間の角度は変わります。

同じ形のまま角度を変えられるので、
角度は、トポロジーの不変量ではありません。

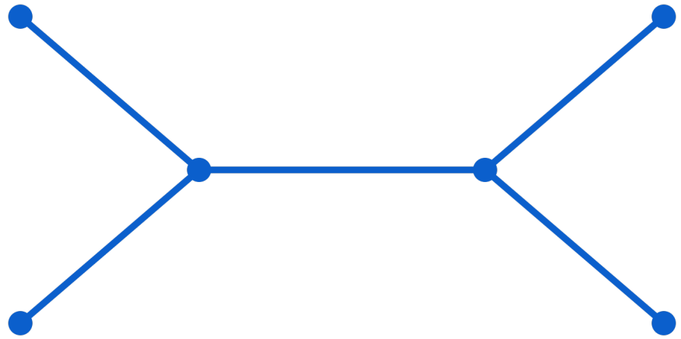
端点が同じ個数でも、形は違う

両図とも、端点は 4 個で、一周できる輪はありません。
どの不変量の値を比べれば、同じ形ではないと証明できるでしょうか？

辺数は、途中に頂点を加えるだけで変わるため、不変量ではありません。



端点 4 個・分岐点 1 個

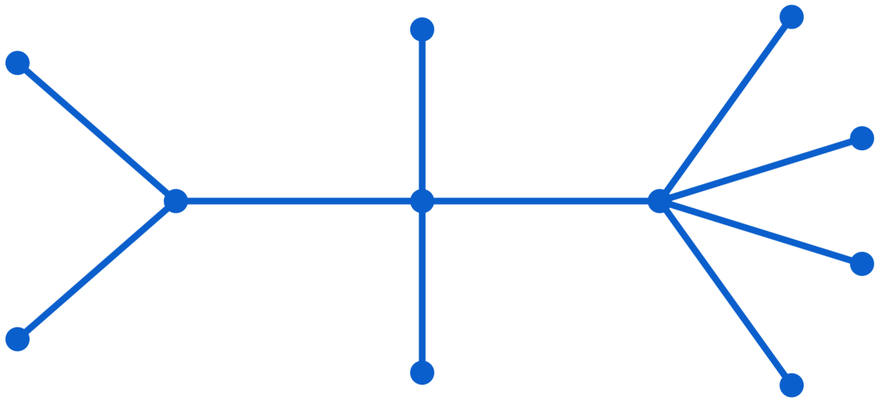


端点 4 個・分岐点 2 個

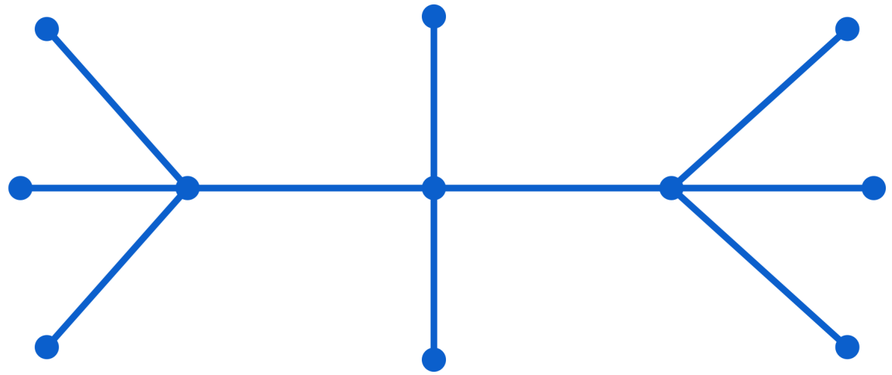
端点の個数はどちらも 4 個ですが、分岐点は 1 個と 2 個です。
分岐点の個数が違うので、この二つは同じ形ではありません。

端点も分岐点も同じ個数なら？

下の二つは、トポロジーの意味で同じ形でしょうか？
どちらも、端点は 8 個、分岐点は 3 個です。



端点 8 個・分岐点 3 個

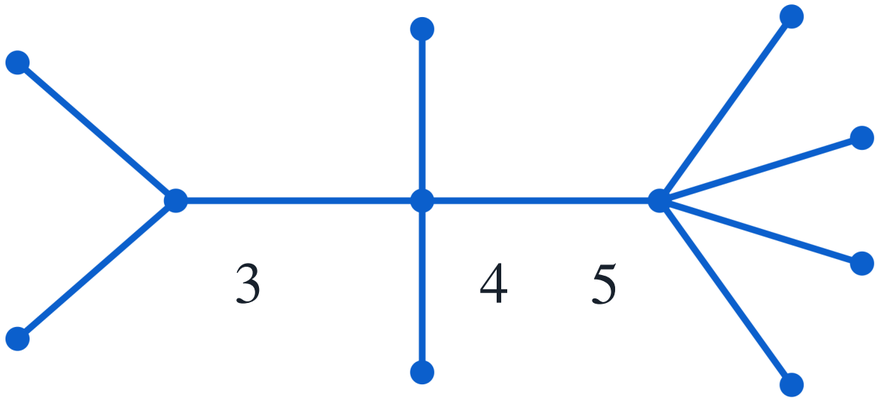


端点 8 個・分岐点 3 個

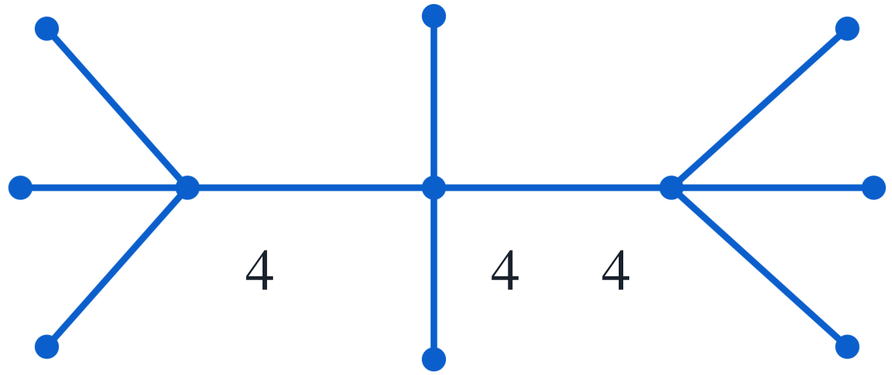
端点の個数も、分岐点の個数も一致しています。
各分岐点で分かれる線の本数まで比べましょう。

分岐点で分かれる線の本数

同じ形なら、分岐点どうしが対応し、そこで分かれる線の本数も一致します。



左： 3 本・ 4 本・ 5 本



右： 4 本・ 4 本・ 4 本

3 本や 5 本に分かれる分岐点は、左に各 1 個、右にはありません。
このような点の個数が違うので、二つは同じ形ではありません。

線の図形の比較を振り返る

比べた図形	結論	確かめたこと・理由
C と S	同じ形	曲がり方を変えて、逆にも戻せる。
C と O	異なる形	端点の個数が 2 個と 0 個。
	同じ形	頂点数・辺数が変わっても、線は同じ。
O と 8	異なる形	分岐点の個数が 0 個と 1 個。
図のB と 8	同じ形	輪のつながりを保ち、逆にも戻せる。
Y と T	同じ形	角度を変えて、逆にも戻せる。
	異なる形	端点 4 個。分岐点が 1 個と 2 個。
	異なる形	分岐点の線が 3 ・ 4 ・ 5 本と 4 ・ 4 ・ 4 本。

同じ形は、条件を守る変形で確かめました。
異なる形は、不変量の値の違いで証明しました。

2 次元図形を、穴の個数で区別する

このような 2 次元図形では、穴の個数も不変量です。
ここでの穴は、図形に囲まれて外側と隔てられた空白の部分です。

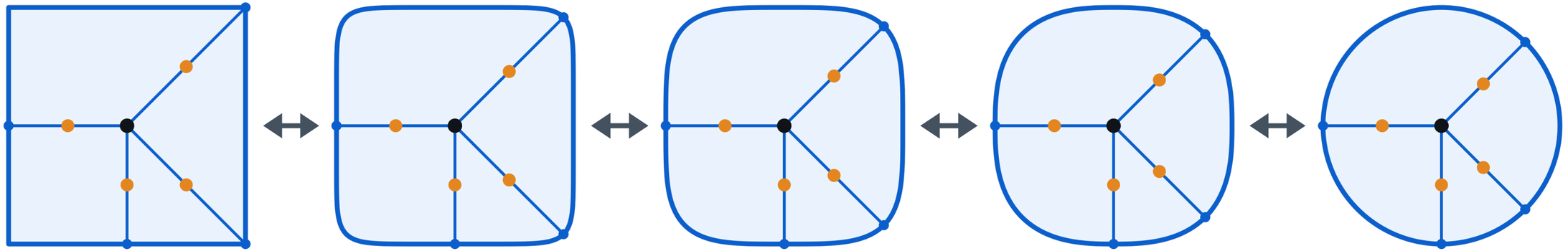


穴 0 個　　穴 1 個　　穴 2 個

穴の個数が 0 個・ 1 個・ 2 個と違うので、
これらは、トポロジーの意味で互いに異なる形です。

正方形と円板は同じ形

中心を固定し、中心から境界へ向かう線分を伸び縮みさせます。

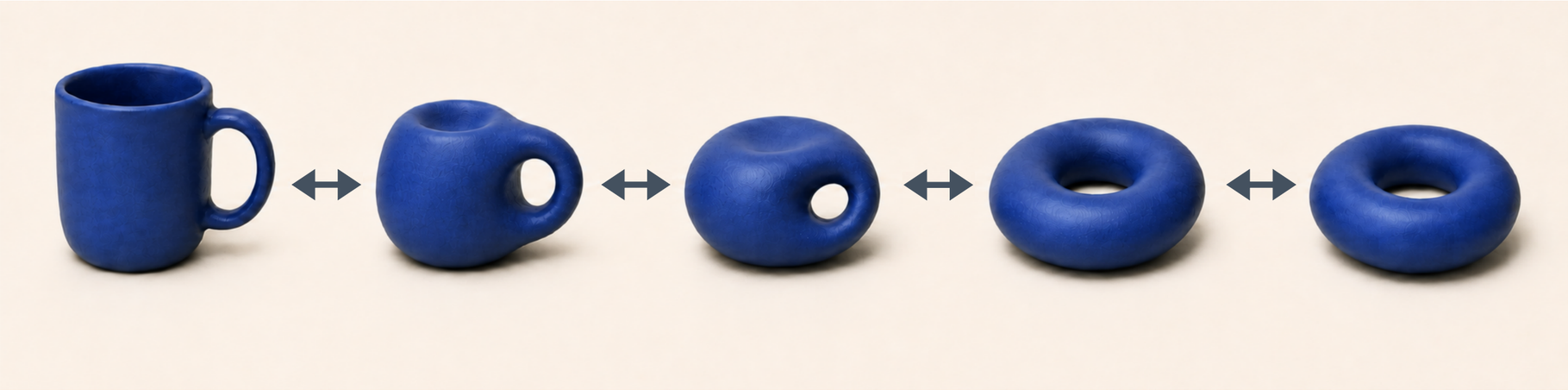


黒い点が中心です。オレンジ色の点は、各線分の中間にあります。
線分上の点は、中心からの距離を境界と同じ倍率で変えます。
異なる点を一つにせず、どの段階からも逆向きに戻せます。

切ったり、新たにつないだりせず、この変形で移り合うので、
正方形と円板は、トポロジーの意味で同じ形です。

マグカップとドーナツ

マグカップの陶器の部分と、ドーナツの生地の部分を、
厚みのある立体として比べます。



カップのくぼみを浅くし、本体を丸めながら取っ手の輪を広げます。
輪の周りに厚みをならし、同じ段階を逆向きにもたどれます。

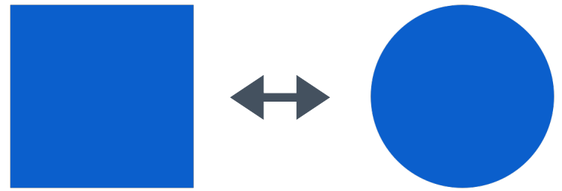
切らず、新たにつながず、異なる点を一つにせずに移り合うので、
マグカップとドーナツは、トポロジーの意味で同じ形です。

「同じ形」とは何だろう？

合同も同相も、図形を「同じ形」とみなすための基準です。
トポロジーでは、同相を基準に図形を調べます。

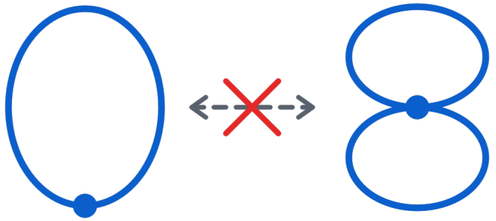
トポロジーで同じ形と示すには

切らず、新たにつながず、異なる点を一つにせず、
逆にも戻せる変形を与える方法があります。



トポロジーで異なる形と示すには

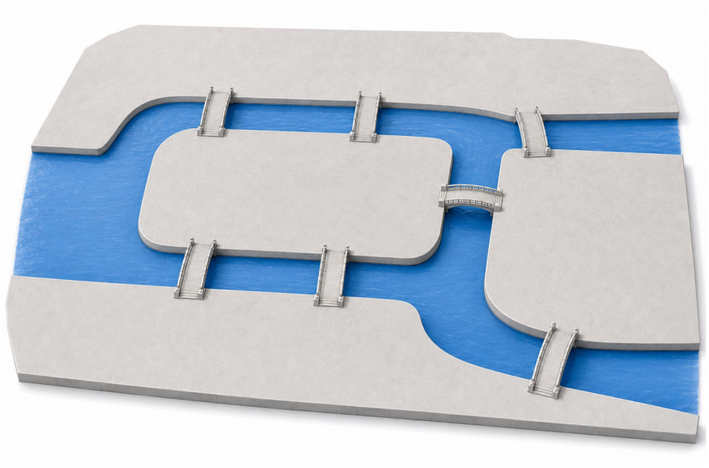
同じ形なら保たれる不変量の値を比べます。
Oと8では、分岐点が 0 個と 1 個なので区別できます。



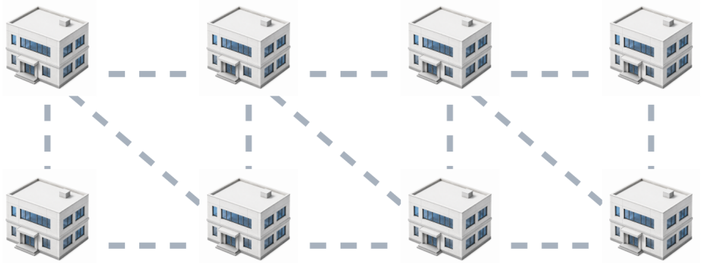
不変量の値が一致しても、同じ形とは限りません。
変形で同じ形を示すか、別の不変量の違いで異なる形を証明します。

次回：巡り方とつなぎ方の数学

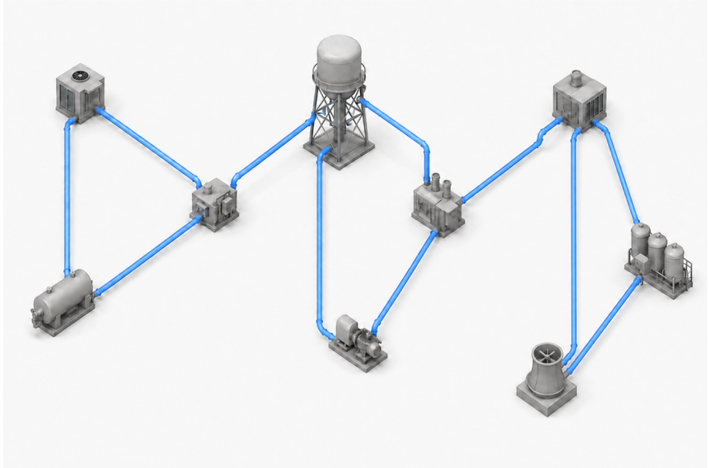
現実の問題をグラフに置き換え、条件や解決策を考えます。



橋を巡回する



配線費用を抑える



配管の故障に備える

何と何をつなぐかに着目すると、数学が問題解決の道具になります。